Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Septembre 2023

Consignes

- NOM (en MAJUSCULES), prénom (en minuscules) et numéro d'ordre sur chaque feuille dans les emplacements prévus.
- Contrôlez soigneusement que vous avez bien les 5 pages.
- Répondez directement sous la question.
- Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, veuillez les demander aux surveillants qui vous en fourniront. Les pages supplémentaires seront ajoutées après la dernière page et numérotées.
- Les pages verso peuvent être utilisées comme brouillon ; elles ne **seront pas corrigées !**
- Spécifier les conditions d'existence.
- GSM, smartphones et tablettes interdits MAIS il est permis d'utiliser une calculette.
- Préparer une pièce d'identité sur la table.
- Fin de l'examen à 12 heures.

Question 1 *Trouver toutes les solutions réelles de*

$$\tan x - \tan 3x = 2$$

Solution :

Conditions d'existence : On doit s'asurer que $\cos x \neq 0$ et que $\cos(3x) \neq 0$. Les conditions sur $\cos(3x)$ sont les plus restrictives et nous donnent $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

On utilise la définition de la tangente pour transformer l'équation de départ en

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = 2$$

En mettant tout au même dénominateur, on obtient

$$\frac{\sin x \cos(3x) - \sin(3x) \cos x}{\cos x \cos(3x)} = 2. \tag{1}$$

On constate que le numérateur de (1) correspond à une formule de soustraction du sinus. On peut donc la transformer en

$$\frac{\sin(x - 3x)}{\cos x \cos(3x)} = 2$$
$$\frac{\sin(-2x)}{\cos x \cos(3x)} = 2$$

En utilisant la formule du sinus de l'angle double au numérateur, on obtient

$$\frac{-2 \sin x \cos x}{\cos x \cos(3x)} = 2.$$

Etant donné les conditions d'existence, nous pouvons simplifier les cosinus et obtenir

$$\frac{-2 \sin x}{\cos(3x)} = 2$$
$$-\sin x = \cos(3x).$$

On peut remplacer $-\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$ et écrire

$$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(3x).$$

En égalisant les cosinus, on trouve les familles de solutions
- $\frac{\pi}{2} + x = 3x + 2k\pi$ c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\frac{\pi}{2} + x = -3x + 2k\pi$ c'est-à-dire $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Toutes ces solutions vérifient les conditions d'existence.

Question 2 *Considérons trois cercles de même rayon r tangents deux à deux comme sur la figure 1. Démontrer que l'aire de la surface déterminée par la boucle entourant ces 3 cercles vaut* $\left(\pi + 6 + \sqrt{3}\right) r^2$.

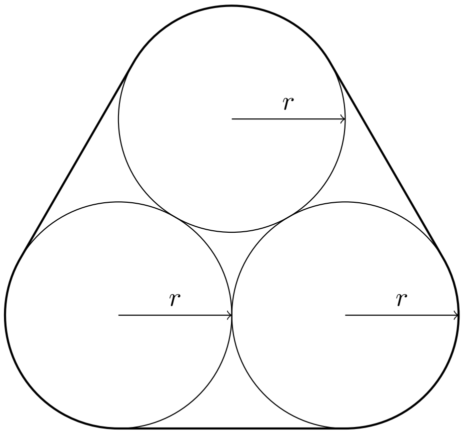


Figure 1 – Question 2

Solution

On trace les rayons perpendiculaires aux points de tangence de la boucle aux trois cercles ainsi que les rayons reliant les centres et on obtient la figure 2.

