LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Juillet 2018

Consignes :

- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées.*
  Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
- *Inscrivez sur chacune de vos feuilles votre numéro d'ordre, votre nom de famille (en majuscules) et votre prénom.*
- *L'examen se termine à 12h00.*
- *Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.*

Question I

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x - a}$$

où a désigne un paramètre réel strictement positif.

En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,

i. déterminez le domaine de définition de f ;
ii. déterminez sa parité éventuelle ;
iii. déterminez les éventuelles asymptotes de son graphe ;
iv. étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema ;
v. esquissez le graphique de f.

Question II

Soit

$$I_n = \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} x \left(\ln x^2\right)^n \, dx$$

i. Calculez I_0.
ii. Calculez I_1.
iii. Montrez que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante α telle que

$$I_n = \frac{1}{2} \int_1^{\alpha} (\ln x)^n \, dx$$

iv. Montrez que, quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, $\quad I_n = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - n\, I_{n-1}$.

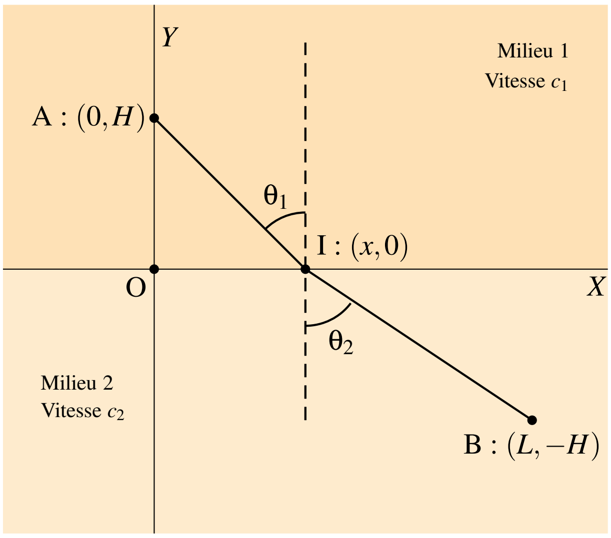
Tournez la page.

Question III

Pour aller d'un point à un autre, la lumière suit le chemin le plus rapide. Lorsque le milieu est homogène et que la vitesse de propagation de la lumière est donc constante, le rayon lumineux suit une trajectoire rectiligne entre les deux points. Dans ce cas, le chemin le plus rapide est également le plus court. Dans un milieu non homogène, par contre, le chemin le plus rapide ne correspond pas nécessairement au chemin le plus court de sorte que la propagation n'a pas lieu en ligne droite.

La loi de la réfraction de Snell-Descartes peut être obtenue par application de ce principe. Pour établir cette loi, on considère deux milieux homogènes séparés par une interface plane d'équation $y = 0$. Dans les deux milieux, la lumière se propage en ligne droite à des vitesses c_1 et c_2. Au passage de l'interface plane entre les deux milieux, le rayon est réfracté et change de direction.

On considère en particulier le rayon lumineux allant du point A de coordonnées $(0, H)$ au point B de coordonnées $(L, -H)$ où H et L sont des constantes strictement positives. Ce problème est donc caractérisé par les quatre paramètres H, L, c_1 et c_2. On note également $x \in \mathbb{R}$, la coordonnée horizontale du point I où le rayon est incident à l'interface.



i. Exprimez en fonction de x et des quatre paramètres du problème le temps de parcours du rayon lumineux allant du point A au point B.

ii. Montrez qu'il est nécessaire que le trajet du rayon lumineux soit tel que (voir figure)

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

SOLUTION TYPE

Question I

i. Quelle que soit la valeur du paramètre a, la fonction

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x-a}$$

est définie partout sauf au point $x=a$ où son dénominateur s'annule. On a donc

$$\mathrm{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{a\}$$

ii. La fonction n'est ni paire ni impaire puisque, quelle que soit la valeur du paramètre a,

$$f(-x)=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{-x-a}\begin{cases}\neq f(x)\\ \neq -f(x)\end{cases}$$

iii. Quelle que soit la valeur du paramètre a :

- Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x-a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

  Remarquons que la limite est approchée par valeurs supérieures car la fonction est supérieure à 1 dans le voisinage de $+\infty$.
  La fonction présente donc l'asymptote horizontale $y=1$ en $+\infty$ qu'elle approche par le dessus.
- Au voisinage de $-\infty$, on a

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x-a}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

  Remarquons que la limite est approchée par valeurs supérieures car la fonction est supérieure à -1 dans le voisinage de $-\infty$.
  La fonction présente donc l'asymptote horizontale $y=-1$ en $-\infty$ qu'elle approche par le dessus.
- Par ailleurs,

$$\lim_{x\to a^{\pm}}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x-a}=\pm\infty$$

  de sorte que la fonction présente une asymptote verticale en $x=a$.

