Université de Liège

Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Test à blanc

19 Avril 2023

Consignes

- NOM (en MAJUSCULES), prénom (en minuscules) et numéro d'ordre sur chaque feuille dans les emplacements prévus.
- Contrôlez soigneusement que vous avez bien les 6 pages.
- Répondez directement sous la question.
- Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, veuillez les demander aux surveillants qui vous en fourniront. Les pages supplémentaires seront ajoutées après la dernière page et numérotées.
- Les pages verso peuvent être utilisées comme brouillon ; elles ne **seront pas corrigées !**
- GSM, smartphones et tablettes interdits
- La calculatrice est interdite pour les questions 1 et 2 (algèbre) et autorisée pour la question 3 (trigonométrie).
- Préparer une pièce d'identité sur la table.

Question 1 *Soit m un paramètre réel. Discuter et résoudre, dans les nombres réels, l'inéquation*

$$\frac{x^2+mx+1}{x^2+2x+1} < 4.$$

Solution : Condition d'existence : $x \neq -1$. Sous cette condition, puisque $x^2+2x+1 = (x+1)^2 > 0$, l'inéquation est équivalente à

$$3x^2 + (8-m) + 3 > 0.$$

Premier cas : $m^2 - 16m + 28 > 0$, c'est-à-dire $m < 2$ ou $m > 14$. Alors le polynôme $3x^2 + (8-m) + 3$ possède deux racines $x_1 = \frac{m-8-\sqrt{m^2-16m+28}}{6}$ et $x_2 = \frac{m-8+\sqrt{m^2-16m+28}}{6}$. Si $m < 2$, on a $x_1 < -1 < x_2$. Le tableau des signes est le suivant :

x		x_1		-1		x_2	
	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions est

$$\text{sol} =]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[.$$

Si $m > 14$, on a $-1 < x_1 < x_2$. Le tableau des signes est le suivant :

x		-1		x_1		x_2	
	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions est

$$\text{sol} =]-\infty, -1[\cup]-1, x_1[\cup]x_2, +\infty[.$$

Deuxième cas : $m^2 - 16m + 28 = 0$, c'est-à-dire $m = 2$ ou $m = 14$. Alors le polynôme $3x^2 + (8-m) + 3$ possède une seule racine $x_0 = \frac{m-8-\sqrt{m^2-16m+28}}{6}$. Si $m = 2$, alors $x_0 = -1$. Le tableau des signes est le suivant :

x		$x_0 = -1$	
	$+$	$\|\|$	$+$

L'ensemble des solutions est

$$\text{sol} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.$$

Si $m = 14$, alors $x_0 = 1$. Le tableau des signes est le suivant :

x		-1		$x_0 = 1$	
	$+$	$\|\|$	$+$	0	$+$

L'ensemble des solutions est L'ensemble des solutions est

$$\text{sol} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Troisième cas : $m^2 - 16m + 28 < 0$, c'est-à-dire $2 < m < 14$. Alors le polynôme $3x^2 + (8-m) + 3$ ne s'annule pas. Le tableau des signes est le suivant :

x		-1	
	$+$	$\|\|$	$+$

L'ensemble des solutions est

$$\text{sol} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

Commentaires :

— Pour aborder une inéquation, il est conseillé de vérifier directement les conditions d'existence de chaque membre.

- L'inéquation doit être manipulée dans le but d'obtenir 0 dans un des deux membres et d'étudier le signe de l'autre membre.
- Il est nécessaire soit de s'assurer que chaque opération sur l'inéquation n'en modifie pas son signe, soit d'adapter le sens de l'inéquation, et finalement de justifier chaque étape.
- Calculer le discriminant Δ ou réalisant ρ du polynôme obtenu permet de déterminer les valeurs de x qui annulent le membre de gauche, afin d'en étudier son signe.
- Il existe 3 cas possibles : $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$, respectivement définis par $m \in]-\infty, 2[\cup]14, \infty[$, $m \in \{2, 14\}$ et $m \in]2, 14[$. Il est inutile de vérifier des cas particuliers sans importance tels que $m = 0$ ou $m = 8$.
- Le tableau de signe d'un polynôme du second degré qui admet une racine double ne change pas de signe autour de cette racine.
- Dans le premier cas présenté, il est intéressant de discuter de la position de la condition d'existence $x \neq -1$ par rapport aux racines du membre de gauche.
- Les ensembles de solution présentés à la fin de chaque cas sont incomplets s'ils ne vérifient pas la condition d'existence de l'inéquation de départ.

