LIÈGE université
Prof. Émilie CHARLIER
Prof. Pierre SACRÉ

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ALGÈBRE

Août 2023

Consignes importantes

Cette épreuve comporte 3 questions et dure 2 heures 30 minutes. Cette épreuve se déroule à livre fermé. Aucun ordinateur, téléphone portable ou calculatrice n'est autorisé.

Sauf indication contraire, justifiez vos réponses en montrant vos développements. Les réponses doivent être exactes, à moins qu'une approximation ne soit demandée, et entièrement simplifiées sauf indication contraire. Essayez de vérifier si vos réponses ont du sens.

Répondez directement sous les questions. Les verso et la dernière page peuvent être utilisés comme brouillon ou comme espace supplémentaire pour répondre aux questions. Si vous souhaitez que le travail effectué dans ces espaces supplémentaires soit corrigé, indiquez où chercher **en gros caractères** dans l'espace initialement prévu pour la réponse.

Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, veuillez les demander aux surveillants qui vous en fourniront. Les pages supplémentaires seront numérotées et ajoutées après la dernière page.

Inscrivez votre nom, prénom et numéro d'ordre sur la première page et seulement votre numéro d'ordre sur les autres pages.

A la fin de l'épreuve, rendez **toutes (5) les pages** du questionnaire **triées dans l'ordre indiqué en bas de page**.

Bonne chance !

Prénom et nom (en MAJUSCULES). N'écrivez pas en dehors du cadre.

Numéro d'ordre. N'écrivez pas en dehors du cadre.

Numéro d'ordre : ____________

Question 1
Vos réponses finales aux sous-questions ci-dessous doivent tenir uniquement dans les cadres indiqués. Ne fournissez aucune justification à vos réponses pour ces sous-questions.

(a) Combien de nombres à 5 chiffres sont divisibles par 5 ?

(*Remarque* : La présence de "zéros non significatifs" ne compte pas dans le nombre de chiffres. Ainsi, par exemple, 01234 est un nombre à 4 chiffres. De plus, vous pouvez utiliser un chiffre plus d'une fois.)

Réponse : $\boxed{18000}$

(b) Déterminer le mode, la médiane et la moyenne de cet échantillon :

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 9.$$

Réponse : mode : $\boxed{2}$ médiane : $\boxed{3}$ moyenne : $\boxed{4}$

(c) Donner le module et l'argument de $-\sqrt{3}+i$.

Réponse : module : $\boxed{2}$ argument : $\boxed{\frac{5\pi}{6}}$

(d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{5+2x}{4x+1} \leq 0.$$

Réponse : $\boxed{x \in \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right[}$

(e) Si le premier terme d'une suite arithmétique est 5 et que la raison est 3, quel est le dixième terme de la suite ?

Réponse : $\boxed{32}$

Numéro d'ordre : ____________

Question 2
Pour quelles valeurs des paramètres réels p et q le polynôme

$$x^2 + px + q$$

admet-il deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 = 2x_2$ et $x_1^2 + x_2^2 = 45$? Déterminer ces racines x_1 et x_2.

Solution. En substituant $x_1 = 2x_2$ dans $x_1^2 + x_2^2 = 45$, nous avons

$$4x_2^2 + x_2^2 = 45 \iff x_2^2 = 9.$$

Les racines (x_1, x_2) peuvent donc prendre les valeurs suivantes

$$(-6, -3) \quad \text{ou} \quad (6, 3).$$

Puisque $p = -(x_1 + x_2)$ et $q = x_1 x_2$, on obtient les valeurs correspondantes des paramètres $p = -9,\ q = 18$ et $p = 9,\ q = 18$ respectivement.

Numéro d'ordre : ____________

Question 3

(a) Développer $(A+B)^3$ comme une expression dépendant uniquement de A^3, B^3, AB et $A+B$.

Solution. Par le binôme de Newton, nous avons

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= A^3+B^3+3A^2B+3AB^2\\ &= A^3+B^3+3AB(A+B).\end{aligned}$$

(b) Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$

$$\sqrt[3]{x+3}-1=-\sqrt[3]{4-x}.$$

Solution. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x+3}-1=-\sqrt[3]{4-x} &\iff \sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{4-x}=1\\ &\iff (\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{4-x})^3=1\\ &\iff x+3+4-x+3\sqrt[3]{(x+3)(4-x)}(\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{4-x})=1\\ &\iff \sqrt[3]{(x+3)(4-x)}=-2\\ &\iff (x+3)(4-x)=-8\\ &\iff x^2-x-20=0,\end{aligned}$$

où à la quatrième étape, nous avons utilisé que $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{4-x}=1$ pour simplifier. On s'est donc ramené à résoudre une équation du second degré, qui a pour solutions $x=-4$ et $x=5$.

Numéro d'ordre : ______________

Page supplémentaire. Veillez à préciser la/les questions auxquelles cette page se rapporte.