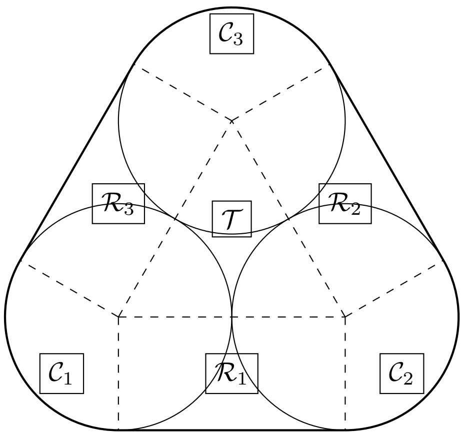


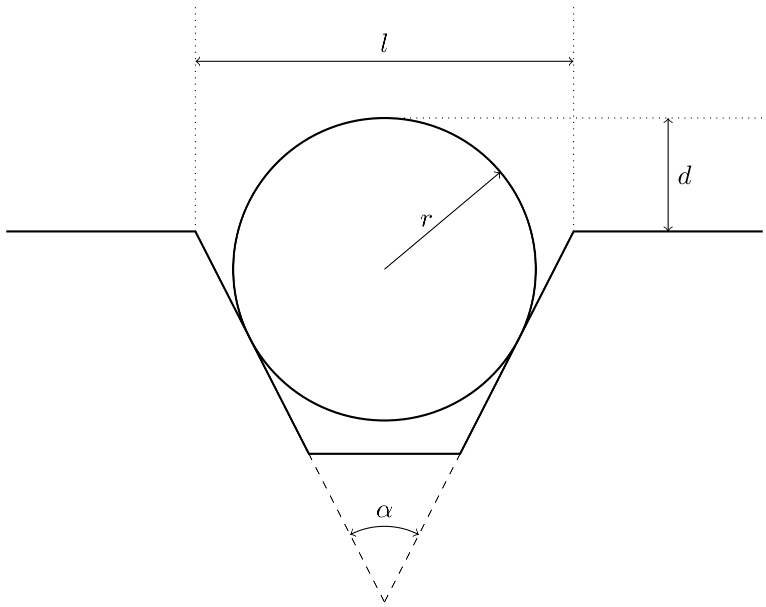
Figure 2 – Construction pour la résolution de la question 2

Par construction, on divise donc la figure en plusieurs parties : 3 rectangles $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$, un triangle équilatéral $\mathcal{T}$ et trois sections circulaires $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$.

Les rectangles sont isométriques de côtés r et $2r$. Leurs aires respectives sont donc de $2r^2$ soit $6r^2$ pour les trois aires.
Les sections circulaires sont isométriques de rayon r et d'angle 120 degrés. Si on additionne les trois aires des trois sections circulaires, on obtient donc la superficie d'un cercle de rayon r soit πr^2.
Enfin, le triangle équilatéral $\mathcal{T}$ est de côté $2r$ et ses angles sont de 60 degrés. Son aire est donc de $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r \cdot \sin(60) = \sqrt{3}r^2$.

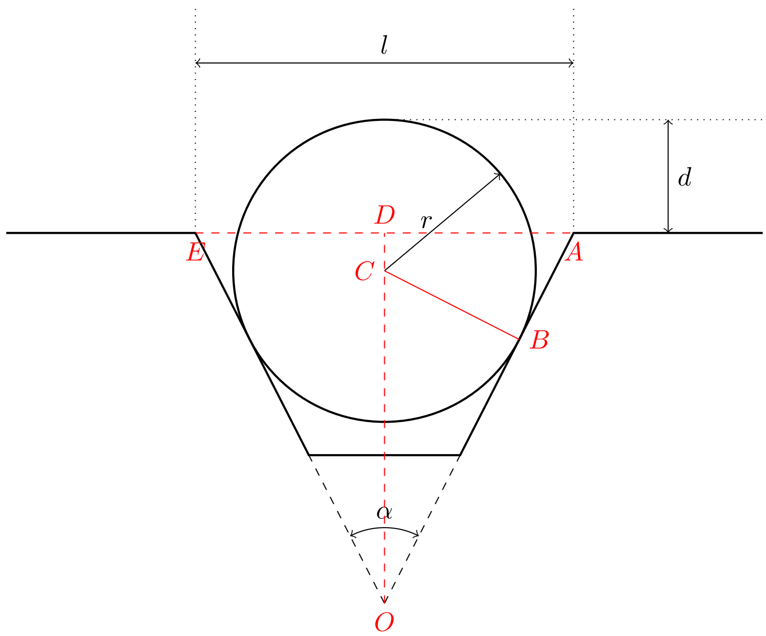
En additionnant toutes ces superficies, on obtient le résultat à démontrer.

