Avril 2022

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL

SIMULATION D'EXAMEN

- *Rédigez vos réponses aux deux questions sur des feuilles séparées et numérotez chacune des feuilles.*
- *Dans le coin supérieur gauche de chaque face, indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre prénom en minuscules et de votre numéro d'ordre.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche avec votre NOM et votre prénom et votre numéro d'ordre.*

Question I

On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{x^2+a} + x\sqrt{\frac{1}{x^2}+a}$$

où a désigne un paramètre réel positif ou nul.

i. En considérant dans un premier temps le seul cas $a = 1$, on demande
   (a) de déterminer le domaine de définition de f ;
   (b) de déterminer la parité éventuelle de f ;
   (c) de déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe ;
   (d) d'étudier la croissance/décroissance de f et de caractériser ses éventuels extrema ;
   (e) d'esquisser le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

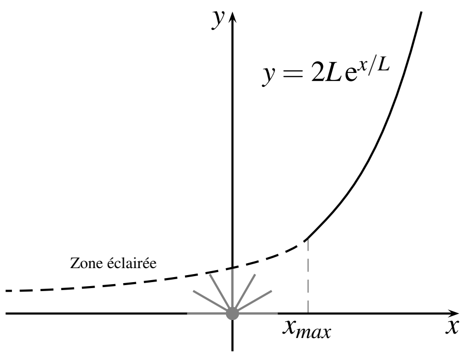
ii. Dans le cas où $a \geq 0$, calculez

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) - \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

et déterminez les valeurs éventuelles de $a \geq 0$ pour lesquelles un prolongement continu de la fonction en $x = 0$ est envisageable.

Question II

Soit un mur dont la trace au sol suit l'équation $y = 2Le^{x/L}$ où L désigne une constante strictement positive. En raisonnant uniquement dans le plan horizontal, déterminez la limite x_{max} de la portion du mur éclairée par une source lumineuse omnidirectionnelle placée à l'origine des axes.



Question III

On se place dans un repère orthonormé et on considère un point P (différent de l'origine) de coordonnées cartésiennes (α, β).
En fonction de α et β, déterminez les coordonnées cartésiennes des points A et B tels que le quadrilatère $OAPB$ soit un carré dont le segment OP est une diagonale.

Question IV

Dans l'espace, on donne les points A, B, C et D. Démontrez que le vecteur

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$$

est indépendant du point M.

SOLUTION TYPE

Avertissement : Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Le choix de la méthode est libre pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.

Question I

i. Dans le cas $a = 1$, la fonction à étudier s'écrit

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$$

soit

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+1}$$

de sorte que

- $f(x)$ n'est pas définie si $x = 0$;
- $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+1} = 0$ si $x < 0$;
- $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x^2+1}$ si $x > 0$.

(a) Le domaine de f est $\mathbb{R}_0$. *Total (a) : 1 pt*

(b) La fonction n'est ni paire, ni impaire. En effet, considérant $x > 0$, on a

$$f(x) = 2\sqrt{x^2+1}\begin{cases} \neq f(-x) = 0 \\ \neq -f(-x) = 0 \end{cases}$$

Total (b) : 1 pt

(c) • Calculons

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x^2+1} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

La fonction ne présente pas d'asymptote verticale en $x = 0$.

Limite pour $x \to 0^+$: 1 pt
Pas d'A.V. : 1 pt
Pas de point pour le traitement explicite de $x \to 0^-$

• Calculons

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 2\sqrt{x^2+1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

Il n'y a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$. La fonction s'identifie à sa propre asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$.

Pas d'A.H. en $+\infty$: 1 pt
Limite en $-\infty$ ou A.H. ou équivalent : 1 pt

• Recherchons une éventuelle asymptote oblique en $+\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} 2\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 2\lim_{x\to +\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 2$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to +\infty} 2\sqrt{x^2+1} - 2x = +\infty - \infty$$

Cette indétermination peut être levée comme suit,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x\to +\infty} \frac{(2\sqrt{x^2+1}-2x)(2\sqrt{1+x^2}+2x)}{2\sqrt{x^2+1}+2x} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{4(x^2+1)-4x^2}{2\sqrt{x^2+1}+2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0\end{aligned}$$

La fonction admet donc une asymptote oblique d'équation $y = 2x$ en $+\infty$. Cette asymptote est approchée par le dessus puisque $\lim_{x\to +\infty} f(x) - 2x = 0^+$.