Il n'y a pas d'asymptote oblique puisque la fonction possède des asymptotes horizontales en $+\infty$ et $-\infty$.

iv. La dérivée de f est donnée par

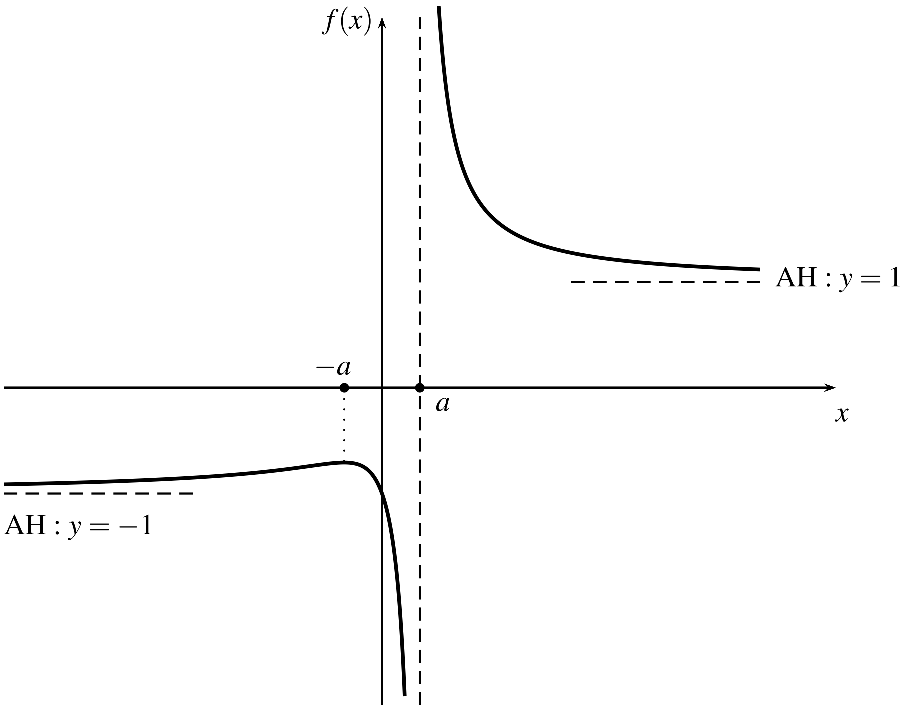
$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\dfrac{x(x-a)}{\sqrt{x^2+a^2}}-\sqrt{x^2+a^2}}{(x-a)^2}=\frac{x(x-a)-(x^2+a^2)}{(x-a)^2\sqrt{x^2+a^2}}\\&=\frac{-ax-a^2}{(x-a)^2\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{-a(x+a)}{(x-a)^2\sqrt{x^2+a^2}}\end{aligned}$$

dont le seul zéro est $x=-a$. Les variations de f sont décrites par

x		$-a$		a	
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

La fonction étant croissante à gauche de $-a$ et décroissante à droite, elle présente un maximum local en ce point avec $f(-a) = -\sqrt{2}/2 > -1$.

v. En utilisant les résultats dégagés ci-dessus, le graphique de f peut être esquissé de la façon suivante pour toutes les valeurs du paramètre a.



Question II

i.

$$I_0 = \int_1^{\sqrt{e}} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}$$

ii.

$$I_1 = \int_1^{\sqrt{e}} x\ \ln x^2\,dx$$

En posant $x^2 = t$, $2x\,dx = dt$, l'intégrale peut être transformée en

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_1^{e} \ln t\,dt$$

Par application de la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b fg'dt = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f'g\,dt$$

avec

$$\begin{cases} f = \ln t \\ g' = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = \dfrac{1}{t} \\ g = t \end{cases}$$

on obtient

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\Big[t\ln t\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} dt\right) = \frac{1}{2}\Big[t\ln t - t\Big]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$$

De façon alternative, l'intégrale peut être transformée dès le départ selon

$$I_1 = \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} x\ \ln x^2\, dx = 2\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} x\ \ln x\, dx$$