Question 2 *Les nombres de Fibonacci sont définis par les relations :*

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ pour tout entier } n \geq 0.$$

Le nombre d'or est le nombre

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Démontrer les deux affirmations suivantes.

1. *Le nombre d'or annule le polynôme $x^2 - x - 1$.*
2. *Pour tout entier $n \geq 1$, on a $\varphi^n = \varphi f_n + f_{n-1}$.*

Solution :

1. On vérifie que $\varphi^2 - \varphi - 1 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}-4}{4} = 0$.
2. On procède par récurrence sur n.
   Cas de base. Pour $n = 1$, nous avons $\varphi^1 = \varphi$ et $\varphi f_1 + f_0 = \varphi \cdot 1 + 0 = \varphi$.
   Hérédité. Soit $n \geq 1$ et supposons avoir l'égalité $\varphi^n = \varphi f_n + f_{n-1}$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi^{n+1} &= \varphi \cdot \varphi^n \\
&= \varphi(\varphi f_n + f_{n-1}) \\
&= \varphi^2 f_n + \varphi f_{n-1} \\
&= (\varphi + 1) f_n + \varphi f_{n-1} \\
&= \varphi(f_n + f_{n-1}) + f_n \\
&= \varphi f_{n+1} + f_n.
\end{aligned}$$

   où on a utilisé l'hypothèse de récurrence pour la deuxième égalité, le point 1 pour la quatrième égalité et la définition des nombres de Fibonacci pour la sixième égalité.

Commentaires :

— Montrer qu'un polynôme est annulé par un scalaire ne signifie ni chercher les valeurs de l'argument qui égalent le polynôme et ce scalaire, ni celles qui annulent le quotient ou le produit du polynôme et du scalaire (bien que les résultats dans ces deux cas seront équivalents à celui attendu).

— Les hypothèses et la thèse d'une démonstration doivent apparaître clairement. S'il existe des conditions sur certaines variables, elles doivent également être précisées.

— Montrer qu'une proposition est vérifiée dans un ou quelques cas particuliers ne constitue en rien une démonstration valide. Un raisonnement qui converge vers le postulat de départ n'est évidemment pas valide non plus. Il en va de même pour les démonstrations utilisant la thèse pour justifier une étape.

— Dans une preuve par récurrence, un seul cas d'initialisation suffit (dans ce cas, $n = 1$). La preuve d'hérédité qui suit doit ensuite supposer la proposition vraie dans un certain cas n (et non pour tout n, et non pour $n = 1$), ici tel que $n \geq 1$, et montrer qu'elle est vraie pour le cas $n + 1$ (et non uniquement pour le cas $n = 1 + 1 = 2$).

— L'indice d'un nombre de Fibonacci ne doit pas être considéré comme un exposant. Les opérations entre ces nombres sont définies dans l'énoncé.

— Un minimum de contexte, d'explications, et de justifications doivent apparaître dans vos développements. Votre raisonnement doit être structuré afin d'être immédiatement compréhensible par le correcteur. Une conclusion est souvent bienvenue également en fin de raisonnement.

— Lorsque les signes d'implication et de double implication sont utilisés, ils doivent l'être de manière adéquate afin de structurer le raisonnement et de lier les différentes étapes. Celles-ci doivent s'enchaîner de manière cohérente, en gardant les mêmes conventions de notation.

Question 3 *Un terrain à bâtir de forme pentagonale $ABCDE$ est mis en vente. Le vendeur désire connaitre la superficie exacte du terrain. Pour ce faire, il mesure tout d'abord les cinq côtés :*

$$|AB| = 50m,\ |BC| = 30m,\ |CD| = 40m,\ |DE| = 30m,\ |AE| = 25m.$$

Ensuite, il mesure deux diagonales $|AC| = 41m$ et $|BE| = 37m$. Calculer l'aire du terrain.

Solution : On commence par calculer l'angle $\widehat{BAC}$ grâce à la résolution du triangle ABC. En utilisant Al-Kashi, on a

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{BAC}) &= \frac{|BC|^2 - |AB|^2 - |AC|^2}{(-2)\cdot|AB|\cdot|AC|}\\ &= \frac{30^2 - 50^2 - 41^2}{(-2)\cdot 50\cdot 41}\end{aligned}$$

Donc $\widehat{BAC} \approx 36.8°$.
On considère ensuite le triangle ABE afin de calculer l'angle $\widehat{BAE}$. En utilisant de manière similaire Al-Kashi, on trouve