Question 3 *Le plan d'une pièce à fabriquer montre une gorge formant un trapèze isocèle dans laquelle une bille de rayon $r = 4\,\mathrm{mm}$ est insérée (les côtés du trapèze sont tangents à la bille aux points de contact). La largeur au sommet de la gorge vaut $l = 10\,\mathrm{mm}$ et le sommet de la bille dépasse de la gorge d'une distance $d = 3\,\mathrm{mm}$. Calculer l'angle d'ouverture α de la gorge.*



Solution a :

Définissons les points O, C et B respectivement au sommet de l'angle d'ouverture α, au centre de la bille et au point de contact. Le niveau supérieur de la gorge de longueur l définit le segment AE dont le milieu D est aligné par symétrie avec le segment OC.



Par construction, les rectangles OBC et ODA sont rectangles respectivement en B et D et nous pouvons écrire :

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{r}{\overline{OD} - (r-d)} \Rightarrow \overline{OD} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r - d$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{OD}} = \frac{l}{2\overline{OD}} \Rightarrow \overline{OD} = \frac{l}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}$$

En soustrayant ces deux équations membre à membre, nous obtenons une équation en $\frac{\alpha}{2}$:

$$\frac{l}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}} - \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = r - d \;\Leftrightarrow\; l\cos\frac{\alpha}{2} - 2r = 2(r-d)\sin\frac{\alpha}{2}$$

Soit en remplaçant par les mesures de r, d et l :

$$-2\sin\frac{\alpha}{2} + 10\cos\frac{\alpha}{2} = 8.$$

Cette équation est du type $a\sin x + b\cos x = c$. En posant $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{b}{a} = -5\,\mathrm{mm}$ ($\theta = -78.7°$), l'équation devient :

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\,\theta\cos\frac{\alpha}{2} = -4 \;\Leftrightarrow\; \cos\theta\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\theta\cos\frac{\alpha}{2} = -4\cos\theta \;\Leftrightarrow\; \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right) = -4\cos\theta$$

Soit : $\alpha = 2\left[\arcsin\left(-4\cos\theta\right) - \theta\right] = 54.06°$ ou $-99.38°$ (à rejeter). Ce qui laisse $\alpha \simeq 54°$.

Solution b :

Alternativement, il est possible de déterminer la longueur du segment AC en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ADC rectangle en D :

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{\frac{l^2}{4} + (r-d)^2} = \sqrt{26}\mathrm{mm},$$

ainsi que l'angle $\widehat{ACD}$ par :

$$\widehat{ACD} = \arctan\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \arctan\frac{l}{2(r-d)} = 78.7°$$

Dans le triangle ABC rectangle en C, il est alors possible d'écrire :

$$\cos\widehat{ACB} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{4}{\sqrt{26}} \;\Rightarrow\; \widehat{ACB} = 38.33°.$$

Les points O, C et D étant alignés et le triangle BCO étant rectangle, nous pouvons écrire respectivement $\widehat{ACD} + \widehat{ACB} + \widehat{BCO} = 180°$ et $\widehat{BCO} + \frac{\alpha}{2} = 90°$, d'où nous concluons :

$$\alpha = 2\left(\widehat{ACD} + \widehat{BCA} - 90°\right) = 54.06° \simeq 54°.$$

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Juillet 2023

Question 1 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique suivante :*

$$2\cos(3x) - 14\cos(2x) + 34\cos(x) - 22 = 0.$$

Solution

L'utilisation successive des formules $\cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x$ et $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ permet d'exprimer les termes en $\cos(3x)$ et $\cos(2x)$ en fonction des puissances de $\cos x$.