Par application de la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f g' dx = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f' g\, dx$$

avec

$$\begin{cases} f = \ln x \\ g' = x \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = \dfrac{1}{x} \\ g = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} - \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{x}{2}\, dx\right) = \left[x^2\ln x - \frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \\ &= \mathrm{e}\ln\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

iii. En posant $x^2 = t$, $2x\,dx = dt$, l'intégrale I_n peut être transformée en

$$I_n = \int_1^{\sqrt{e}} x(\ln x^2)^n dx = \frac{1}{2}\int_a^b \ln^n t\ dt$$

où les bornes a et b sont données respectivement par

$$a = 1^2, \qquad b = (\sqrt{\mathrm{e}})^2 = \mathrm{e}$$

de sorte que, comme attendu,

$$I_n = \frac{1}{2}\int_1^{\alpha} \ln^n x\, dx \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \mathrm{e}.$$

iv. Repartant de l'expression de I_n obtenue ci-dessus, on a

$$I_n = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} \ln^n x\, dx$$

Par application de la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f g' dx = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f' g\, dx$$

avec

$$\begin{cases} f = \ln^n x \\ g' = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = \dfrac{n\ln^{n-1} x}{x} \\ g = x \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2}\left(\left[x \ln^n x\right]_1^{\mathrm{e}} - n \int_1^{\mathrm{e}} \ln^{n-1} x \, dx\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{n}{2} \int_1^{\mathrm{e}} \ln^{n-1} x \, dx \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$I_{n-1} = \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} x \, \left(\ln x^2\right)^{n-1} \, dx$$

peut s'écrire, en vertu du résultat obtenu en iii., sous la forme

$$I_{n-1} = \frac{1}{2} \int_1^{\mathrm{e}} \ln^{n-1} x \, dx$$

de sorte que

$$I_n = \frac{\mathrm{e}}{2} - n \, I_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

On peut vérifier que les valeurs calculées pour I_0 et I_1 vérifient la formule ci-dessus. On a en effet

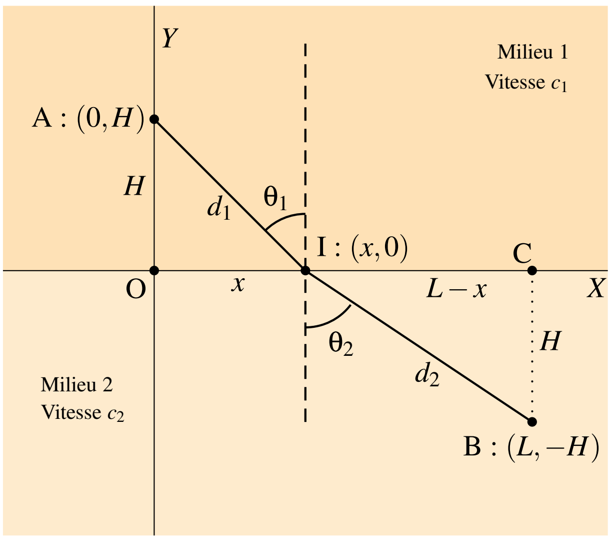
$$I_1 = \frac{\mathrm{e}}{2} - I_0 = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Question III

i. Le temps de parcours dans un milieu donné est obtenu en divisant la distance parcourue par la vitesse. On a donc

$$t = \frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2}$$

où les distances parcourues dans les deux milieux correspondent respectivement aux hypothénuses des triangles AOI et BCI, le point C étant la projection sur l'axe OX du point B.



Soit

$$t(x) = \frac{\sqrt{H^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2+H^2}}{c_2}$$

ii. Le chemin emprunté par la lumière minimise le temps t de parcours. Pour étudier les variations de t et identifier les éventuels extrema, on calcule

$$t'(x) = \frac{x}{c_1\sqrt{H^2+x^2}} - \frac{(L-x)}{c_2\sqrt{(L-x)^2+H^2}}$$

Les solutions de $t'(x) = 0$ (points stationnaires) sont telles que

$$\frac{x}{c_1\sqrt{H^2+x^2}} = \frac{(L-x)}{c_2\sqrt{(L-x)^2+H^2}}$$

ou encore

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2} \tag{†}$$

puisque

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{H^2+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta_2 = \frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2+H^2}}$$

Puisque la fonction t est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle ne peut présenter un minimum qu'en un point où sa dérivée s'annule. La condition (†) doit donc nécessairement être remplie par le rayon lumineux.

Prof. Éric J.M.DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Septembre 2017

Consignes :
- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées.*
  Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *L'examen se termine à 16h30.*

Question I

On considère la fonction

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 + a)$$

où a désigne un paramètre réel strictement positif. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,

i. déterminez le domaine de définition de f ;
ii. déterminez sa parité éventuelle ;
iii. déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f ;
iv. étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema ;
v. esquissez le graphe de f.

Question II

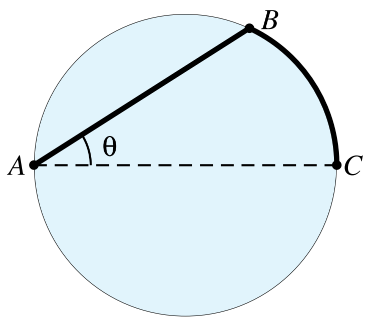
On considère les intégrales

$$S_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx \qquad \text{et} \qquad C_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x \, dx$$

i. Calculez C_0.
ii. Calculez S_1.
iii. Montrez que, pour tout $n > 0$,
$$C_n = \alpha^n - nS_{n-1}$$
où α désigne une constante à déterminer.
iv. De ce qui précède, déduisez la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \left(\arcsin x\right)^2 dx$.

