



QUESTIONS POSEES AUX EXAMENS D'ADMISSION

2019 - 2023

EXAMENS DE 2019**JUILLET 2019****ALGEBRE**

1. Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq p \leq n$, on a

$$\sum_{i=0}^p C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 2^p C_n^p \text{ et } \sum_{i=0}^p (-1)^i C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 0.$$

Suggestion : on montrera d'abord que

$$C_n^i C_{n-i}^{p-i} = C_p^i C_n^p$$

pour tous naturels i, p, n tels que $i \leq p \leq n$.

2. On considère l'expression suivante, dans laquelle n est un paramètre entier naturel :

$$\frac{(2 + i\sqrt{12})^7}{(\sqrt{3} - i)^n}.$$

On demande sa valeur, sous forme algébrique et sous forme trigonométrique, quand n vaut 16 et quand n vaut 17.

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + a}$$

où a désigne un paramètre réel supérieur ou égal à 1.

En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a ,

- a) déterminer le domaine de définition de f ;

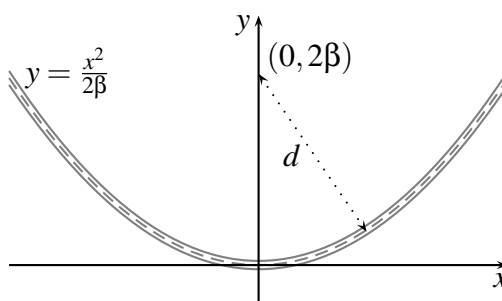
- b) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphique ;
- c) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;
- d) esquisser le graphique de f .

2. Soit

$$\phi_n(x) = \int e^{-x} \cos^n x \, dx \quad \text{et} \quad F_n = \int_0^{\pi/2} e^{-x} \cos^n x \, dx$$

où n désigne un naturel.

- a) Calculer $\phi_0(x)$ et F_0 .
 - b) Calculer $\phi_1(x)$ et F_1 .
 - c) Montrer que $(1 + n^2)F_n = 1 + n(n-1)F_{n-2}$, quel que soit le naturel $n \geq 2$.
3. On désire étudier les nuisances sonores causées par le trafic sur une route dont le tracé est représenté par la courbe d'équation $2\beta y = x^2$ où β désigne un paramètre réel strictement positif (voir figure ci-dessous).
 Dans le cadre de cette étude, on demande de déterminer le point de la route d'abscisse $x > 0$ le plus proche de l'habitation située au point de coordonnées $(0, 2\beta)$ et d'évaluer la distance d entre cette habitation et la route.



TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Montrer que, si la relation suivante liant les mesures des trois angles A , B et C d'un triangle est vérifiée

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$$

alors, A , B ou C vaut 120° .

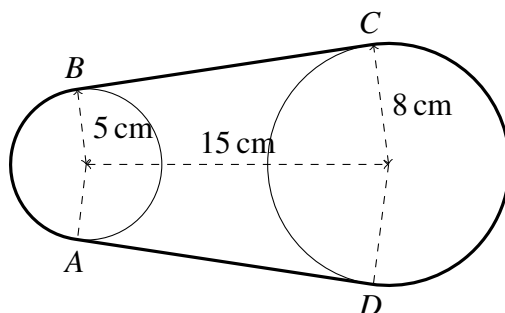
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$4(\sin x + \cos x) - 8 \sin x \cos x = 5$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique. Noter que bien que les solutions trouvées ne soient pas exprimables sous la forme d'angles remarquables, il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique.

Suggestion pour résoudre l'équation : poser $y = \sin x + \cos x$.

3. Deux poulies de rayons respectifs 5 cm et 8 cm sont disposées à 15 cm de distance centre à centre. Calculer la longueur L de la courroie autour de ces poulies. La courroie est représentée en gras sur la figure fournie ci-dessous et les points A , B , C et D représentent les points de tangence de cette courroie avec les poulies.

**GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE**

- On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé et on donne les points P d'abscisse 1, Q d'ordonnée 1 tels que les droites OP et OQ sont perpendiculaires. Déterminer le lieu de la projection orthogonale M de l'origine O sur la droite PQ .
- Soit G le centre de gravité du triangle ABC .
Démontrer que l'on a

$$\frac{\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2}{\|GA\|^2 + \|GB\|^2 + \|GC\|^2} = 3$$

où $\|XY\|$ désigne la longueur du segment joignant le point X au point Y .

SEPTEMBRE 2019**ALGÈBRE**

1. Soit $(F_n)_{n \geq 0}$ la suite de Fibonacci, définie par :

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ et } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 2.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i=0}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, dans laquelle m est un paramètre réel :

$$\frac{1}{x-2} = \frac{2-m}{7x-2x^2-6}.$$

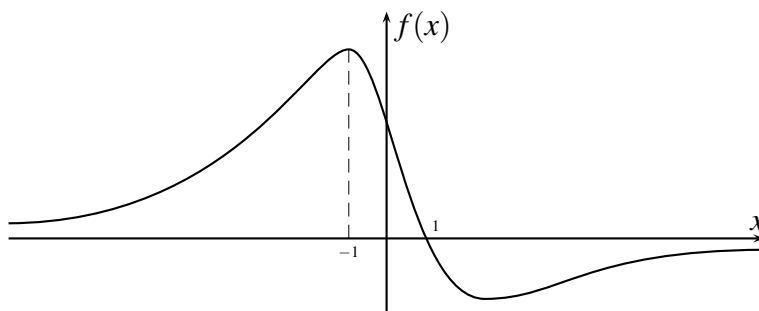
Résoudre ensuite l'inéquation associée, obtenue en remplaçant le symbole “=” par le symbole “ $\leq$ ”.

ANALYSE

1. Déterminer toutes les valeurs des paramètres réels α , β et γ telles que le graphique de

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + \gamma}$$

présente l'allure esquissée ci-dessous. Justifier.



2. a) Calculer $\int \frac{x^3}{1+x^2} dx$.
- b) Calculer $\int_{-\infty}^1 e^x dx$.
- c) Calculer $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx$.
- d) En discutant s'il y a lieu en fonction de $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_1^2 x^n \ln x dx$.
- e) On note $I(x) = \int_x^2 e^{-t^2} dt$. Montrer que $I(\alpha) \geq I(\beta)$ si $\alpha \leq \beta \leq 2$.
-

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x} = \cos x$$

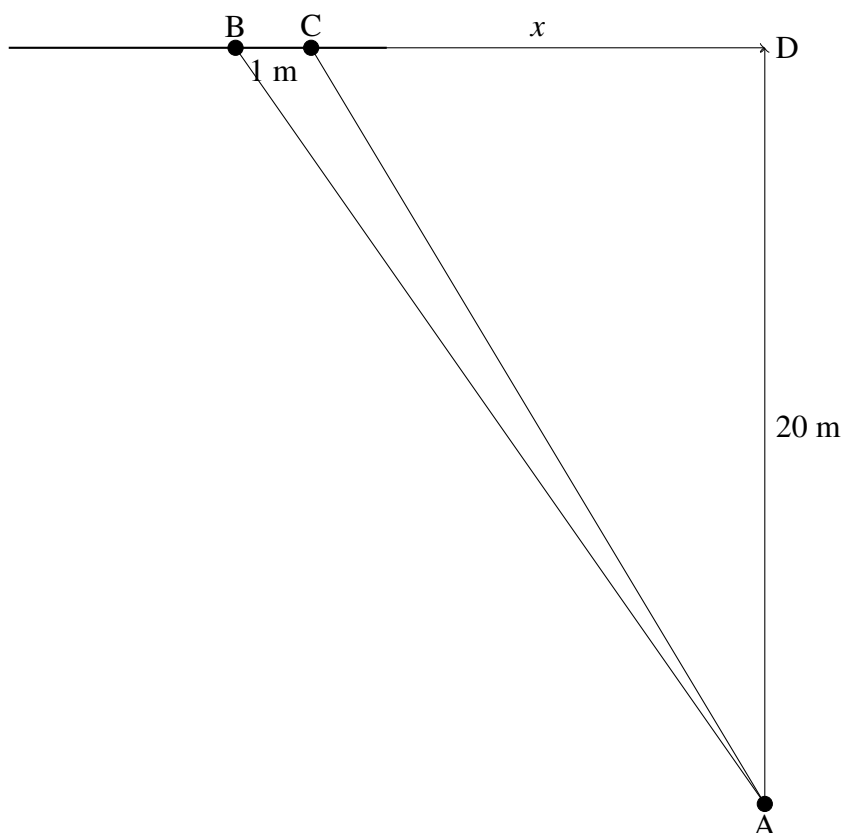
en spécifiant les conditions d'existence et représenter les solutions comprises dans $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Démontrer qu'un triangle est rectangle si la relation