Prof. Émilie CHARLIER
Prof. Pierre SACRÉ

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ALGÈBRE

Juillet 2023

Consignes importantes

Cette épreuve comporte 3 questions et dure 2 heures 30 minutes. Cette épreuve se déroule à livre fermé. Aucun ordinateur, téléphone portable ou calculatrice n'est autorisé.

Sauf indication contraire, justifiez vos réponses en montrant vos développements. Les réponses doivent être exactes, à moins qu'une approximation ne soit demandée, et entièrement simplifiées sauf indication contraire. Essayez de vérifier si vos réponses ont du sens.

Répondez directement sous la question. La dernière page et les pages verso peuvent être utilisées comme brouillon ou comme espace supplémentaire pour répondre aux questions. Si vous souhaitez que le travail effectué dans ces espaces supplémentaires soit corrigé, indiquez où chercher **en gros caractères** dans l'espace initialement prévu pour la réponse.

Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, veuillez les demander aux surveillants qui vous en fourniront. Les pages supplémentaires seront numérotées et ajoutées après la dernière page.

Inscrivez votre nom, prénom et numéro d'ordre sur la première page et seulement votre numéro d'ordre sur les autres pages. A la fin de l'épreuve, **vos feuilles doivent être triées dans l'ordre initial**.

Bonne chance !

Prénom et nom (en MAJUSCULES). N'écrivez pas en dehors du cadre.

Numéro d'ordre. N'écrivez pas en dehors du cadre.

Numéro d'ordre : ____________

Question 1

Vos réponses finales aux sous-questions ci-dessous doivent tenir uniquement dans les cadres indiqués. Ne fournissez aucune justification à vos réponses pour ces sous-questions.

(a) Calculer le quotient et le reste de la division de x^6+2x^4+6x-9 par x^3+3 ?

Réponse : quotient : $\boxed{x^3+2x-3}$ reste : $\boxed{0}$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x(2x-14) \geq 24$.

Réponse : $\boxed{x \in [3,4]}$

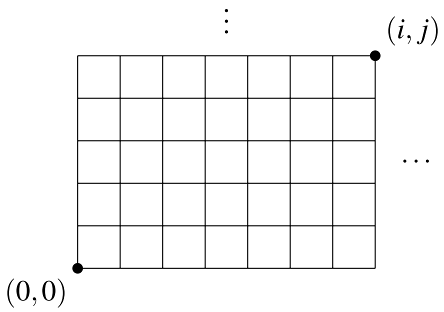
(c) Donner la partie réelle et la partie imaginaire de $\dfrac{3-i}{2+7i}$.

Réponse : partie réelle : $\boxed{-\frac{1}{53}}$ partie imaginaire : $\boxed{-\frac{23}{53}}$

(d) Le Chevalier de Méré, qui était un noble de la cour de Louis XIV et un grand joueur, aimait parier sur l'apparition d'un "6" lors de lancers successifs d'un dé. Quelle est la probabilité, exprimée en fonction de n, qu'il obtienne au moins un "6" en n lancers d'un dé équitable à six faces ?

Réponse : $\boxed{1-\frac{5^n}{6^n}}$

(e) Supposons qu'une grille de rue commence à la position $(0,0)$ et s'étende vers le nord et l'est.



L'itinéraire le plus court empruntant ces rues à partir du point $(0,0)$ jusqu'au point (i,j) est long de $i+j$ blocs, allant de i blocs à l'est et de j blocs au nord. Combien y a-t-il d'itinéraires de ce type ?

Réponse : $\boxed{C_{i+j}^{i} = C_{i+j}^{j} = \frac{(i+j)!}{i!j!}}$

Question 2
Les nombres de Fibonacci sont définis par les relations :

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ pour tout entier } n \geq 0.$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a $-f_{n+1}^2 + f_{n+1}f_n + f_n^2 = (-1)^{n+1}$.

Solution. On procède par récurrence sur n.

Cas de base. Pour $n = 0$, nous avons $-f_1^2 + f_1 f_0 + f_0^2 = -1^2 + 1 \cdot 0 + 0^2 = -1$ et $(-1)^1 = -1$.

Hérédité. Soit $n \geq 0$ et supposons avoir l'égalité $-f_{n+1}^2 + f_{n+1}f_n + f_n^2 = (-1)^{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+2} &= (-1) \cdot (-1)^{n+1} \\
&= (-1) \cdot \left(-f_{n+1}^2 + f_{n+1}f_n + f_n^2\right) \\
&= (-1) \cdot \left(-f_{n+1}^2 + f_{n+1}(f_{n+2} - f_{n+1}) + (f_{n+2} - f_{n+1})^2\right) \\
&= (-1) \cdot \left(-f_{n+1}^2 + f_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 - 2f_{n+1}f_{n+2} + f_{n+1}^2\right) \\
&= (-1) \cdot \left(f_{n+2}^2 - f_{n+1}f_{n+2} - f_{n+1}^2\right) \\
&= -f_{n+2}^2 + f_{n+2}f_{n+1} + f_{n+1}^2
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'hypothèse de récurrence pour la deuxième égalité et la définition des nombres de Fibonacci pour la troisième égalité.