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

Par substitution dans l'équation de départ nous obtenons après simplification :

$$8\cos^3 x - 28\cos^2 x + 28\cos x - 8 = 0$$

En posant $y = \cos x$ et en simplifiant par un facteur 4, nous obtenons l'équation polynomiale :

$$2y^3 - 7y^2 + 7y - 2 = 0.$$

Le membre de gauche est alors factorisé en notant que $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$:

$$2(y^3 - 1) - 7y(y - 1) = 2(y - 1)(y^2 + 1 + y) - 7y(y - 1) = (y - 1)(2y^2 - 5y + 2) = 0$$

Alternativement, il est possible de noter que manifestement $y = 1$ est une solution de l'équation polynomiale et d'effectuer la division polynomiale par $(y - 1)$ pour obtenir le même résultat. Le second facteur du membre de gauche est un polynôme du second degré qui admet les solutions :

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'équation polynomiale factorisée s'écrit alors :

$$(y - 1)(y - 2)(y - \frac{1}{2}) = 0$$

et possède les 3 solutions $y_1 = 1$, $y_2 = 1/2$ et $y_3 = 2$. Les solutions de l'équation de départ sont donc :
- $\cos x = 1$ soit $x = 2k\pi\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = 1/2$ soit $x = \pm\pi/3 + 2k\pi\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = 2$ à rejeter car $\cos x \leq 1$.

Question 2 *En vous basant sur les valeurs de sinus, cosinus et tangente des angles remarquables* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ *évaluer sans calculatrice l'expression* $\tan \dfrac{7\pi}{12}$.

Solution

Notons que l'angle $\frac{7\pi}{12}$ peut être décomposé en la somme de deux angles remarquables :

$$\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Ensuite, en appliquant la formule d'addition $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$, il vient :

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}}$$

En remplaçant par les valeurs des angles remarquables $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ et $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, nous obtenons :

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = -2 - \sqrt{3}$$

Alternativement il est possible d'utiliser la même décomposition de l'angle $7\pi/12$ mais en exprimant :

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \frac{\sin \frac{7\pi}{12}}{\cos \frac{7\pi}{12}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}}$$

En remplaçant par les valeurs des angles remarquables $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, nous obtenons :

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = -2 - \sqrt{3}$$

A noter qu'il est aussi possible d'adopter la décomposition :

$$\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}.$$

Dans ce cas, la formule de la tangente de la somme des angles n'est pas applicable ($\tan \pi/2 \to \infty$) et il vient :

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}}{-\sin \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}}$$

En multipliant haut et bas par $\sin \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}$ et en utilisant les formules des cosinus et sinus du double de l'angle, nous avons :

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \frac{\frac{1}{2}\sin \frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{6} - 1\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 2} = -2 - \sqrt{3}.$$

Question 3 *Une ligne de tram parfaitement rectiligne relie deux arrêts A et B. On désire étudier la liaison de l'arrêt A à un troisième arrêt C situé dans le même plan horizontal que A et B en empruntant la ligne AB existante et en effectuant un virage à $75°$ en arc de cercle d'un rayon de $2\,\mathrm{km}$ pour ensuite rejoindre l'arrêt C en ligne droite. L'arc de cercle est tangent aux deux tronçons rectilignes aux points D et E comme représenté à la Figure 1 ci-dessous. Les distances à vol d'oiseau entre les différents arrêts sont $\overline{AB} = 13\,\mathrm{km}$, $\overline{AC} = 10\,\mathrm{km}$ et $\overline{BC} = 5\,\mathrm{km}$. Calculer la longueur totale du trajet $ADEC$ reliant les arrêts A et C par cette nouvelle ligne.*

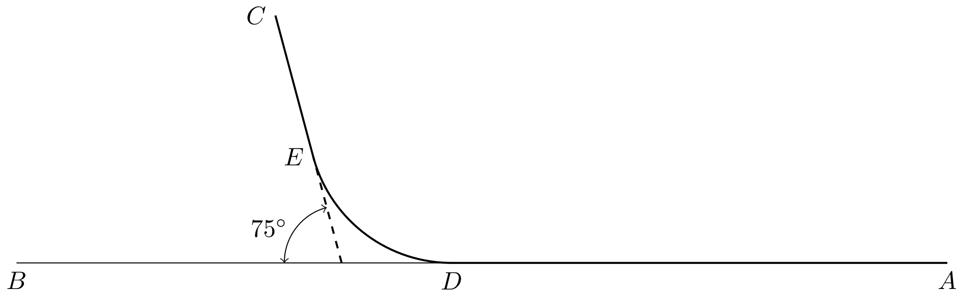


FIGURE 1 – Représentation de la ligne de tram existante et de la nouvelle ligne avec les arrêts.

