LIÈGE université

Prof. Éric J.M.DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Août 2023

Durée de l'épreuve : 2 heures et demie.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

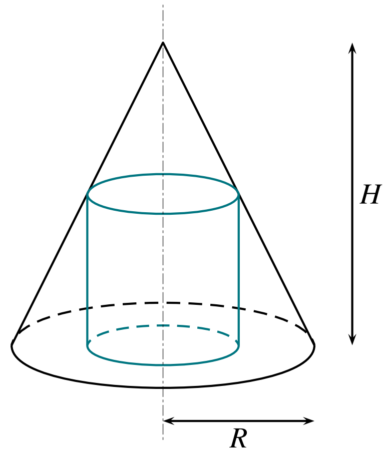
On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x}{\ln^2 x}$$

i. Déterminez le domaine de définition de f.
ii. Déterminez les éventuels zéros de f.
iii. Déterminez les éventuelles asymptotes de son graphe.
iv. Étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema.
v. Esquissez le graphique de f en listant explicitement les résultats pertinents obtenus ci-dessus et en les reliant aux caractéristiques du graphique présenté.
vi. Déterminez la(les) valeur(s) de β pour que la droite d'équation $y = \beta x$ soit tangente au graphique de f.

Question II

Quel est le volume maximum d'un cylindre circulaire droit inscrit dans un cône de hauteur H dont le rayon de la base vaut R (voir figure ci-contre) ?



Question III

On considère une particule initialement déposée sans vitesse à la surface d'un milieu résistif et qui pénètre dans celui-ci sous l'action de la pesanteur. La loi de variation de la vitesse en fonction du temps t est donnée par

$$v(t) = \alpha \left[t\, e^{-t/\tau} + \frac{\tau^4\, t}{(t^2+\tau^2)^2} \right] \quad \text{pour} \quad t \geq 0$$

où α et τ sont des constantes strictement positives.

Calculez la profondeur de pénétration $z(t)$ de la particule dans le milieu résistif en fonction du temps sachant que

$$z(t) = \int_0^t v(s)\, ds$$

Solution type

Avertissement : Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Le choix de la méthode est libre pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.

Question I

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x}{\ln^2 x}$$

i. L'argument de la fonction ln doit être strictement positif et le dénominateur de la fraction définissant f différent de zéro de sorte que $\operatorname{dom} f =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

ii. La fonction f est strictement positive sur tout son domaine. Elle n'a pas de zéro.

iii.
- On calcule

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln^2 x} = \frac{0^+}{+\infty} = 0^+ \qquad (\dagger)$$

  Dès lors, le graphique de f ne présente pas d'asymptote verticale mais on constate que f admet un prolongement continu en $x = 0$.

- On a aussi

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x}{\ln^2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

  Dès lors, le graphique de f présente une asymptote verticale en $x = 1$.

- On calcule ensuite

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln^2 x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

  On a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(x)'}{(\ln^2 x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

  et

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(x)'}{(2\ln x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

  de sorte que, par ces deux applications successives du théorème de l'Hospital,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

  Dès lors, le graphique de f ne présente pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

  Recherchant finalement une éventuelle asymptote oblique en $+\infty$, on calcule

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln^2 x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

  Ce résultat ne pourrait conduire qu'à une asymptote horizontale dont nous avons déjà démontré l'inexistence.

iv. On calcule

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)' = \frac{\ln^2 x - 2x\ln x \,\dfrac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\ln x - 2}{\ln^3 x}$$

Cette dérivée s'annule uniquement quand $\ln x = 2$, soit en $x = e^2$. La nature de ce point stationnaire peut être étudiée sur base du tableau des variations ci-dessous.

x	0		1		e^2	
$\ln^3 x$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\ln x - 2$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\to 0$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\to 0^+$	$\nearrow$	AV	$\searrow$	min	$\nearrow$

La fonction est croissante à gauche de l'asymptote verticale et décroissante à droite. Elle est aussi décroissante à gauche de e^2 et croissante à droite. Elle y présente donc un minimum avec

$$f(\mathrm{e}^2) = \frac{\mathrm{e}^2}{\ln^2 \mathrm{e}^2} = \frac{\mathrm{e}^2}{4}$$

Pour préciser le comportement de f au voisinage de l'origine, on calcule

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 2}{\ln^3 x} = \frac{\infty}{\infty}$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x - 2)'}{(\ln^3 x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3\ln^2 x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