$$\cos B + \cos C = \sin A$$

reliant la mesure de ses angles A, B, C est vérifiée.

3. Lors d'un match de football, un coup franc doit être tiré du point A situé à 10 mètres à droite du poteau du gardien et à 20 mètres dans la profondeur du terrain (voir figure ci-après). On suppose que le gardien occupe une largeur de 1 mètre sur sa ligne de but, entre les points B et C et que le tir s'effectuera en ligne droite en négligeant la présence d'autres joueurs sur le terrain. Déterminer la distance $x = \overline{DC}$ où doit se placer le gardien afin de couper 2 degrés de l'angle de tir de l'attaquant, c'est-à-dire, afin que l'angle $\widehat{BAC}$ vaille 2 degrés.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole $\mathcal{P}$ par son équation cartésienne

$$x^2 = 4y.$$

- Représenter la parabole.
 - Déterminer l'équation cartésienne d'une tangente quelconque à la courbe $\mathcal{P}$.
(Attention : l'équation doit être valable pour n'importe quelle tangente à $\mathcal{P}$.)
 - Déterminer le lieu des points qui sont l'intersection de deux tangentes à $\mathcal{P}$ orthogonales entre elles.
2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d_1 passant par les points A et B respectivement de coordonnées $(1, 2, 3)$ et $(-1, 0, 2)$, et la droite d_2 passant par les points C, D respectivement de coordonnées $(0, 1, 7)$ et $(2, 0, 5)$.

- a) Déterminer l'équation cartésienne du plan Π parallèle à la droite d_1 et contenant la droite d_2 .
 - b) Déterminer des équations paramétriques et des équations cartésiennes de la droite d_3 passant par C et orthogonale à d_1 et d_2 .
-
-

EXAMENS DE 2020

Avertissement

Suite aux mesures sanitaires mises en place dans le cadre de la pandémie "COVID 19", les contenus et les modalités organisationnelles de l'examen ont été adaptés pour les deux sessions de l'année 2020 (réduction des matières faisant l'objet de l'évaluation ainsi que du temps consacré à cette évaluation); les énoncés repris ci-après ne peuvent donc être perçus comme un reflet fidèle de la teneur habituelle de cet examen.

Pour mieux souligner cette particularité de l'année, nous proposons "en l'état" les questionnaires qui ont été soumis aux étudiants lors de ces éditions exceptionnelles de l'examen.

JUILLET 2020 - Jour 1**TRIGONOMETRIE ET GEOMETRIE****Question I**

Trouver toutes les solutions de l'équation trigonométrique

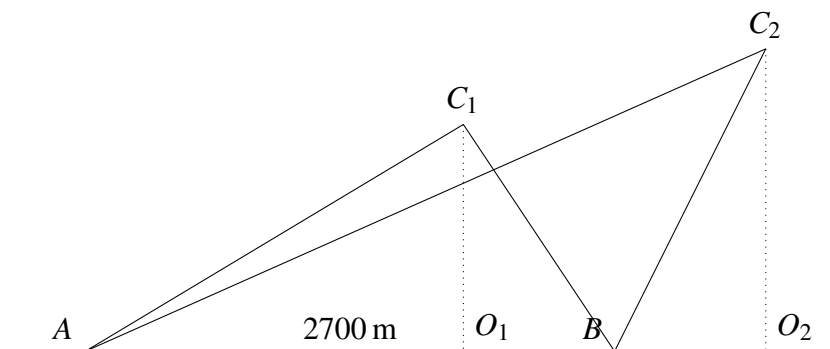
$$3 [\sin(x) + \cos(x)] - 4 [\sin^3(x) + \cos^3(x)] = 0.$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Question II

A un instant initial, deux observateurs A et B distants de 2700 m voient un avion situé dans le plan vertical de la base d'observation sous des angles $\widehat{C_1AO_1} = 35^\circ$ et $\widehat{C_1BO_1} = 64^\circ$, l'avion se situant entre A et B . Après quelques secondes, ils font une seconde observation sous des angles $\widehat{C_2AO_2} = 30.5^\circ$ et $\widehat{C_2BO_2} = 80^\circ$, l'avion se situant à la droite de B .

Déterminer l'angle de montée de l'avion par rapport au segment AB , c'est-à-dire l'angle formé par la droite C_1C_2 et la droite AB .



Question III

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les droites d_1 et d_2 respectivement d'équations cartésiennes

$$d_1 : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

- a) Montrer que ces droites ne sont pas parallèles.
- b) Déterminer l'équation cartésienne du plan contenant d_1 et parallèle à d_2 .

Question IV

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O . Sur un diamètre de ce cercle, on fixe deux points P et P' équidistants de O . Un point mobile M parcourt $\mathcal{C}$.

Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{P'M}$ ne dépend pas du point M .

JUILLET 2020 - Jour 2**ALGEBRE ET ANALYSE****Question I**

Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \geq \sqrt{-x} + \frac{2|x|}{x}.$$

Question II

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$6^{4x} - 36^{x+1} - 160 = 0.$$

Question III

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

où $a > 0$ désigne un paramètre réel. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a ,

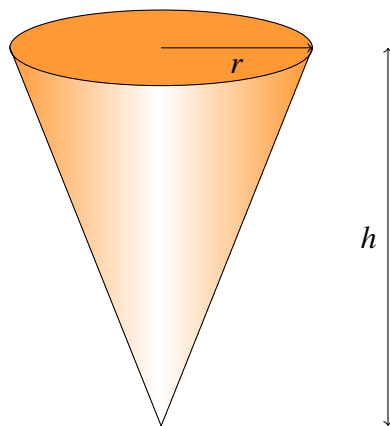
- déterminer le domaine de définition de f ;
- étudier la parité de f ;
- déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe ;
- étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;
- esquisser le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

Question IV

Afin d'optimiser sa marge bénéficiaire, l'exploitant d'une friterie désire minimiser la quantité de papier utilisée pour confectionner ses cornets de frites. Le cornet est assimilé à un cône circulaire droit et doit contenir un volume V fixé de frites. Sachant que le volume V et l'aire latérale A d'un cône circulaire droit de rayon r et de hauteur h sont donnés par

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

déterminer les dimensions r et h optimales du cornet en fonction du volume V .