Question III

Un canard se trouvant en A au bord d'un lac circulaire de rayon R souhaite atteindre le point C diamétralement opposé du lac. Pour ce faire, il peut nager en ligne droite de A à C, marcher le long de la berge de A à C ou nager en ligne droite depuis son point de départ jusqu'à un point intermédiaire B situé sur la berge puis marcher le long du bord de B à C (voir figure).



Sachant que ce canard marche deux fois plus vite qu'il ne nage, déterminez la trajectoire la plus rapide pour atteindre le point C. Justifiez.

Solution type

Question I

i. Quelle que soit la valeur du paramètre a, la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 + a)$ est définie $\forall x \in \mathbb{R}$. On a donc $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$.

ii. Puisque, quelle que soit la valeur du paramètre a,

$$f(-x) = \mathrm{e}^{x}(x^2 + a) \begin{cases} \neq +f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}$$

la fonction n'est ni paire, ni impaire.

iii. • La fonction ne présente pas d'asymptote verticale puisque son domaine est $\mathbb{R}$.

• Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}(x^2+a) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+a}{\mathrm{e}^x} = \text{“}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\text{”} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^x} = \text{“}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\text{”} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x} = 0 \end{aligned}$$

où les indéterminations successives sont levées en appliquant la règle de l'Hospital. De façon alternative, ce résultat peut être obtenu en se basant sur le fait que l'exponentielle e^{-x} décroît plus vite que n'importe quelle puissance de x au voisinage de l'infini.
Plus précisément, la fonction f étant strictement positive sur son domaine de définition, on a, quelle que soit la valeur du paramètre a,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}(x^2+a) = 0^+$$

La fonction présente donc l'asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ qu'elle approche par le dessus.

• Au voisinage de $-\infty$, on a, quelle que soit la valeur du paramètre a,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}(x^2+a) = +\infty$$

La fonction ne présente donc pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.
Pour identifier la présence d'une éventuelle asymptote oblique, on calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\frac{x^2+a}{x} = +\infty$$

et la fonction ne présente donc pas non plus d'asymptote oblique en $-\infty$.

iv. La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}(x^2+a) + \mathrm{e}^{-x}(2x) = \mathrm{e}^{-x}(-x^2+2x-a)$$

Ses zéros sont obtenus en résolvant l'équation du second degré

$$-x^2 + 2x - a = 0$$

dont le discriminant est donné par

$$\rho = 4 - 4a = 4(1-a)$$

On distingue donc les cas suivants.

$\boxed{0 < a < 1}$ Le discriminant est positif et f' possède les deux zéros

$$x_1 = 1 - \sqrt{1-a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 1 + \sqrt{1-a}$$

Les variations de f sont décrites par

x		x_1		x_2	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

La fonction étant décroissante à gauche de x_1 et croissante à sa droite, elle présente un minimum local en ce point. La fonction f présente un maximum local en x_2 puisqu'elle est croissante à gauche et décroissante à droite.

$\boxed{a = 1}$ Dans ce cas, le discriminant est nul et la dérivée s'annule uniquement en $x = 1$. On a

x		1	
f'	$-$	0	$-$
f	$\searrow$	Tangente horizontale	$\searrow$

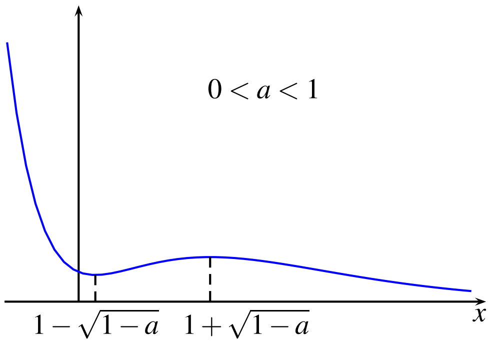
La fonction ne présente aucun extremum local. Elle est décroissante sur l'ensemble de son domaine.