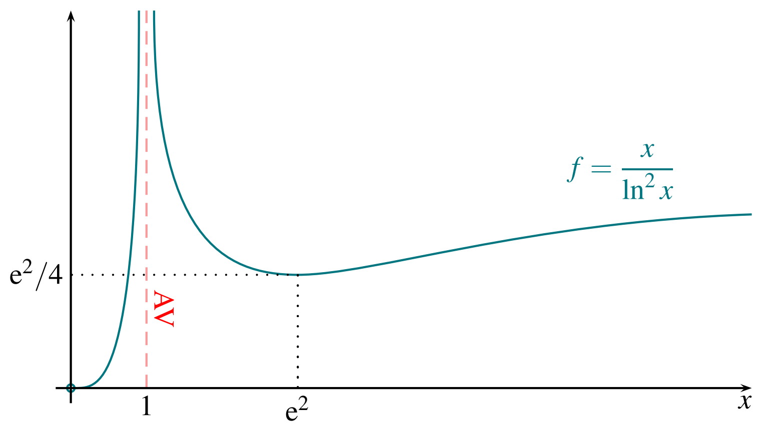
de sorte que, par application du théorème de l'Hospital,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

On constate donc que le prolongement continu identifié à partir de (†) possède une tangente horizontale, *i.e.* que le graphe de f se raccorde horizontalement avec le point $(0,0)$.

v. Le graphique peut alors être tracé en vertu des éléments déterminés ci-dessus.

- Domaine : $]0,1[\cup]1,+\infty[$
- Fonction strictement positive sur tout son domaine.
- Asymptote verticale $x = 1$.
- Prolongement continu en $x = 0$.
- Minimum en $x = \mathrm{e}^2$ avec $f(\mathrm{e}^2) = \mathrm{e}^2/4$.
- Limite de $f' = 0$ en $x = 0$.



vi. Pour que la droite d'équation $y = \beta x$ soit tangente au graphique de f en $\tilde{x}$, il faut remplir deux conditions. Il faut d'abord que le graphe de f et la droite $y = \beta x$ aient un point commun, soit

$$\beta\tilde{x} = f(\tilde{x})$$

Il faut ensuite que la droite soit tangente au graphe en ce point, soit

$$\beta = f'(\tilde{x})$$

Ces deux conditions s'écrivent respectivement

$$\beta\tilde{x} = \frac{\tilde{x}}{\ln^2 \tilde{x}} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\ln\tilde{x} - 2}{\ln^3 \tilde{x}}$$

La première équation ci-dessus donne $\tilde{x} = 0$, qui doit être rejeté puisqu'il n'appartient pas au domaine de f, et $\beta = 1/\ln^2 \tilde{x}$. Par substitution dans la seconde, nous obtenons

$$\frac{1}{\ln^2 \tilde{x}} = \frac{\ln\tilde{x} - 2}{\ln^3 \tilde{x}}$$

soit

$$\ln\tilde{x} = \ln\tilde{x} - 2$$

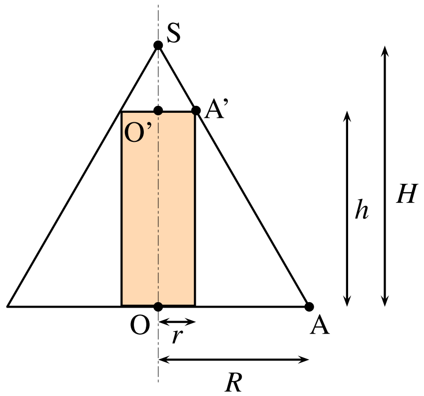
qui n'a pas de solution.

Nous en concluons qu'aucune droite passant par l'origine n'est tangente au graphique de la fonction f.

Question II

Le volume d'un cylindre de circulaire droit de rayon r et de hauteur h vaut $V = \pi r^2 h$.

Dans tout plan vertical comprenant l'axe de symétrie commun au cône et au cylindre, on a



Dans les triangles semblables O'SA' et OSA, on peut écrire

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{R}{H}(H-h)$$

Le volume du cylindre peut alors être exprimé au moyen d'une seule variable sous la forme

$$V(h) = \pi\frac{R^2}{H^2}(H-h)^2 h = \pi\frac{R^2}{H^2}(H^2h - 2Hh^2 + h^3) \quad \text{où} \quad h \in [0, H]$$