SEPTEMBRE 2020 - Jour 1**ALGEBRE ET ANALYSE****Question I**

Déterminer l'ensemble des valeurs réelles de r pour lesquelles l'énoncé

$$\text{Pour tout réel } x \text{ tel que } |x| < 1/2, \text{ on a } 2rx^2 + (3r - 2)x - 3 \leq 0$$

est vrai.

Question II

Soit une suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_1 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{n^2 u_n + 7}{n^2 + 2n + 1} \text{ pour } n \geq 1.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n = \frac{7n - 5}{n^2}.$$

Question III

On considère la fonction

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{1+x^2}\right)$$

- a) Déterminer le domaine de définition de f .
- b) Étudier la parité de f .
- c) Déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe.

- d) Étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema.
- e) Esquisser le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

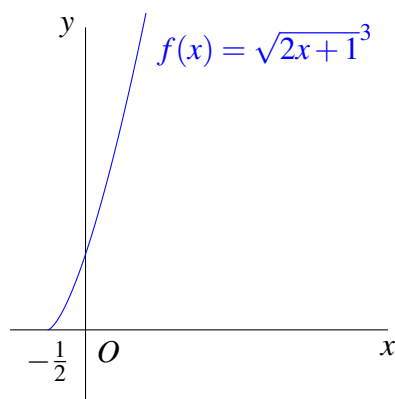
Question IV

On définit la distance d'un point P à une courbe C comme la plus petite des distances entre le point P et tous les points de la courbe C .

On s'intéresse à la distance d de l'origine O à la courbe C décrite par le graphe de la fonction

$$f(x) = \sqrt{(2x+1)^3}.$$

- a) Calculer d et déterminer les coordonnées de l'unique point Q de C situé à la distance d de l'origine O .
- b) Montrer que le segment OQ est perpendiculaire à la tangente au graphique de f en Q .



SEPTEMBRE 2020 - Jour 2**TRIGONOMETRIE ET GEOMETRIE****Question I**

Démontrer que les droites d_m d'équation

$$mx + (1 - m)y + m - 2 = 0$$

(où m est un paramètre réel) passent par un même point. Quel est ce point ?

Question II

On donne les quatre points A, B, C, D .

a) Démontrer que le vecteur

$$\mathbf{v} = 4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$$

est indépendant du point M .

b) Démontrer que, si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, alors le nombre réel

$$4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 - 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{MD}\|^2$$

est indépendant du point M .

Question III

Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation trigonométrique

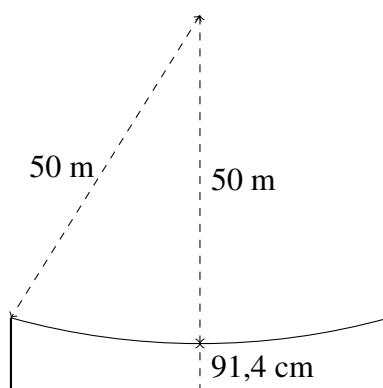
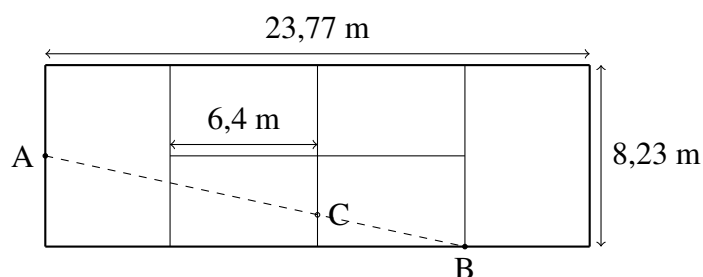
$$\operatorname{tg}^2(x) - 3\frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos(x)} - \frac{1}{\cos^2(x)} = 1$$

et représenter les solutions en x sur le cercle trigonométrique.

Question IV

On voudrait construire un lance-balles afin d'entraîner un joueur de tennis professionnel. Pour simplifier, on suppose que ce lance-balles envoie des balles tellement rapides que celles-ci ont une trajectoire rectiligne. Le fabricant aimerait savoir quelle devrait être la hauteur d'où sont envoyées les balles afin qu'elles puissent passer au-dessus du filet et simuler un service rebondissant à l'intersection entre la ligne du couloir et la ligne du carré de service (du point A au point B sur la première figure ci-dessous). Les dimensions du terrain sont renseignées sur la figure. De plus, on considérera que le filet peut être vu comme un arc de cercle de 50 mètres de rayon et de centre situé à la verticale du milieu du terrain. La hauteur du filet au centre du terrain est réglementairement fixée à 91,4 centimètres au-dessus du sol (deuxième figure ci-dessous).

En supposant que le lance-balles est placé au milieu de la ligne de fond, au point A, calculer la hauteur minimale nécessaire (du point A) pour envoyer la balle sur le point B (au niveau du sol) tout en garantissant que la balle passe au-dessus du filet au point C. Pour rappel, on suppose que la trajectoire est rectiligne, on suppose également que la balle est un point n'ayant pas de dimension. Tous les calculs se font au millimètre près.



EXAMENS DE 2021**JUILLET 2021****ALGEBRE**

1. Soit le polynôme P défini par $P(z) = z^6 + 3z^4 - z^3 - 3z$.
 - a) Décomposer le polynôme en facteurs du premier ou second degré.
 - b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} \leq \sqrt{x^2 - 8x + 20}.$$

ANALYSE

1. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans un champ de force centrale particulier peut être étudié à partir du potentiel

$$V(r) = \frac{h^2}{r^2} - \frac{2\mu}{5r^5}$$

où $r > 0$ est une variable réelle représentant la distance de la particule par rapport au centre de force, $h > 0$ est une constante fixée représentant le moment cinétique par unité de masse de la particule et μ désigne un paramètre réel.

Étudier le graphe de la fonction $V(r)$, pour $r > 0$ uniquement, en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre μ . Plus précisément,

- a) déterminer les valeurs de $r > 0$ pour lesquelles la fonction V est définie ;
- b) déterminer les zéros de la fonction V ;
- c) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe ;
- d) étudier la croissance/décroissance de V et caractériser ses éventuels extrema ;

e) esquisser le graphique de V en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

2. Calculer les primitives et intégrales suivantes.

a) $\int \sqrt{x}(1-x^3) dx$

b) $\int x \ln x dx$

c) $\int_0^2 x e^{-x^2} dx$

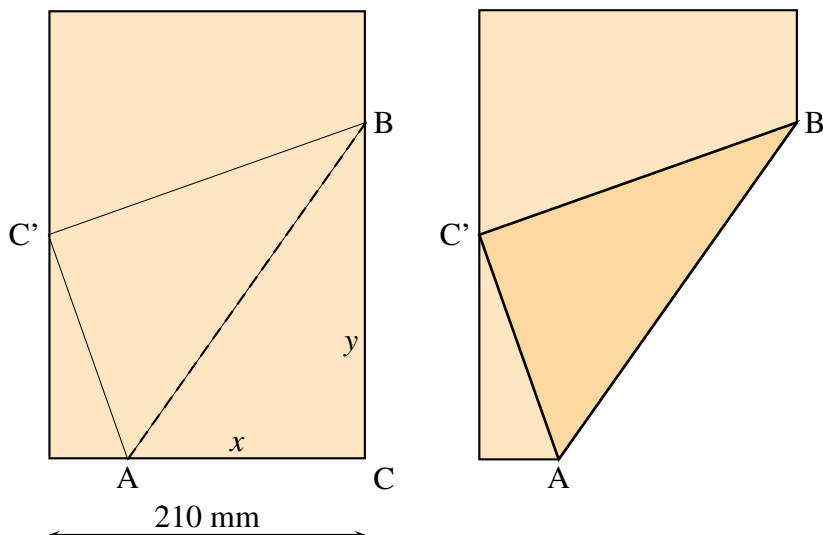
d) $\int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx$

3. Dans une feuille rectangulaire de format A4 (210 mm x 297 mm), on fait un pli selon un axe AB où A et B désignent deux points appartenant respectivement au petit et au grand côté, comme illustré ci-dessous.