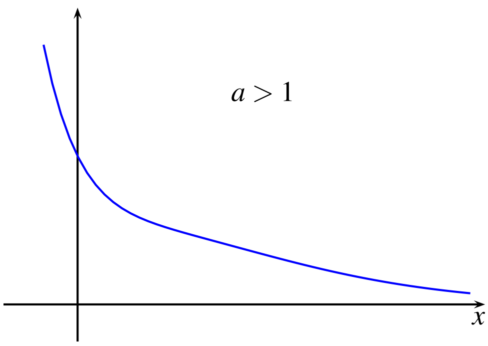
$\boxed{a > 1}$ Dans ce cas, le discriminant est négatif et la dérivée ne s'annule pas. On a

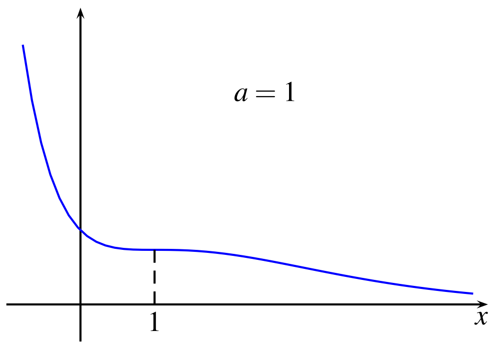
x			
f'	$-$	$-$	$-$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

La fonction ne présente aucun extremum local. Elle est décroissante sur l'ensemble de son domaine.

v. En fonction des résultats précédents et, en particulier, de la discussion menée au point précédent, on peut esquisser le graphe de f de la façon suivante en tenant compte du fait que $f > 0$ sur $\mathbb{R}$ et en distinguant les cas $0 < a < 1$, $a = 1$ et $a > 1$:







Question II

i.
$$C_0 = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

ii.
$$S_1 = \int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx$$

Par application de la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f g' dx = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f' g\, dx$$

avec

$$\begin{cases} f = x \\ g' = \sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = 1 \\ g = -\cos x \end{cases}$$

on obtient

$$S_1 = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = C_0 = 1$$

iii. $\forall n > 0$,

$$C_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x\, dx$$

Par application de la formule d'intégration par parties avec

$$\begin{cases} f = x^n \\ g' = \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = nx^{n-1} \\ g = \sin x \end{cases}$$

on obtient

$$C_n = \Big[x^n \sin x\Big]_0^{\pi/2} - n\int_0^{\pi/2} x^{n-1} \sin x\, dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - nS_{n-1}$$

qui est la relation donnée avec $\alpha = \pi/2$.

iv. L'intégrale

$$\int_0^1 \big(\arcsin x\big)^2 dx$$

peut être transformée par le changement de variable $x = \sin t$, ($dx = \cos t\ dt$) en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big[\arcsin(\sin t)\big]^2 \cos t\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t\ dt = C_2$$

où, en utilisant les résultats des points ii. et iii.,

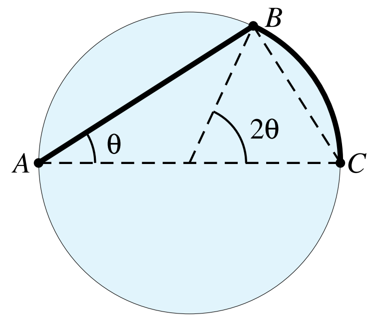
$$C_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2S_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Question III

En s'appuyant sur la signification de l'angle θ, on remarque tout d'abord que seules les valeurs de $\theta \in [0, \pi/2]$ doivent être considérées. Le cas $\theta = 0$ correspond à la nage en ligne droite de A à C, alors que, pour $\theta = \pi/2$, le canard ne fait que marcher le long de la berge.

Conformément à l'énoncé du problème, on note v la vitesse de nage du canard et $2v$ sa vitesse de marche.

D'une part, le triangle ABC étant rectangle en B, on a



$$|AB| = |AC| \cos\theta = 2R\cos\theta$$

et le temps de parcours du segment AB à la vitesse v est donné par

$$t_{AB} = \frac{|AB|}{v} = \frac{2R\cos\theta}{v}$$

D'autre part, l'angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{BC}$ étant le double de l'angle inscrit θ, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ est égale à $2\theta R$ et le temps de parcours correspondant, à la vitesse $2v$ est donné par

$$t_{BC} = \frac{2\theta R}{2v} = \frac{\theta R}{v}$$

Au total, le temps de parcours le long de la trajectoire ABC est donc égal à

$$t(\theta) = t_{AB} + t_{BC} = \frac{2R\cos\theta}{v} + \frac{\theta R}{v}$$

Afin d'identifier la trajectoire la plus rapide, étudions les variations de cette fonction pour $\theta \in [0, \pi/2]$. On calcule

$$t'(\theta) = -\frac{2R\sin\theta}{v} + \frac{R}{v}$$

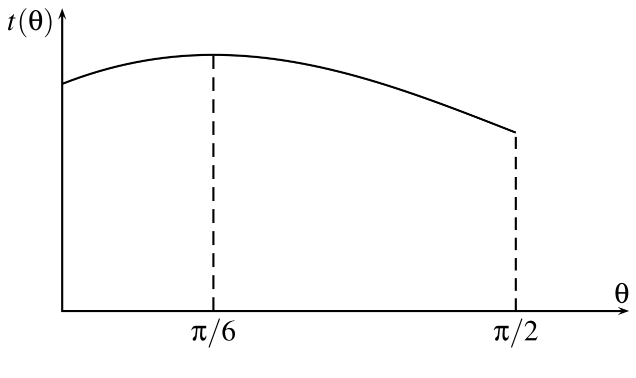
dont le seul zéro dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ est donné par

$$\sin\theta^\star = \frac{1}{2} \qquad \text{soit} \qquad \theta^\star = \frac{\pi}{6}$$