Première limite : 1 pt
Deuxième limite : 1 pt
Équation de l'A.O. : 1 pt
Pas de point pour l'approche

Total (c) : 7 pts

(d) On calcule

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{si} \quad x>0 \quad \text{et} \quad f'(x)=0 \quad \text{si} \quad x<0$$

Sur le domaine $x<0$, la fonction est constante. Sur le domaine $x>0$, la fonction est strictement croissante. On peut calculer

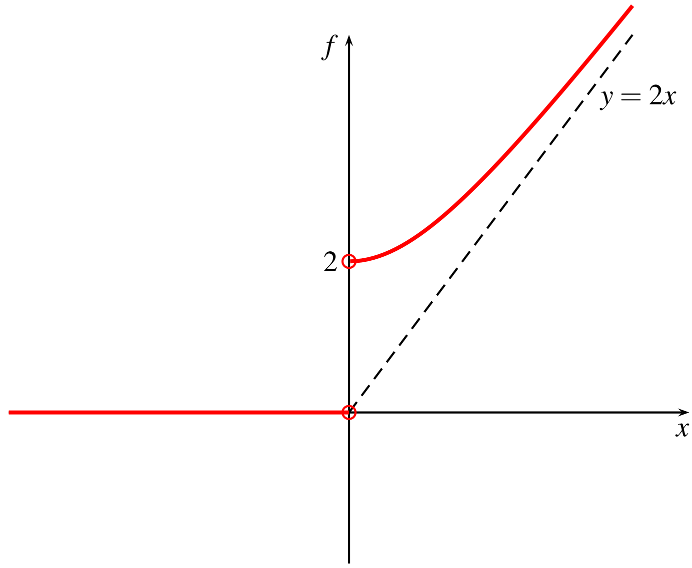
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

de sorte que la tangente au graphe est horizontale pour $x \to 0^+$.

Expression de $f'(x)$ si $x>0$: 2 pts
Fonction strictement croissante si $x>0$: 1 pt
Fonction constante si $x<0$: 1 pt
Tangente horizontale en $x=0^+$: 1 pt
Total (d) : 5 pts

(e) Le graphique peut alors être tracé en vertu des éléments déterminés ci-dessus :

- Domaine : $\mathbb{R}_0$.
- Fonction nulle sur $]-\infty,0[$.
- Asymptote oblique $y=2x$ en $+\infty$ approchée par le dessus.
- Fonction strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- Tangente horizontale au graphe en $x=0^+$ avec $\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$.



Graphique cohérent avec les résultats listés (mêmes faux) obtenus plus haut : 1 pt
Graphique correct : 2 pts
Total (e) : 3 pts

Total i. : 17 pts

ii. Soit

$$f(x) = \sqrt{x^2+a} + x\sqrt{\frac{1}{x^2}+a} = \sqrt{x^2+a} + \frac{x}{|x|}\sqrt{1+ax^2}$$

où a désigne un paramètre réel positif ou nul.

Si $x>0$,

$$f(x) = \sqrt{x^2+a} + \sqrt{1+ax^2}$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+a} + \sqrt{1+ax^2} = \sqrt{a}+1$$

Limite en 0^+ : 1 pt

Si $x<0$,

$$f(x) = \sqrt{x^2+a} - \sqrt{1+ax^2}$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+a} - \sqrt{1+ax^2} = \sqrt{a}-1$$

Limite en 0^- : 1 pt
Conclusion : 1 pt
Total ii. : 3 pts

En conclusion,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) - \lim_{x\to 0^-} f(x) = 2 \neq 0$$

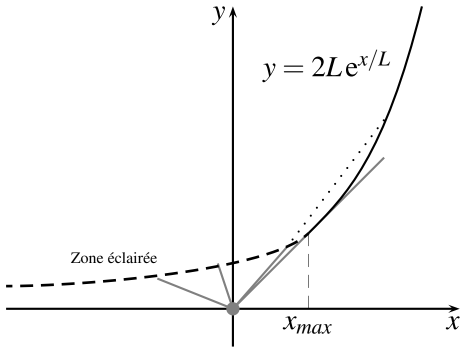
TOTAL QI : 20 PTS

de sorte que la fonction ne peut être prolongée continument en $x=0$ pour aucune valeur de $a \geq 0$.

Question II

La lampe n'éclaire plus le mur au-delà de l'abscisse x_{max} pour laquelle le rayon lumineux joignant la lampe au point du mur d'abscisse x_{max} est tangent au mur. En effet, pour les abscisses supérieures, le rayon devrait traverser une première fois le mur avant d'atteindre le point correspondant.