Pour identifier le maximum de cette fonction, on calcule

$$V'(h) = \pi\frac{R^2}{H^2}(3h^2 - 4Hh + H^2)$$

qui s'annule quand

$$h = \frac{4H \pm \sqrt{16H^2 - 12H^2}}{6} = \frac{2H \pm H}{3}$$

La fonction V possède donc 2 points stationnaires appartenant à $[0, H]$. Le point $h = H$ donne un volume nul qui ne correspond pas au maximum recherché. Le point stationnaire $h = H/3$ correspond bien au volume maximum puisque, comme le montre l'étude du signe de V', V est croissante à gauche de $H/3$ et décroissante à droite :

h	0		$H/3$		H
V'	$+$	$+$	0	$-$	0
V	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0

En conclusion, le volume maximum du cylindre inscrit dans le cône est égal à

$$V\left(\frac{H}{3}\right) = \pi\frac{R^2}{H^2}\left(H - \frac{H}{3}\right)^2\frac{H}{3} = \pi\frac{R^2}{H^2}\left(\frac{2H}{3}\right)^2\frac{H}{3} = \frac{4\pi R^2 H}{27}$$

Question III

La profondeur de pénétration est donnée par

$$z(t) = \alpha\int_0^t\left(s\,\mathrm{e}^{-s/\tau} + \frac{\tau^4 s}{(s^2+\tau^2)^2}\right)ds = \alpha\int_0^t s\,\mathrm{e}^{-s/\tau}\,ds + \alpha\tau^4\int_0^t \frac{s}{(s^2+\tau^2)^2}ds$$

La première intégrale de la somme ci-dessus se calcule par application de la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b fg'ds = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f'g\,ds$$

avec $a = 0$, $b = t$ et

$$\begin{cases} f = s \\ g' = \mathrm{e}^{-s/\tau} \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = 1 \\ g = -\tau\,\mathrm{e}^{-s/\tau} \end{cases}$$

Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^t s\,\mathrm{e}^{-s}\,ds &= \Big[-\tau s\,\mathrm{e}^{-s/\tau}\Big]_0^t + \int_0^t \tau\,\mathrm{e}^{-s/\tau}ds \\ &= -\tau t\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - \tau^2\Big[\mathrm{e}^{-s/\tau}\Big]_0^t \\ &= \tau^2 - \mathrm{e}^{-t/\tau}(\tau t + \tau^2)\end{aligned}$$

Pour la seconde, en posant $s^2 + \tau^2 = u$, $2s\,ds = du$, $s = 0 \to u = \tau^2$, $s = t \to u = t^2 + \tau^2$, on peut transformer l'intégrale en

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{s}{(s^2+\tau^2)^2}ds &= \int_{\tau^2}^{t^2+\tau^2}\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{u}\right]_{\tau^2}^{t^2+\tau^2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2+\tau^2} - \frac{1}{\tau^2}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{\tau^2 - t^2 - \tau^2}{\tau^2(t^2+\tau^2)} = \frac{t^2}{2\tau^2(t^2+\tau^2)}\end{aligned}$$

Finalement,

$$z(t) = \alpha\tau^2 - \alpha\tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau}(t+\tau) + \alpha\tau^2\frac{t^2}{2(t^2+\tau^2)}$$

Prof. Éric J.M.DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Juillet 2023

Durée de l'épreuve : 2 heures et demie.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

i. Déterminez le domaine de définition de f.
ii. Déterminez les éventuels zéros de f.
iii. Déterminez les éventuelles asymptotes de son graphe.
iv. Étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema.
v. Esquissez le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.
vi. Déterminez la(les) valeur(s) de β pour que la droite d'équation $y = \beta x$ soit tangente au graphique de f.

Question II

Évaluez chacune des expressions suivantes :

i. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+3x}\, dx$
ii. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x^3}\, dx$
iii. $\displaystyle\int \cos^2 x\, dx$
iv. $\displaystyle\int e^x \cos x\, dx$

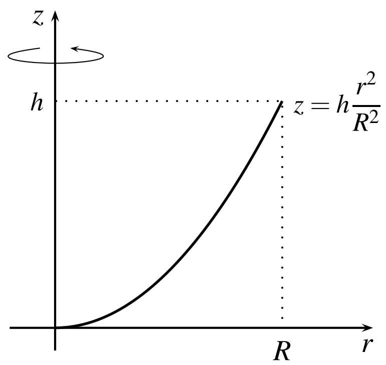
Question III

On considère une cuve dont la surface est générée par la rotation autour d'un axe vertical de la courbe d'équation

$$z = h\frac{r^2}{R^2}$$

où h est la hauteur de la cuve et R le rayon de la surface libre (voir figure ci-contre).

Déterminez le volume de cette cuve.



SOLUTION TYPE

Avertissement : Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Le choix de la méthode est libre pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.