Les variations de $t(\theta)$ sont donc décrites par

θ	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$t'(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
t	$\nearrow$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\searrow$

De ce tableau, il ressort que le temps de parcours est maximum pour $\theta = \pi/6$ et présente l'allure suivante



Le minimum recherché est donc réalisé aux bornes de l'intervalle, *i.e.* pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$. En comparant les valeurs correspondantes du temps de parcours

$$t(0) = \frac{2R}{v} \qquad \text{et} \qquad t(\pi/2) = \frac{\pi R}{2v}$$

on en déduit que celui-ci est minimum pour $\theta = \pi/2$. Le trajet le plus rapide est donc réalisé en marchant le long de la berge du point A au point C.

Prof. Éric J.M.DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

Admission aux études d'ingénieur civil
Épreuve d'analyse

Juillet 2017

Consignes :

- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées.*
  Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *L'examen se termine à 12h00.*

Question I

La fonction coth, appelée cotangente hyperbolique, peut être définie par

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

i. Déterminez son domaine de définition.
ii. Déterminez sa parité éventuelle.
iii. Déterminez les éventuelles asymptotes de son graphe.
iv. Étudiez la croissance/décroissance de coth et caractérisez ses éventuels extrema.
v. Étudiez la concavité du graphe et déterminez ses éventuels points d'inflexion.
vi. Esquissez le graphe de coth.
vii. Sans calcul supplémentaire, esquissez le graphe de la fonction réciproque de la fonction coth. Précisez son domaine de définition.

Question II

Calculez les intégrales et primitives suivantes où R est une constante strictement positive.

i.
$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

ii.
$$\int x\sqrt{R^2 - x^2} \, dx$$

iii.
$$\int \sqrt{R^2 - x^2} \, dx$$

Question III

Une citerne à gaz en tôle a la forme d'un cylindre à base circulaire de rayon r soudé à deux demi-sphères de même rayon.

Sachant que le prix de la tôle est de γ euros par mètre carré et que le prix de la soudure (aux jonctions entre le cylindre et les demi-sphères) est de $\gamma\,\ell$ euros par mètre, où γ et ℓ sont des constantes strictement positives, montrez qu'il existe un rayon optimum r^* permettant de minimiser le coût de réalisation de cette citerne pour un volume $V = 2\pi\ell^3/3$ donné.

Exprimez r^* en fonction de ℓ.

Solution type

Question I

Soit la fonction à étudier

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

i. La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, il faut seulement exclure les points où le dénominateur de la fraction s'annule, c'est-à-dire tels que $e^x = e^{-x}$ ou encore $x = -x$ soit $x = 0$. Le domaine est donc $\mathbb{R}_0$.

ii. La fonction est définie sur un domaine symétrique par rapport à l'origine et

$$\coth(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = -\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -\coth x$$

La fonction est donc impaire et toutes ses caractéristiques sur $\mathbb{R}_0^-$ pourront être déduites de celles sur $\mathbb{R}_0^+$.

iii. • On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{e^{2x}-1} = +\infty$$

et aussi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -\infty$$

La fonction présente donc une asymptote verticale en $x = 0$.

• On a

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = 1$$

La fonction présente donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ pour $x \to +\infty$. Celle-ci est approchée par valeurs supérieures car

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = 1^+$$

puisque le numérateur est toujours plus grand que le dénominateur.

Vu son caractère impair, la fonction présente aussi une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ pour $x \to -\infty$. Celle-ci est approchée par valeurs inférieures.

• Il n'y a pas d'asymptote oblique puisqu'il y a déjà des asymptotes horizontales pour $x \to \pm\infty$.

iv. Pour rechercher les éventuels extrema, on calcule

$$\begin{aligned}\coth'(x) &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2} < 0\end{aligned}$$

La fonction est donc strictement décroissante sur son domaine de définition et ne présente pas d'extremum.