Le pli est tel que le coin C de la feuille est appliqué exactement sur le côté opposé. On peut montrer que ceci nécessite que les longueurs $|AC|$ et $|CB|$, notées respectivement x et y (en mm), sont telles que

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{210}}{\sqrt{2x-210}} \quad \text{où } x \in [123, 210]$$

Montrer que l'aire de la surface repliée ABC est minimale lorsque CBC' est équilatéral.



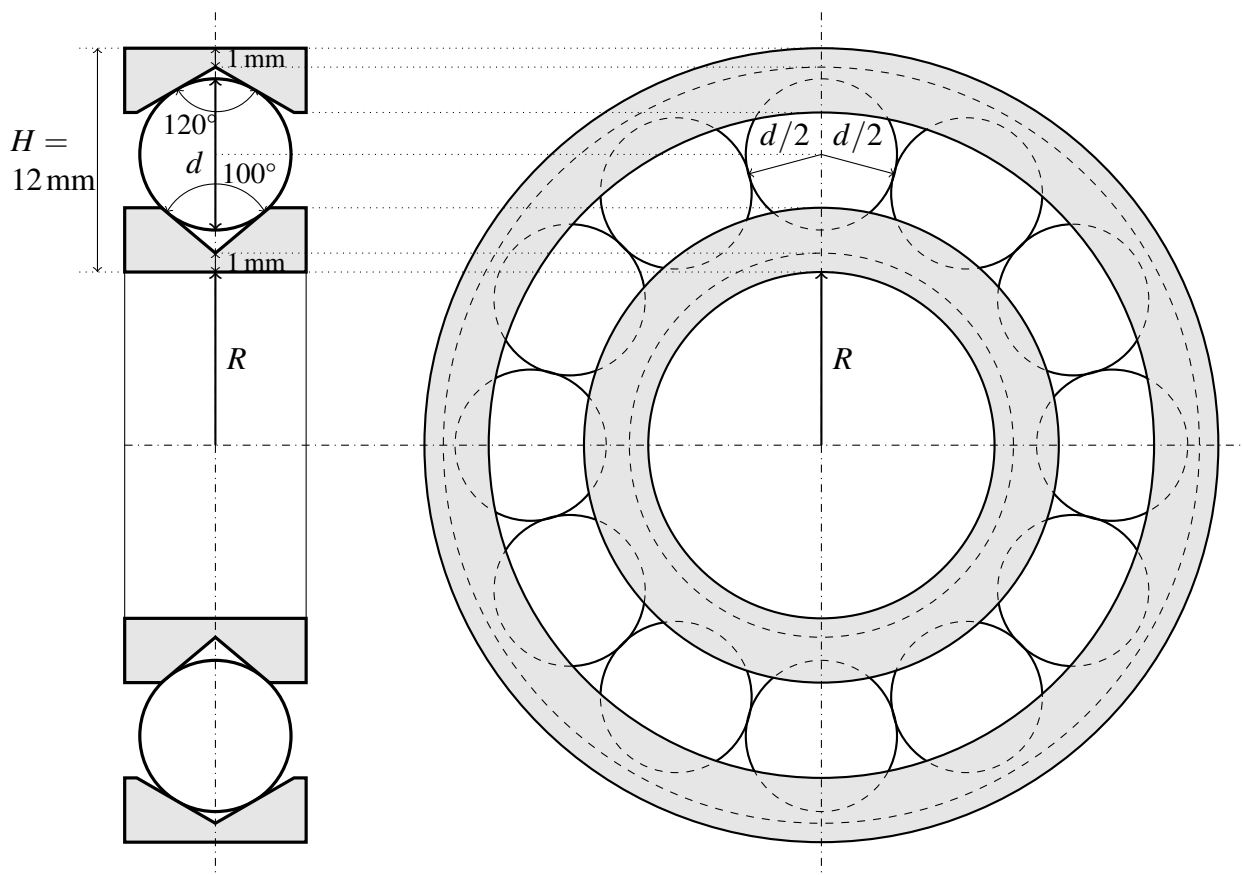
TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Trouver toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

$$\cos x - \cos(2x) - \sin(3x) = 0.$$

Présenter sur le cercle trigonométrique celles appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

2. Les billes d'un roulement sont enserrées entre deux gorges métalliques. La gorge de la bague extérieure possède un angle d'ouverture de 120° quant à celle de la bague intérieure, elle possède un angle de 100° comme décrit sur la partie gauche de la figure ci-dessous. On suppose que les sommets des gorges se trouvent sur la même ligne verticale et on se rappelle que les surfaces de contact sont tangentes à la bille.



- a) En utilisant les données du plan, déterminer le diamètre d de la bille tel que la distance entre les bagues intérieure et extérieure soit $H = 12\text{ mm}$ exactement.
 - b) Si le roulement est constitué de 12 billes juxtaposées comme sur la partie droite du dessin ci-dessus, calculer le rayon R de la bague intérieure du roulement.
-

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Un point P appartient à la diagonale BD d'un rectangle $ABCD$. Démontrer l'égalité

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{PD}.$$

L'égalité est-elle vérifiée si P n'appartient pas à la diagonale BD du rectangle ? Justifier.

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point P de coordonnées $(1, 1, 1)$ et la droite d située à l'intersection des plans

$$\Pi_1 : 2x + y = 5 \quad \text{et} \quad \Pi_2 : x + 2y + 3z = -2$$

- a) Déterminer l'équation cartésienne du plan Π passant par le point P et incluant la droite d .
 - b) Déterminer des équations paramétriques de Π_2 .
 - c) Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite d' passant par l'origine, qui coupe d et lui est orthogonale.
-
-

SEPTEMBRE 2021

ALGEBRE

1. Factoriser le polynôme P défini par $P(x) = 64x^3 - 144x^2 + 44x + 21$, sachant qu'il admet trois racines (réelles) x_1, x_2, x_3 en progression arithmétique, c'est-à-dire telles que $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$.

2. Soit E l'ensemble à 12 éléments $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

- a) Combien de sous-ensembles de 5 éléments de E peut-on former
- contenant a et b ?
 - contenant a mais pas b ?
 - contenant b mais pas a ?
 - ne contenant ni a ni b ?
- b) En déduire la relation

$$C_{12}^5 = C_{10}^3 + 2C_{10}^4 + C_{10}^5.$$

- c) Généraliser le résultat obtenu en prouvant par un raisonnement similaire que, pour $1 < p < n - 1$, on a

$$C_n^p = C_{n-2}^{p-2} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p.$$

- d) Démontrer algébriquement la relation

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1} \quad (\text{Formule du triangle de Pascal}),$$

valable si $0 \leq p < n$.

- e) Démontrer à nouveau le résultat du point c) en appliquant la formule du triangle de Pascal.

Remarque. On peut répondre aux points d) et e) même si on n'a pas pu répondre aux points a), b) et c).