Question I

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

i. L'argument de la fonction ln doit être strictement positif et le dénominateur de la fraction définissant f différent de zéro de sorte que $\mathrm{dom}\,\mathrm{f} = \mathbb{R}_0^+$.

ii. La fonction f s'annule quand $\ln x = 0$. Son seul zéro est donc $x = 1$.

iii. • On calcule

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

Dès lors, le graphique de f présente une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

• On calcule ensuite

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

On a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln^2 x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\ln x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

et

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(2\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

de sorte que, par ces deux applications successives du théorème de l'Hospital,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

Dès lors, le graphique de f présente une asymptote horizontale $y = 0$ approchée par le dessus (puisque $f \geq 0$) en $+\infty$.

iv. On calcule

$$f'(x) = \left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)' = \frac{2\ln x \frac{1}{x} x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}(2 - \ln x)$$

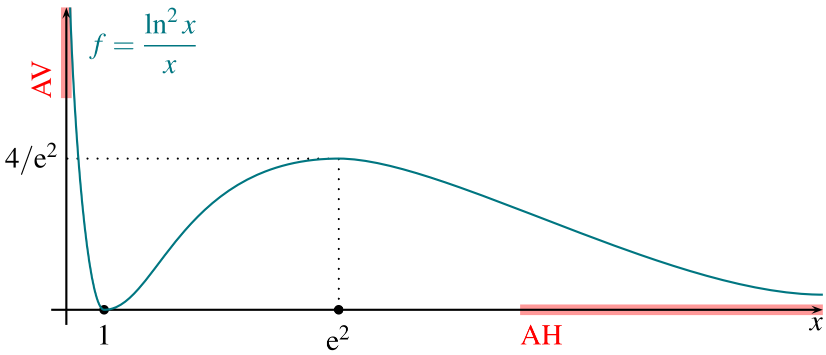
Cette dérivée s'annule quand $\ln x = 0$, c'est-à-dire $x = 1$, et $\ln x = 2$, c'est-à-dire $x = \mathrm{e}^2$. Il y a donc deux points stationnaires dont nous pouvons déterminer la nature à partir du tableau des variations suivant.

x	0		1		e^2	
$\ln x$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2-\ln x$	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nexists$	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

La fonction est décroissante à gauche de $x = 1$ et croissante à droite. Elle y présente donc un minimum avec $f(1) = 0$. Elle est ensuite croissante à gauche de $x = \mathrm{e}^2$ et décroissante à droite, de sorte qu'il y a un maximum en ce point avec $f(\mathrm{e}^2) = 4/\mathrm{e}^2$.

v. Le graphique peut alors être tracé en vertu des éléments déterminés ci-dessus.

- Domaine : $\mathbb{R}_0^+$
- Asymptote verticale $x = 0$.
- Asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ approchée par le dessus.
- Minimum en $x = 1$ avec $f(1) = 0$.
- Maximum en $x = \mathrm{e}^2$ avec $f(\mathrm{e}^2) = 4/\mathrm{e}^2$.



vi. Pour que la droite d'équation $y = \beta x$ soit tangente au graphique de f en $\tilde{x}$, il faut remplir deux conditions. Il faut d'abord que le graphe de f et la droite $y = \beta x$ aient un point commun, soit

$$\beta\tilde{x} = f(\tilde{x})$$

Il faut ensuite que la droite soit tangente au graphe en ce point, soit

$$\beta = f'(\tilde{x})$$

Ces deux conditions s'écrivent respectivement

$$\beta\tilde{x} = \frac{\ln^2\tilde{x}}{\tilde{x}} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\ln\tilde{x}}{\tilde{x}^2}(2 - \ln\tilde{x})$$

La première équation ci-dessus donne

$$\beta = \frac{\ln^2\tilde{x}}{\tilde{x}^2}$$

et, par substitution dans la seconde, nous obtenons

$$\frac{\ln^2\tilde{x}}{\tilde{x}^2} = \frac{\ln\tilde{x}}{\tilde{x}^2}(2 - \ln\tilde{x}) = 2\frac{\ln\tilde{x}}{\tilde{x}^2} - \frac{\ln^2\tilde{x}}{\tilde{x}^2}$$