v. Une nouvelle dérivation conduit à

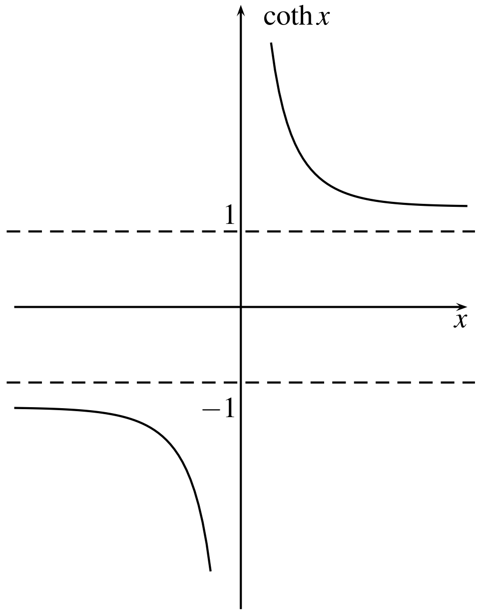
$$\coth''(x) = 8\,\frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^3}$$

dont les caractéristiques sont reportées dans le tableau ci-dessous.

x		0	
$\coth''(x)$	$-$	$\nexists$	$+$
$\coth(x)$	$\frown$	$\nexists$	$\smile$

La dérivée seconde change de signe en $x = 0$ et le graphe tourne sa concavité vers le bas à gauche de $x = 0$ et vers le haut à droite de $x = 0$. Il n'y a cependant pas de point d'inflexion puisque la fonction n'est pas définie en $x = 0$.

vi. Rassemblant les informations obtenues ci-dessus, on peut représenter le graphe de la fonction coth.



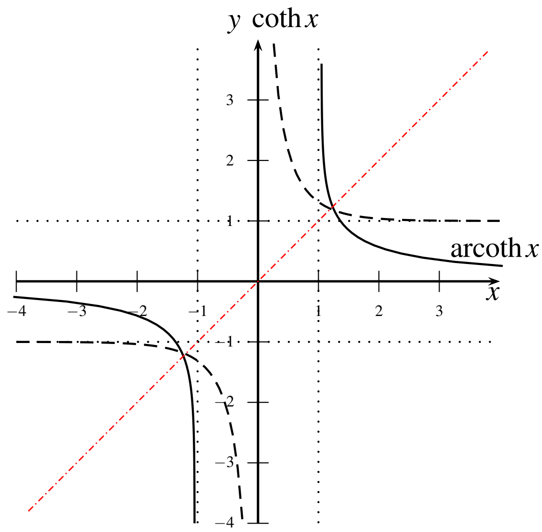
vii. La fonction coth étant injective, c'est-à-dire telle que

$$\forall x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}_0,\, x_1 \neq x_2, \quad \coth x_1 \neq \coth x_2\,,$$

on peut définir la fonction réciproque arcoth sur le domaine des valeurs de coth,

$$]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Les graphes de coth et arcoth peuvent être déduits l'un de l'autre par une symétrie orthogonale utilisant la bissectrice principale $y = x$ comme axe.



Question II

i.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

ii.

$$\int x\sqrt{R^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{3/2}+C = -\frac{(R^2-x^2)^{3/2}}{3}+C$$

où C est une constante.

iii.

$$\int \sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

On pose $x = R\sin t$, $dx = R\cos t dt$, ce qui transforme la primitive à calculer en

$$\int R^2\cos^2 t\,dt = R^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)+C$$

où C est une constante et où on a utilisé un résultat du point i.

Remplaçant t par $\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)$, on peut alors écrire successivement

$$\int \sqrt{R^2-x^2}\,dx = \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}+\frac{R^2}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{R}\right)+C$$

$$= \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}+\frac{R^2}{2}\sin\left(\arcsin\frac{x}{R}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{R}\right)+C$$

$$= \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}+\frac{Rx}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}+C$$

Question III

Notant r le rayon du cylindre et des demi-sphères et introduisant la variable h comme hauteur du cylindre, le volume V de la citerne et son aire latérale A sont donnés respectivement par

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}+\pi r^2 h \quad \text{et} \quad A = 4\pi r^2+2\pi r h$$

L'expression du volume V permet d'écrire

$$h = \frac{V}{\pi r^2}-\frac{4}{3}r$$

En injectant ce résultat dans l'expression de A, on peut exprimer l'aire comme fonction de la seule variable r, soit

$$A(r) = 4\pi r^2+2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}-\frac{4}{3}r\right) = \frac{4\pi r^2}{3}+\frac{2V}{r}$$

soit, en utilisant la valeur $V = 2\pi\ell^3/3$ donnée dans l'énoncé,

$$A(r) = \frac{4\pi r^2}{3}+\frac{4\pi\ell^3}{3r} = \frac{4\pi}{3}\left(r^2+\frac{\ell^3}{r}\right)$$

Le coût de fabrication incluant le prix de la tôle et celui des soudures est donc de

$$C(r) = \frac{4\pi}{3}\left(r^2+\frac{\ell^3}{r}\right)\gamma+4\pi r\,\ell\,\gamma$$