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + \beta^2}{x}$$

où $\beta > 0$ désigne un paramètre réel. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de β ,

- a) déterminer le domaine de définition de f ;
- b) déterminer les éventuels zéros de f ;
- c) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe ;
- d) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;

- e) esquisser le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

2. Calculer les primitives et intégrales suivantes,

a) $\int_0^1 x(1 - \sqrt[3]{x}) dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin(2x) dx$

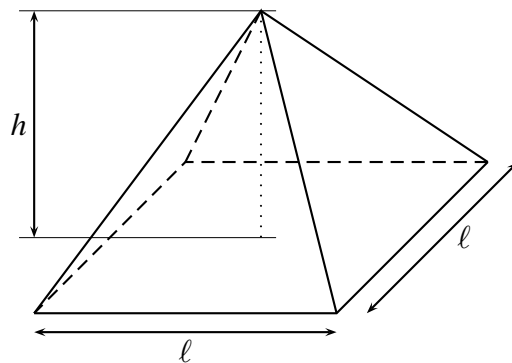
d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos(4x) dx$

3. Les étudiants ingénieurs du Pot'Ingé (potager cultivé par les étudiants ingénieurs de l'ULiège sur le campus du Sart Tilman)



souhaitant protéger leur récolte de légumes des intempéries décident d'entasser ceux-ci en une pyramide à base carrée de volume V et de recouvrir celle-ci d'une bâche (voir illustration ci-dessous). La bâche couvre uniquement les quatre faces triangulaires de la pyramide, pas la base carrée. On note ℓ et h , respectivement, la longueur du côté de la base carrée et la hauteur de la pyramide.

Déterminer le rapport ℓ/h des dimensions optimales de la pyramide permettant de minimiser la surface S de la bâche pour un volume V fixé de la récolte à protéger.



On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\frac{1}{3}Ah$ où A désigne l'aire de la base et h est la hauteur de la pyramide.

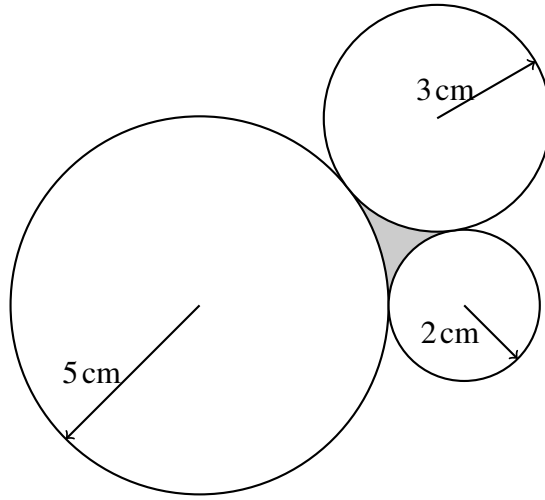
TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique

$$\cos^3 x - \sin^3 x = \frac{3}{5}(\cos x - \sin x).$$

Représenter précisément les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Trois cercles avec un rayon de respectivement 5 cm, 3 cm et 2 cm sont tangents deux à deux. Déterminer l'aire de la surface intérieure grisée délimitée par les trois cercles (voir figure ci-après).



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On donne un quadrilatère plan quelconque $ABCD$. On désigne par I, J, K, L les milieux des côtés AB, BC, CD et DA respectivement. Démontrer les affirmations suivantes :

- a) $IJKL$ est un parallélogramme tel que

$$\vec{IJ} = \vec{LK} = \frac{\vec{AC}}{2}, \quad \vec{IL} = \vec{JK} = \frac{\vec{BD}}{2}$$

- b) Les diagonales de $ABCD$ et de $IJKL$ vérifient l'égalité

$$\|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{BD}\|^2 = 2\|\vec{IK}\|^2 + 2\|\vec{JL}\|^2$$

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A, B, C, D suivants

$$A(0, 1, 1), \quad B(0, -1, 0), \quad C(1, 0, 1), \quad D(r, 1, 1)$$

où r est un paramètre réel.

- a) Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par A et B .
- b) Déterminer l'équation cartésienne du plan Π_r passant par l'origine et par les points C et D .

- c) Déterminer la valeur de r pour laquelle le plan Π_r est parallèle à la droite d .
-
-

EXAMENS DE 2022**JUILLET 2022****ALGEBRE**

1. On considère le polynôme

$$P(x) = x^3 + mx^2 + 333x - 1134,$$

où m est un paramètre.

- Donner les décompositions de 333 et 1134 en facteurs premiers.
- Trouver l'unique valeur entière de m telle que le polynôme $P(x)$ possède uniquement des racines entières positives avec nécessairement une racine multiple.

(Expliquer soigneusement le raisonnement mené.)

2. Soient a et b des réels positifs tels que $a \geq b > 0$. Démontrer que la différence entre leur moyenne arithmétique et leur moyenne géométrique admet la borne inférieure et la borne supérieure suivantes

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

(Expliquer soigneusement le raisonnement mené.)

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{x-\beta}\right)$$

où β désigne un paramètre réel strictement positif. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de β ,

- déterminer le domaine de définition de f ;

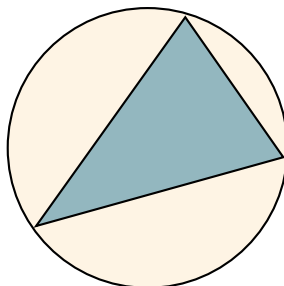
- b) déterminer les éventuels zéros de f ;
- c) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphique ;
- d) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;
- e) étudier la concavité du graphique et identifier les éventuels points d'inflexion ;
- f) esquisser le graphique de f en reliant explicitement chacune de ses caractéristiques aux résultats obtenus ci-dessus.

2. On note

$$I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

- a) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_4 .
 - b) Sans évaluer I_3 , montrer que $I_2 \leq I_3 \leq I_4$.
3. D'un tronc d'arbre de section parfaitement circulaire de rayon R , on veut extraire une poutre dont la section est un triangle isocèle, comme illustré ci-dessous.

Déterminer l'aire maximale de la section de la poutre et les longueurs des côtés du triangle isocèle correspondant. Justifier.



TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Soit l'équation trigonométrique

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos x \sin x.$$

Déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

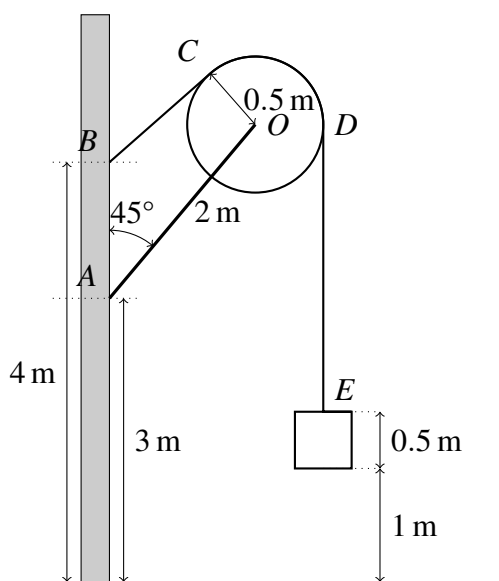
2. Si A , B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré, démontrer que

$$\frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2}.$$

3. Une barre en acier d'une longueur de 2 m est ancrée à une extrémité A dans un mur vertical à une hauteur de 3 m avec un angle de 45° par rapport à la verticale. A son autre extrémité O , elle soutient une poulie de 0.5 m de rayon. Un câble d'acier est fixé dans ce même mur en B à une hauteur de 4 m et soutient une caisse cubique de 0.5 m de côté par l'intermédiaire de la poulie.

Calculer la longueur $BCDE$ du câble pour que le bas de la caisse se situe exactement à 1 m du sol (au centimètre près).

Le système est représenté sur la figure ci-dessous mais le dessin n'est pas à l'échelle. Le câble est tangent à la poulie aux points de contact C et D .