Question 3
Soit l'équation suivante dans $\mathbb{C}$

$$|z-|z+i||=(z+1)i+|z+1|,$$

où z est l'inconnue complexe.

(a) Montrer que la partie réelle d'une solution est égale à -1 (sans développer les modules).

Solution. Nous remarquons que

$$\underbrace{|z-|z+i||}_{\in\mathbb{R}}=(z+1)i+\underbrace{|z+1|}_{\in\mathbb{R}}.$$

Nous devons donc avoir $(z+1)i\in\mathbb{R}$ également. Si nous notons $z=a+bi$ avec $a,b\in\mathbb{R}$, nous avons

$$(z+1)i=(a+bi+1)i=-b+(a+1)i\in\mathbb{R}$$

et donc $a=-1$. La solution de l'égalité doit donc s'écrire $z=-1+bi$.

(b) Déterminer le signe de la partie imaginaire d'une solution (sans développer les modules).

Solution. Nous pouvons substituer $z=-1+bi$ dans l'égalité complexe de départ. Nous obtenons

$$|-1+bi-|-1+(b+1)i||=-b+|b|.$$

Si $b>0$, on obtient

$$|-1+bi-|-1+(b+1)i||=0$$

et donc aussi

$$-1+bi-|-1+(b+1)i|=0.$$

En égalant les parties imaginaires de part et d'autre de cette dernière équation, on doit avoir $b=0$, ce qui est impossible puisque nous avons supposé $b>0$. On en conclut que $b\leq 0$.

Solution alternative. Nous pouvons substituer $z=-1+bi$ dans l'égalité complexe de départ. Nous obtenons

$$|-1+bi-|-1+(b+1)i||=-b+|b|.$$

En notant $\Delta=-1+bi-|-1+(b+1)i|$, nous avons $|\Delta|+b=|b|$. En élevant au carré les deux membres de cette égalité (avec $|\Delta|+b\geq 0$ ou $b\geq -|\Delta|$ qui est toujours vérifié), nous avons

$$|\Delta|^2+2b|\Delta|+b^2=b^2$$

et donc

$$\underbrace{|\Delta|^2}_{\geq 0}=-2b\underbrace{|\Delta|}_{\geq 0}.$$

Nous pouvons en conclure que $b\leq 0$.

(c) Résoudre l'équation $|z-|z+i|| = (z+1)i + |z+1|$ dans $\mathbb{C}$.

Solution. En substituant $z = -1+bi$ dans l'égalité complexe de départ et en utilisant $b \leq 0$, nous avons

$$|-1+bi-|-1+(b+1)i|| = -2b.$$

En développant les modules du membre de gauche, nous avons

$$\sqrt{\left(1+\sqrt{1+(b+1)^2}\right)^2 + b^2} = -2b.$$

En élevant au carré les deux membres (positifs) de cette égalité et en simplifiant, nous avons

$$(1+\sqrt{1+(b+1)^2})^2 + b^2 = 4b^2$$

et donc

$$\left(1+\sqrt{1+(b+1)^2}\right)^2 = 3b^2.$$

En prenant la racine carrée des deux membres de cette égalité (et en se rappelant que nous avons montré que $b \leq 0$), nous avons

$$1+\sqrt{1+(b+1)^2} = -\sqrt{3}b$$

et donc

$$\sqrt{1+(b+1)^2} = -\sqrt{3}b - 1.$$

De cette dernière équation, on tire qu'on doit avoir $-\sqrt{3}b - 1 \geq 0$, c'est-à-dire $b \leq -1/\sqrt{3}$. Finalement, en élevant au carré une nouvelle fois les deux membres de cette égalité (avec $b \leq -1/\sqrt{3}$), nous avons

$$1+(b+1)^2 = (-\sqrt{3}b-1)^2$$

ce qui se simplifie en

$$b^2 + (\sqrt{3}-1)b - \frac{1}{2} = 0.$$

Les deux solutions de cette équation quadratique sont

$$b = \frac{-(\sqrt{3}-1) \pm \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+2}}{2} = \frac{-(\sqrt{3}-1) \pm \sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2},$$

où seule la solution $b = \frac{-(\sqrt{3}-1)-\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}$ respecte la condition à $b \leq -1/\sqrt{3}$ (l'autre solution est positive).

La seule solution de l'équation complexe donnée est donc

$$z = -1 - \frac{(\sqrt{3}-1)+\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}i.$$

Numéro d’ordre : ______________

Page supplémentaire. Veillez à préciser la/les questions auxquelles cette page se rapporte.