Principe énoncé ou mis en pratique : 1 pt



Mathématiquement, l'abscisse x_{max} est donc telle que la pente de la droite passant par les points $(0,0)$ et $(x_{max}, y(x_{max}))$ est égale à la pente de la tangente au graphe en x_{max}.

La pente du rayon lumineux vaut

$$\frac{y(x_{max})}{x_{max}} = \frac{2L}{x_{max}}\,\mathrm{e}^{x_{max}/L}$$

Pente du rayon lumineux : 1 pt

La pente de la tangente est donnée par la dérivée $y'(x_{max})$. On calcule

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\left(2L\mathrm{e}^{x/L}\right) = 2\,\mathrm{e}^{x/L} \quad \text{et} \quad y'(x_{max}) = 2\,\mathrm{e}^{x_{max}/L}$$

Pente de la tangente = dérivée : 1 pt

Valeur de la dérivée en x_{max} : 1 pt

L'abscisse x_{max} recherchée est donc telle que

$$\frac{2L}{x_{max}}\,\mathrm{e}^{x_{max}/L} = 2\,\mathrm{e}^{x_{max}/L}$$

ce qui donne finalement

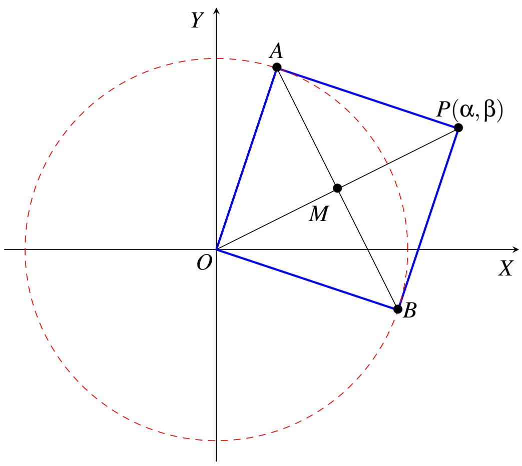
$$x_{max} = L$$

x_{max} : 1 pt

TOTAL QII : 5 PTS

Question III

Exemple (1) de résolution.



Le carré a une diagonale de longueur $d = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; si c est la mesure de la longueur des côtés, on a donc $2c^2 = d^2$. Dès lors ces côtés ont pour longueur $c = d/\sqrt{2} = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)/2}$.

Cela étant, les points A et B sont les points du cercle centré à l'origine et de rayon $d/\sqrt{2}$ qui sont aussi sur la médiatrice du segment OP. Des équations paramétriques de cette médiatrice sont

$$\begin{cases} x = \dfrac{\alpha}{2} - r\beta \\[2mm] y = \dfrac{\beta}{2} + r\alpha \end{cases} \qquad r \in \mathbb{R}$$

Les coordonnées cartésiennes (x,y) des points A, B sont donc obtenues en cherchant les valeurs du paramètre r qui vérifient

$$\frac{d^2}{2} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} = x^2+y^2 = \left(\frac{\alpha}{2} - r\beta\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} + r\alpha\right)^2.$$

On a

$$\left(\frac{\alpha}{2}-r\beta\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}+r\alpha\right)^2 \;=\; \frac{\alpha^2+\beta^2}{4}+r^2\,(\alpha^2+\beta^2)$$

donc

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\left(\frac{\alpha}{2}-r\beta\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}+r\alpha\right)^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}=\frac{1}{4}+r^2 \;\Leftrightarrow\; r^2=\frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; r=\frac{1}{2} \text{ ou } r=-\frac{1}{2}.$$

En conclusion, les points A,B ont pour coordonnées

$$\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

Exemple (2) de résolution.
Soit M le milieu du segment OP ; ses coordonnées sont donc $(\alpha/2,\beta/2)$. La médiatrice du segment OP a pour vecteur directeur le vecteur de composantes $(-\beta,\alpha)$. Les points A,B sont donc les points Q de coordonnées (x,y) tels que

$$\overrightarrow{OQ} \;=\; \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MQ},$$

c'est-à-dire, en termes des composantes

$$(x,y) \;=\; \left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)+r(-\beta,\alpha)$$

où r est un réel tel que la longueur du vecteur de composantes $r(-\beta,\alpha)$ soit égale à la demi-longueur des diagonales du carré, à savoir $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}/2$. On a donc $r=1/2$ ou $r=-1/2$ et dès lors les points A,B ont pour coordonnées

$$\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\beta-\alpha}{2}\right).$$

Question IV

Quel que soit le point M, l'égalité de Chasles donne

$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MD} &= 2\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)\\ &= -\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AD}, \end{aligned}$$

vecteur indépendant de M.