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On se place dans un repère orthonormé du plan et on considère le triangle de sommets $A(-11, -4)$, $B(1, 1)$, $C(4, -3)$.
 - a) Quelle est la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$, exprimée sous la forme d'un nombre rationnel (donner la forme fractionnaire) ? Justifier la réponse proposée.
 - b) Déterminer des équations paramétriques de la médiane issue du sommet B . Justifier et expliquer le raisonnement mené.
 - c) Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice du côté AB . Justifier et expliquer le raisonnement mené.
 - d) Déterminer l'équation cartésienne de la hauteur issue du sommet B . Justifier et expliquer le raisonnement mené.
 - e) Représenter le triangle, la médiane, la médiatrice et la hauteur dont il est question ci-dessus.
 2. Dans un plan, on fixe un cercle C de centre O et un point P quelconque.
 - a) Une droite variable d passant par O rencontre C en deux points D et E . Démontrer que la valeur du produit scalaire de $\overrightarrow{PD}$ et $\overrightarrow{PE}$ reste constante lorsque d varie.
 - b) Une droite variable d' passant par P rencontre C en deux points M et N . Démontrer que la valeur du produit scalaire de $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ reste constante lorsque d' varie.
-
-

SEPTEMBRE 2022**ALGEBRE**

1.
 - a) Factoriser le polynôme $z^6 - 1$ en polynômes à coefficients réels du premier ou du second degré.
 - b) Donner les racines complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 du polynôme $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ sous leur forme algébrique ou trigonométrique.

c) Quel est le nombre $w = z_1^{30} + z_2^{30} + z_3^{30} + z_4^{30} + z_5^{30}$?

2. Les nombres de Fibonacci F_n (avec $n \in \mathbb{N}$) sont définis par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{et} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Montrer que la somme des n premiers nombres de Fibonacci à indices impairs est donnée par la formule

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

3. On crée un code PIN à 4 chiffres. Combien y a-t-il de choix dans les cas suivants ?

- a) Sans restriction.
- b) Aucun chiffre n'est répété.
- c) Aucun chiffre n'est répété et le deuxième chiffre est un 0.
- d) Aucun chiffre n'est répété et ils doivent apparaître dans l'ordre décroissant.
- e) Aucun chiffre n'est répété et les chiffres 6 et 9 doivent être présents.

Remarque. Exprimer les réponses sous la forme d'un calcul faisant intervenir les opérations mathématiques de base (addition, soustraction, multiplication, division, puissance, factorielle). Expliquer clairement le raisonnement qui mène à ces réponses.

ANALYSE

1. On considère la fonction

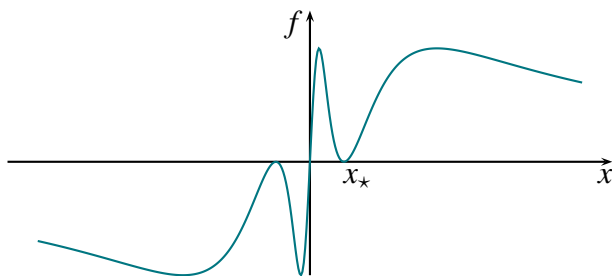
$$f(x) = \sin\left(\frac{2\beta x}{1+x^2}\right)$$

où β désigne un paramètre réel strictement positif.

A. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de β ,

- a) déterminer le domaine de définition de f ;
- b) étudier la parité de la fonction ;
- c) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphique ;
- d) calculer f' .

- B. Déterminer toutes les valeurs de β pour lesquelles la fonction f s'annule en un point d'abscisse $x_\star > 0$ où f présente également un minimum local, comme sur le graphique ci-dessous.



2. A. Évaluer chacune des expressions suivantes :

a) $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

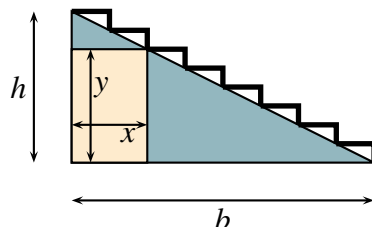
- B. Calculer

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx$$

où R désigne un paramètre strictement positif et interpréter graphiquement cette intégrale.

3. On souhaite installer une porte rectangulaire sous un escalier afin d'y aménager un débarras (ou une chambre pour Harry Potter). Quelles sont la surface maximale de la porte pouvant être installée sous l'escalier et les dimensions x et y correspondantes ?

On assimilera l'espace sous l'escalier à un triangle de base b et de hauteur h , en ignorant la géométrie des marches.



TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique suivante en précisant les conditions d'existence :

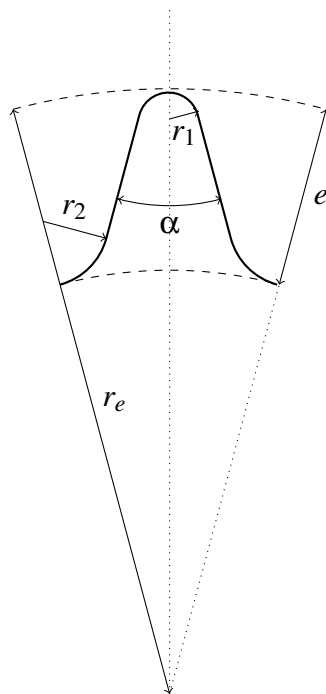
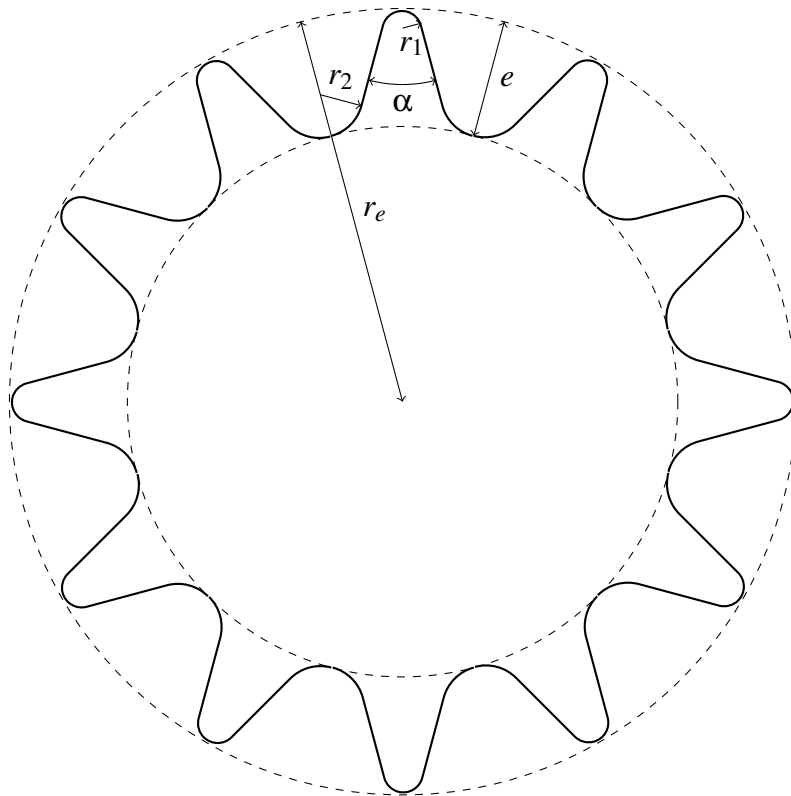
$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$$

Représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Si A , B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré et a , b et c les longueurs des côtés opposés, démontrer que :