Solution
Commençons par noter sur le schéma les différentes données et définissons respectivement le point O intersection du prolongement du segment CE avec AB et le point P, centre de l'arc de cercle. Les segments PD et PE sont, en conséquence, perpendiculaires respectivement aux segments AB et CO.

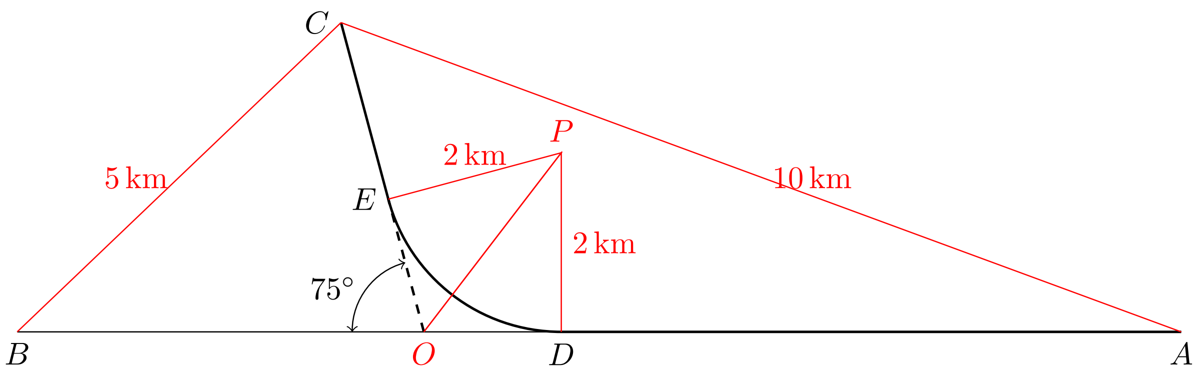


FIGURE 2 – Représentation de la ligne de tram existante et de la nouvelle ligne avec les arrêts.

L'application d'Al-Kashi dans le triangle ABC donne :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \widehat{CAB} \;\Rightarrow\; \widehat{CAB} = 20.21°$$

L'angle complémentaire $\widehat{AOC} = 180° - \widehat{BOC} = 105.00°$ permet de connaître $\widehat{ACO} = 180° - \widehat{AOC} - \widehat{CAB} = 54.79°$ (par la sommation des angles d'un triangle). Par application de la règle des sinus dans le triangle COA nous pouvons alors déterminer la longueur des côtés CO et AO :

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \widehat{AOC}} = \frac{\overline{CO}}{\sin \widehat{CAB}} = \frac{\overline{AO}}{\sin \widehat{ACO}} \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \overline{CO} = 3.58\,\mathrm{km} \\ \overline{AO} = 8.46\,\mathrm{km} \end{array} \right.$$

La détermination de la longueur des segments CE et AD se fait en notant que les triangles rectangles PDO et PEO sont égaux (hypoténuse commune et un côté de même longueur car $\overline{PE} = \overline{PD} = 2\,\mathrm{km}$) :

$$\widehat{OPE} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = 37.50° \;\text{ et }\; \tan \widehat{OPE} = \frac{\overline{OE}}{\overline{PE}}$$

Nous pouvons donc écrire :
$$\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{PE} \tan \widehat{OPE} = 1.53\,\mathrm{km},$$
dont nous déduisons la longueur des segments demandés :
$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \overline{AO} - \overline{OD} = 6.92\,\mathrm{km}\\ \overline{EC} &= \overline{CO} - \overline{OE} = 2.04\,\mathrm{km}\end{aligned}$$
La longueur totale du trajet nécessite la détermination de la longueur de l'arc DE soit :
$$\overline{DE} = \frac{\widehat{EPD} \cdot \pi \cdot \overline{PE}}{180°} \text{ en notant que } \widehat{EPD} = 360° - 2 \cdot 90° - \widehat{AOC},$$
soit $\overline{ADEC} = \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EC} = 6.92 + 2.62 + 2.04 = 11.58\,\mathrm{km}$.