Commentaires

Question I

- Beaucoup ont oublié la condition d'existence $x \neq 0$ et n'identifient donc pas correctement le domaine de définition.
  Dans une étude de fonction (comme dans la discussion des zéros d'une équation, dans un autre contexte), il est impératif de considérer attentivement les conditions d'existence des expressions proposées.
- Très peu d'étudiants ont relevé le fait que $f(x) = 0$ pour $x < 0$, ce qu'on trouve pourtant assez naturellement en simplifiant l'expression initiale en tenant compte de $\sqrt{x^2} = |x|$.
  Il importe de toujours simplifier au maximum les expressions mathématiques manipulées.
- Le calcul de limites en présence de formes du type $0 \cdot \infty$ et $0/\infty$ pose problème dans beaucoup de copies.
  Toute forme du type $0 \cdot \infty$ est indéterminée. On ne peut donner une valeur à un telle expression sans justification ni développement complémentaire. La limite peut être nulle, infinie, ou même ne pas exister. Il convient de lever l'indétermination en se ramenant à une expression du type $0/0$ ou ∞/∞ et en appliquant l'Hospital.
  Les formes du type $0/\infty$ ne sont, pour leur part, pas indéterminées. Dans une telle forme, le numérateur et le dénominateur conduisent tous deux à rendre l'expression aussi petite que voulu. On peut donc en conclure que la limite est nulle, sans devoir appliquer l'Hospital.
- De nombreuses erreurs dans l'identification des asymptotes sont liées à un raisonnement erroné qui égale
  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} + 1 \quad \text{à} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}.$$
- Le principe de la dérivation des fonctions composées n'est pas toujours bien maîtrisé, surtout lorsque l'expression comporte plus de deux fonctions imbriquées.
- Personne n'a identifié la tangente horizontale pour $x \to 0^+$. Ce détail est pourtant important dans la discussion sur croissance/décroissance de la fonction.
  Il est toujours utile d'étudier et de préciser le comportement d'une fonction aux différents points formant la frontière de son domaine de définition.
- De nombreux étudiants ne relient pas les propriétés du graphique de la fonction aux résultats établis précédemment alors que ceci était demandé explicitement.
  Dans toute question, il importe de respecter les consignes énoncées.
- Le point (ii) relatif au prolongement continu n'a été correctement traité que par quelques étudiants (en lien avec l'écriture $\sqrt{x^2} = |x|$).

Question II

- Beaucoup de réponses sont rédigées sous la forme d'une suite d'expressions mathématiques, sans explication de la démarche suivie.
  Une solution correctement exposée doit comporter un minimum de texte. Le lecteur/correcteur ne doit pas avoir à deviner la logique du raisonnement suivi, surtout si celui-ci procède d'une démarche très peu conventionnelle.
- Beaucoup d'étudiants ayant répondu à cette question ont compris que x_{max} correspond à l'abscisse du point où la droite passant par l'origine (le rayon lumineux) est tangente à la courbe $y = 2L\mathrm{e}^{x/L}$ (le mur). Par contre, l'expression mathématique de cette condition pose souvent problème.
  Rappelons que la pente de la tangente au graphique d'une fonction est donnée par la dérivée de la fonction au point considéré. Dans le contexte, il convenait donc d'évaluer $y'(x_{max})$ où $y(x) = 2L\mathrm{e}^{x/L}$ pour obtenir l'expression de cette pente.
- La dérivation de la fonction $y(x) = 2L\mathrm{e}^{x/L}$ pose assez fréquemment problème quand elle est réalisée. Puisque $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ et que L est un simple paramètre constant, on a bien, par application de la règle de dérivation des fonctions composées,
  $$y'(x) = 2L\mathrm{e}^{x/L}(1/L) = 2\,\mathrm{e}^{x/L}$$

- Remarquons enfin que beaucoup d'étudiants ont vu dans cette question une question de calcul de limite, de calcul intégral ou encore d'optimisation alors qu'il s'agissait d'exploiter le fait que la dérivée d'une fonction en un point est égale à la pente de la tangente au graphique en ce point.