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

3. Soit l'engrenage constitué de 12 dents représenté sur la première figure ci-dessous (la deuxième figure présente le détail d'une dent de cette engrenage). Chaque dent possède un angle d'ouverture $\alpha = 30^\circ$ et un sommet constitué d'un arc de cercle de rayon $r_1 = 2\text{ mm}$ (les côtés rectilignes de la dent sont tangents à l'arc de cercle aux points de contact). Le rayon extérieur de l'engrenage est $r_e = 40\text{ mm}$. La jonction entre chaque dent est faite d'un arc de cercle de rayon r_2 (les côtés de la dent sont tangents à cet arc de cercle aux points de contact). Déterminer la valeur de r_2 de manière à ce que la hauteur e des dents soit exactement de 12 mm.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On se place dans un repère orthonormé du plan et on considère le triangle de sommets $A(-2, -2)$, $B(-1, 2)$, $C(3, 1)$.
 - a) Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
 - b) Quelle est l'équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ? Justifier et expliquer le raisonnement mené.
 - c) Représenter le triangle ABC ainsi que le cercle circonscrit demandé.
2. Dans le plan, on donne un rectangle $EFGH$ et un réel k différent de 0 et de 1.
 - a) Démontrer l'égalité (note : la notation $\bullet$ désigne le produit scalaire)

$$\overrightarrow{EO} \bullet \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{FO} \bullet \overrightarrow{OH}$$

où O est un point quelconque du plan.

- b) On définit les points M, P, Q par

$$\overrightarrow{EM} = k\overrightarrow{EH}, \quad \overrightarrow{FP} = k\overrightarrow{FH}, \quad \overrightarrow{QG} = (1-k)\overrightarrow{FG}.$$

Démontrer que les points M, P, Q sont alignés. Justifier la réponse, expliquer le raisonnement mené.

- c) On définit aussi le point N par

$$\overrightarrow{NG} = \frac{1-k}{k} \overrightarrow{EN}.$$

Démontrer que le point N est aligné aussi avec M, P, Q . Justifier la réponse, expliquer le raisonnement mené.

EXAMENS DE 2023**JUILLET 2023****ALGEBRE**

1. a) Calculer le quotient et le reste de la division de

$$x^6 + 2x^4 + 6x - 9$$

par

$$x^3 + 3.$$

- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

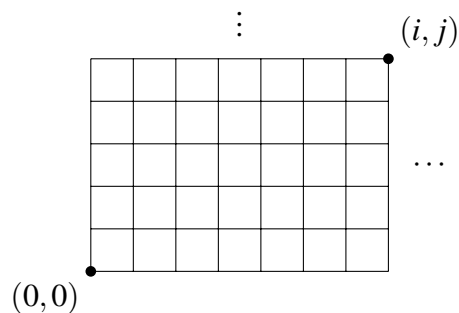
$$-x(2x - 14) \geq 24.$$

- c) Donner la partie réelle et la partie imaginaire de

$$\frac{3 - i}{2 + 7i}.$$

- d) Le Chevalier de Méré, qui était un noble de la cour de Louis XIV et un grand joueur, aimait parier sur l'apparition d'un "6" lors de lancers successifs d'un dé. Quelle est la probabilité, exprimée en fonction de n , qu'il obtienne au moins un "6" en n lancers d'un dé équilibré à six faces ?

- e) Supposons qu'une grille de rue commence à la position $(0, 0)$ et s'étende vers le nord et l'est.



L'itinéraire le plus court empruntant ces rues à partir du point $(0,0)$ jusqu'au point (i,j) est long de $i+j$ blocs, allant de i blocs à l'est et de j blocs au nord. Combien y a-t-il d'itinéraires de ce type ?

2. Les nombres de Fibonacci sont définis par les relations :

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ pour tout entier } n \geq 0.$$

Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$-f_{n+1}^2 + f_{n+1}f_n + f_n^2 = (-1)^{n+1}.$$

3. Soit l'équation suivante dans $\mathbb{C}$

$$|z - |z + i|| = (z + 1)i + |z + 1|$$

(z désigne l'inconnue complexe).

- Montrer que la partie réelle d'une solution est égale à -1 (sans développer les modules).
 - Déterminer le signe de la partie imaginaire d'une solution (sans développer les modules).
 - Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.
-

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Déterminer les éventuels zéros de f .
- Déterminer les éventuelles asymptotes de son graphique.
- Étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema.
- Esquisser le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

- f) Déterminer la(les) valeur(s) de β pour que la droite d'équation $y = \beta x$ soit tangente au graphique de f .

2. Évaluer chacune des expressions suivantes :

a) $\int_0^1 \sqrt{1+3x} \, dx$

b) $\int_0^1 x^2 e^{-x^3} \, dx$

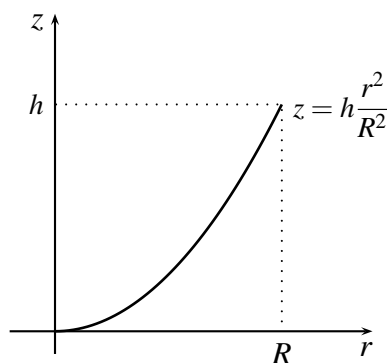
c) $\int \cos^2 x \, dx$

d) $\int e^x \cos x \, dx$

3. On considère une cuve dont la surface est générée par la rotation autour d'un axe vertical de la courbe d'équation

$$z = h \frac{r^2}{R^2}$$

où h est la hauteur de la cuve et R le rayon de la surface libre (voir figure ci-dessous). Déterminer le volume de cette cuve.



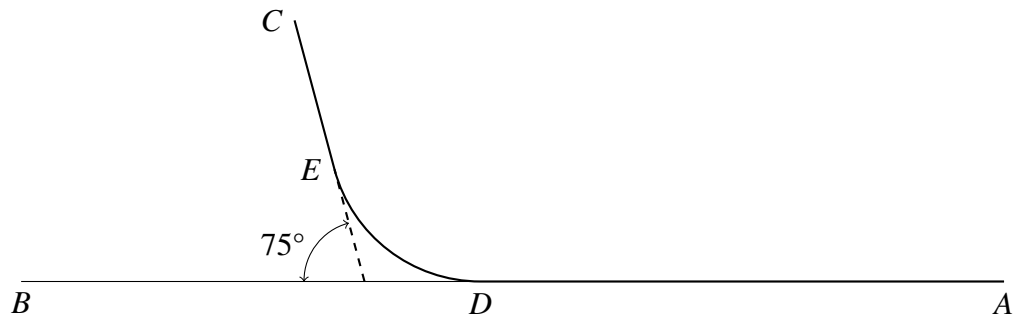
TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique suivante :

$$2 \cos(3x) - 14 \cos(2x) + 34 \cos(x) - 22 = 0.$$

2. En se basant sur les valeurs de sinus, cosinus et tangente des angles remarquables $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, évaluer sans calculatrice l'expression $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3. Une ligne de tram parfaitement rectiligne relie deux arrêts A et B . On désire étudier la liaison de l'arrêt A à un troisième arrêt C situé dans le même plan horizontal que A et B en empruntant la ligne AB existante et en effectuant un virage à 75° en arc de cercle d'un rayon de 2 km pour ensuite rejoindre l'arrêt C en ligne droite. L'arc de cercle est tangent aux deux tronçons rectilignes aux points D et E comme représenté sur la figure ci-dessous. Les distances à vol d'oiseau entre les différents arrêts sont $\overline{AB} = 13\text{ km}$, $\overline{AC} = 10\text{ km}$ et $\overline{BC} = 5\text{ km}$. Calculer la longueur totale du trajet $ADEC$ reliant les arrêts A et C par cette nouvelle ligne.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On se place dans un repère orthonormé du plan, d'origine O , et on donne la courbe $\mathcal{P}$ (parabole) d'équation cartésienne $y = x^2$. On considère alors les droites d qui coupent $\mathcal{P}$ en deux points M, N (différents de l'origine) de telle sorte que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux.