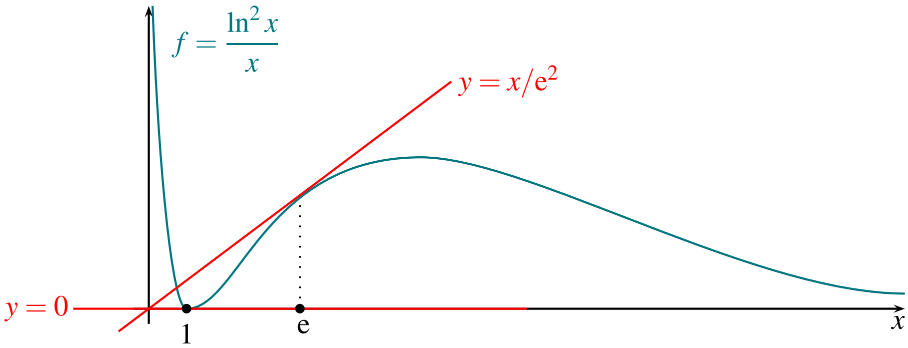
soit, puisque $\tilde{x} \neq 0$ dans dom f,

$$\ln\tilde{x}(\ln\tilde{x} - 1) = 0$$

Il y a donc 2 solutions.

- $\ln\tilde{x} = 1$, $\tilde{x} = \mathrm{e}$ et $\beta = 1/\mathrm{e}^2$ de sorte que la droite d'équation $y = x/\mathrm{e}^2$ est tangente au graphique de f au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.

- $\ln\tilde{x} = 0$, $\tilde{x} = 1$ et $\beta = 0$ de sorte que la droite d'équation $y = 0$ est tangente au graphique de f au point d'abscisse $x = 1$ où f présente son minimum.



Question II

i. On a
$$\int_0^1 \sqrt{1+3x}\,dx = \left[\frac{1}{3}\frac{2}{3}(1+3x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}(8-1) = \frac{14}{9}$$

ii. Soit à calculer
$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{-x^3}\,dx$$
En posant $x^3 = t$, $3x^2\,dx = dt$, $x = 0 \to t = 0$, $x = 1 \to t = 1$, on peut transformer l'intégrale en
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{3}\,dt = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

iii. On a
$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \mathrm{C}$$
où C désigne une constante arbitraire.

iv. Soit à calculer
$$\int \mathrm{e}^x \cos x\,dx$$
Par application de la formule de primitivation par parties
$$\int f g'\,dx = fg - \int f' g\,dx$$
avec
$$\begin{cases} f = \cos x \\ g' = \mathrm{e}^x \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = -\sin x \\ g = \mathrm{e}^x \end{cases}$$
on obtient
$$\int \mathrm{e}^x \cos x\,dx = \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x\,dx \tag{†}$$
Une nouvelle application de la formule de primitivation par parties avec
$$\begin{cases} f = \sin x \\ g' = \mathrm{e}^x \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = \cos x \\ g = \mathrm{e}^x \end{cases}$$
donne
$$\int \mathrm{e}^x \sin x\,dx = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x\,dx \tag{‡}$$

Rassemblant les résultats (†) et (‡), on obtient

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

soit

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x + \tilde{C}$$

où $\tilde{C}$ désigne une constante arbitraire. Finalement, on obtient donc

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$$

où $C = \tilde{C}/2$ désigne une constante arbitraire.

De façon alternative, on peut utiliser

$$\cos x = \Re(\cos x + i \sin x) = \Re(e^{ix})$$

de sorte que

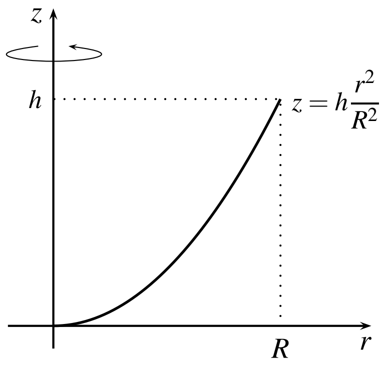
$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx = \int e^x \Re(e^{ix}) \, dx &= \Re\left(\int e^{(1+i)x} \, dx \right) \\ &= \Re\left(\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} + \tilde{\mathrm{C}} \right) \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathrm{C}}$ désigne une constante arbitraire

$$\begin{aligned} &= \Re\left(\frac{1-i}{2} e^x [\cos x + i \sin x] \right) + \mathrm{C} \\ &= \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + \mathrm{C} \end{aligned}$$

où $\mathrm{C} = \Re(\tilde{\mathrm{C}})$ désigne une constante réelle arbitraire.

Question III



Le volume engendré par la rotation de la courbe $z = hr^2/R^2$ autour de l'axe OZ s'exprime par

$$V = \pi \int_0^h r^2(z)\, dz$$

où $r^2(z) = R^2 z/h$, soit

$$V = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h} z\, dz = \frac{\pi R^2}{h} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h = \frac{\pi R^2}{h}\frac{h^2}{2} = \frac{\pi R^2 h}{2}$$