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{BAE}) &= \frac{|BE|^2 - |AB|^2 - |AE|^2}{(-2)\cdot|AB|\cdot|AE|}\\ &= \frac{37^2 - 50^2 - 25^2}{(-2)\cdot 50\cdot 25}\end{aligned}$$

Et donc $\widehat{BAE} = 45.4°$.
La connaissance de ces deux angles nous permet de trouver

$$\widehat{CAE} = \widehat{BAE} - \widehat{BAC} = 45.4 - 36.8 \approx 8.6°.$$

Nous pouvons à présent analyser le triangle ACE et calculer $|CE|$. On a

$$\begin{aligned}|CE|^2 &= |AC|^2 + |AE|^2 - 2\cdot|AC|\cdot|AE|\cos(\widehat{CAE})\\ &= 41^2 + 25^2 - 2\cdot 41\cdot 25\cos(8.6)\\ &\approx 278.7\end{aligned}$$

Nous avons donc $|CE| \approx 16.7\ m$.

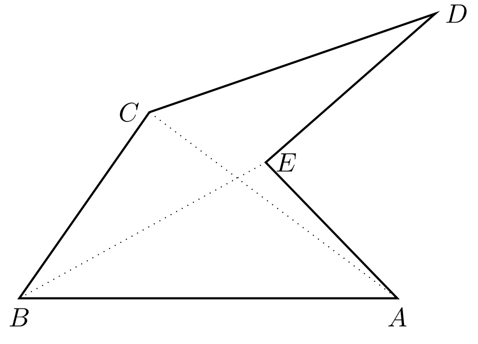

FIGURE 1 – Le pentagone obtenu.

Nous pouvons maintenant calculer l'aire du terrain en additionnant l'aire du triangle ABC, du triangle ACE et du triangle CDE. Pour rappel, on peut calculer l'aire d'un triangle XYZ si on connait un angle $\widehat{XYZ}$ et les côtés qui l'entourent $|XY|$ et $|YZ|$ grâce à la formule $\mathcal{A}(XYZ) = \frac{1}{2}\sin\widehat{XYZ}\cdot|XY|\cdot|YZ|$.
Pour le triangle ABC, $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}|AB||AC|\sin(\widehat{BAC}) \approx 614\ m^2$.
Pour le triangle ACE, $\mathcal{A}(ACE) = \frac{1}{2}|AC||AE|\sin(\widehat{CAE}) \approx 76\ m^2$.

Pour le triangle CDE, on connait les trois côtés, mais il nous manque un angle. On peut calculer un angle en utilisant Al-Kashi. On a, par exemple,

$$\cos(\widehat{CDE}) = \frac{|CE|^2 - |CD|^2 - |DE|^2}{(-2) \cdot |CD| \cdot |DE|} \approx 0.926.$$

On a donc $\widehat{CDE} \approx 22.2°$, ce qui donne, pour l'aire, $\mathcal{A}(CDE) = \frac{1}{2}|CD| \cdot |DE| \cdot \sin(\widehat{CDE}) \approx 227.2\ m^2$.

On obtient donc comme aire totale $614.7 + 76 + 227.2 \approx 917.9\ m^2$.

Commentaires :

— La formule de l'aire du triangle à partir d'un angle et des deux côtés qui l'entourent n'est pas toujours bien connue mais peut être utile.
N'oubliez pas non plus de diviser par deux dans cette formule.

— On ne peut pas utiliser les formules $\cos = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ (et son pendant pour le sin) dans un triangle qui n'est pas rectangle.

— Les côtés $|DE|$ et $|BC|$ sont égaux. Cela ne veut pas dire pour autant que le quadrilatère $BCDE$ est un trapèze.
En règle générale, tout ce qui n'est pas précisé dans l'énoncé doit être prouvé par la géométrie ou la trigonométrie.

— Il est conseillé pour aborder ce genre de problème de réaliser une grande figure afin d'identifier les données connues, et celles calculables pour arriver à la solution.

— Avant de commencer l'exercice, nous vous conseillons d'identifier les triangles où nous connaissons trois quantités (3 côtés ou 1 angle et 2 côtés ou 2 angles et 1 côté) car ce sont des triangles dans lesquels toutes les quantités (3 angles et 3 côtés) peuvent être calculées grâce à la règle des sinus ou au théorème d'Al-Kashi. Vous pouvez alors voir plus vite les éléments manquants qui permettent d'arriver à la solution.

— On peut calculer l'aire d'un triangle dont on connait les trois côtés grâce à la formule de Héron. Cette formule était aussi acceptée et permettait d'éviter une étape de calcul.