Démontrer que les droites d passent par un point fixe, à déterminer.

2. On se place dans le plan et on considère un parallélogramme $ABCD$. On définit alors les points E et F par $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}/3$.

a) Donner une représentation graphique des données.

b) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c) En déduire que les points C, E, F sont alignés.

AOÛT 2023**ALGEBRE**

1. a) Combien de nombres à 5 chiffres sont divisibles par 5 ?
(Remarque : La présence de "zéros non significatifs" ne compte pas dans le nombre de chiffres. Ainsi, par exemple, 01234 est un nombre à 4 chiffres. De plus, vous pouvez utiliser un chiffre plus d'une fois.)

b) Déterminer le mode, la médiane et la moyenne de cet échantillon :

1, 2, 2, 3, 4, 7, 9.

c) Donner le module et l'argument de $-\sqrt{3} + i$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{5+2x}{4x+1} \leq 0.$$

e) Si le premier terme d'une suite arithmétique est 5 et que la raison est 3, quel est le dixième terme de la suite ?

2. Pour quelles valeurs des paramètres réels p et q le polynôme

$$x^2 + px + q$$

admet-il deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 = 2x_2$ et $x_1^2 + x_2^2 = 45$? Déterminer ces racines x_1 et x_2 .

3. a) Développer $(A+B)^3$ comme une expression dépendant uniquement de A^3 , B^3 , AB et $A+B$.

b) Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$

$$\sqrt[3]{x+3} - 1 = -\sqrt[3]{4-x}.$$

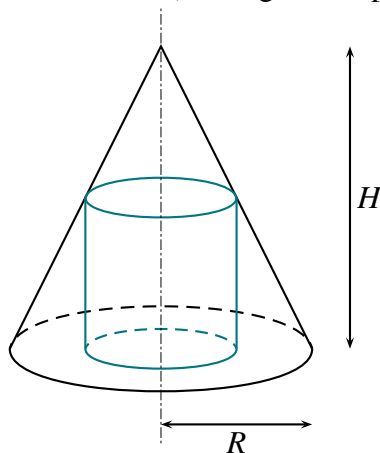
ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x}{\ln^2 x}$$

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Déterminer les éventuels zéros de f .
- Déterminer les éventuelles asymptotes de son graphique.
- Étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema.
- Esquisser le graphique de f en listant explicitement les résultats pertinents obtenus ci-dessus et en les reliant aux caractéristiques du graphique présenté.
- Déterminer la(les) valeur(s) de β pour que la droite d'équation $y = \beta x$ soit tangente au graphique de f .

2. Quel est le volume maximum d'un cylindre circulaire droit inscrit dans un cône de hauteur H dont le rayon de la base vaut R ? (Voir figure ci-après.)



3. On considère une particule initialement déposée sans vitesse à la surface d'un milieu résistif et qui pénètre dans celui-ci sous l'action de la pesanteur. La loi de variation de la vitesse en fonction du temps t est donnée par

$$v(t) = \alpha \left[t e^{-t/\tau} + \frac{\tau^4 t}{(t^2 + \tau^2)^2} \right] \quad \text{pour } t \geq 0$$

où α et τ sont des constantes strictement positives.

Calculer la profondeur de pénétration $z(t)$ de la particule dans le milieu résistif en fonction du temps sachant que

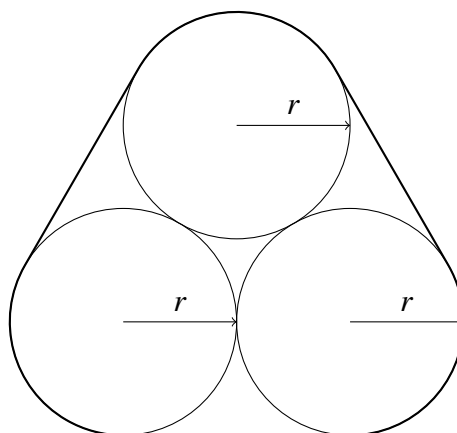
$$z(t) = \int_0^t v(s) ds$$

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

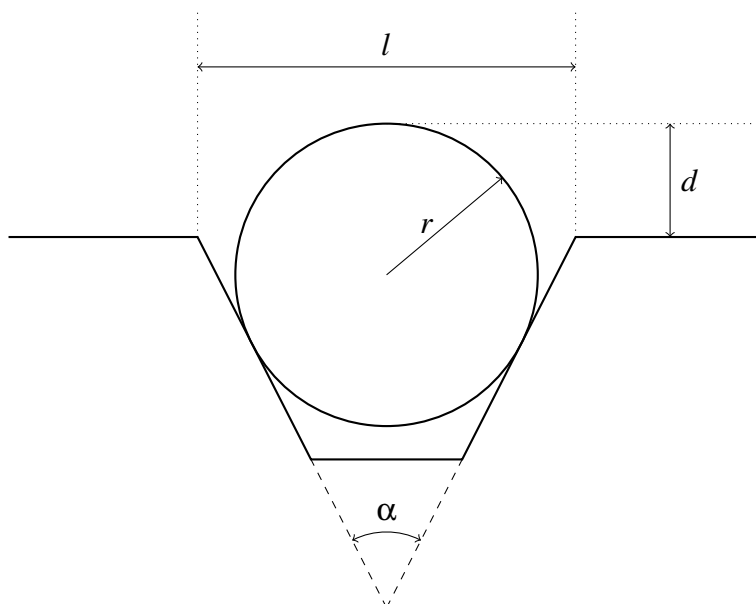
1. Trouver toutes les solutions réelles de

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(3x) = 2$$

2. Considérons trois cercles de même rayon r tangents deux à deux comme sur la figure ci-après. Démontrer que l'aire de la surface déterminée par la boucle entourant ces 3 cercles vaut $(\pi + 6 + \sqrt{3}) r^2$.



3. Le plan d'une pièce à fabriquer montre une gorge formant un trapèze isocèle dans laquelle une bille de rayon $r = 4\text{ mm}$ est insérée (les côtés du trapèze sont tangents à la bille aux points de contact). La largeur au sommet de la gorge vaut $l = 10\text{ mm}$ et le sommet de la bille dépasse de la gorge d'une distance $d = 3\text{ mm}$. Calculer l'angle d'ouverture α de la gorge.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Dans l'espace, on donne quatre points (distincts) A, B, C, D et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ suivants

$$\vec{u} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC}, \quad \vec{v} = 2\overrightarrow{BA} - 6\overrightarrow{BC}.$$

- a) Exprimer $\vec{u}$ sans utiliser D .
- b) Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles.
2. On se place dans le plan. Par un point P intérieur à un cercle C de centre O et de rayon r , on mène deux droites orthogonales d_1 et d_2 . On note A_1 un des points d'intersection de d_1 avec C , et A_2 un des points d'intersection de d_2 avec C . Le milieu du segment $[A_1A_2]$ est noté M .

- a) Donner une représentation graphique claire et précise des données.

- b) Démontrer l'égalité

$$|OM|^2 + |PM|^2 = r^2,$$

où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.

Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées
Institut de Mathématique - Bât. B37
Quartier Polytech 1
Allée de la Découverte, 12
4000 - LIEGE 1

Tél. : 04/366.94.36.
Email : Axelle.Lambotte@uliege.be

[http ://www.facsa.uliege.be/admission](http://www.facsa.uliege.be/admission)