Pour étudier les variations de C et identifier les éventuels extrema, on calcule

$$C'(r) = \frac{4\pi}{3}\left(2r - \frac{\ell^3}{r^2}\right)\gamma + 4\pi\ell\,\gamma = \frac{4\pi\gamma}{3}\left(2r - \frac{\ell^3}{r^2} + 3\ell\right)$$

Les points stationnaires sont donc solutions de

$$2r - \frac{\ell^3}{r^2} + 3\ell = 0$$

ou encore

$$2\left(\frac{r}{\ell}\right)^3 + 3\left(\frac{r}{\ell}\right)^2 - 1 = 0$$

Cette cubique admet de façon évidente le zéro $r/\ell = -1$. La règle de Horner permet alors de transformer l'équation à résoudre en

$$\left(\frac{r}{\ell} + 1\right)\left[2\left(\frac{r}{\ell}\right)^2 + \frac{r}{\ell} - 1\right] = 0$$

soit, finalement,

$$\left(\frac{r}{\ell} + 1\right)^2\left(\frac{r}{\ell} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Le seul point stationnaire qui a un sens dans ce problème est donc $r = \ell/2$.

L'étude du signe de la dérivée

r	0		$\ell/2$		$+\infty$
C'		$-$	0	$+$	
C		$\searrow$	min	$\nearrow$	

montre que la fonction est décroissante à gauche de $r = \ell/2$ et croissante à droite.

Dès lors le coût est minimum pour

$$r^* = \ell/2$$

et la hauteur h correspondante vaut 2ℓ.

Université de Liège

Prof. Éric J.M. DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Septembre 2016

Consignes :

- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées.*
  Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 16h30.*

Question I

Soit la fonction

$$f(x) = \ln \frac{a^2 + x^2}{ax}$$

où a représente un paramètre réel strictement positif.

En discutant s'il y a lieu en fonction de a,

i. déterminez le domaine de définition de la fonction f et ses éventuelles asymptotes ;
ii. étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema ;
iii. étudiez la concavité de f et identifiez ses éventuels points d'inflexion ;
iv. sur base des informations recueillies, esquissez le graphique de f.

Question II

On considère les intégrales du type

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, d\theta \qquad \text{où} \qquad n \in \mathbb{N}$$

i. Calculez I_0, I_1, I_2 et I_3.
ii. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

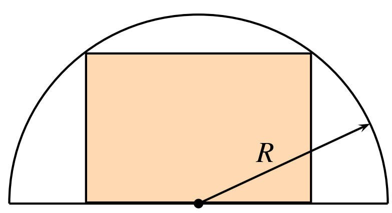
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

iii. Utilisez les résultats ci-dessus pour calculer

$$I_7 = \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta \, d\theta$$

Question III

On inscrit un rectangle dans un demi-cercle de rayon R en faisant en sorte qu'un côté du rectangle s'appuie sur le diamètre du demi-cercle comme illustré ci-contre.
Quelle est la fraction maximale de la surface du demi-cercle qui peut être ainsi recouverte ?



SOLUTION TYPE

Question I

i. La fonction ln étant définie sur $]0,+\infty[$ et le paramètre a étant strictement positif, la fonction

$$f(x)=\ln\frac{a^2+x^2}{ax}$$

est définie sur $]0,+\infty[$.
On a

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\frac{a^2+x^2}{ax}=+\infty \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{a^2+x^2}{ax}=+\infty$$

Dès lors, le graphique de f présente une asymptote verticale $x=0$.

Pour examiner l'existence d'une éventuelle asymptote horizontale, on calcule

$$\lim_{x\to +\infty}\ln\frac{a^2+x^2}{ax}=+\infty \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{a^2+x^2}{ax}=+\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.
Pour identifier une éventuelle asymptote oblique, on évalue

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\frac{a^2+x^2}{ax}}{x}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

qui est indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant le théorème de L'Hospital, soit

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\left[\ln\frac{a^2+x^2}{ax}\right]'}{[x]'}=\lim_{x\to +\infty}\left[\ln(a^2+x^2)-\ln(ax)\right]'=\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{2x}{a^2+x^2}-\frac{1}{x}\right]=0$$

Le résultat étant nul, il n'existe pas d'asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

ii. La dérivée de f est donnée par

$$f'(x)=\left[\ln(a^2+x^2)-\ln(ax)\right]'=\frac{2x}{a^2+x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-a^2}{x(a^2+x^2)}$$

Le seul point du domaine de définition où f' s'annule est situé en $x=a$. Les variations de f sont décrites par

x	0		a	
x^2-a^2	$-$	$-$	0	$+$
x	0	$+$	$+$	$+$
a^2+x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nexists$	$\searrow$	min	$\nearrow$

La fonction étant décroissante à gauche de $x=a$ et croissante à droite, elle présente un minimum local en ce point. On note que

$$f(a)=\ln 2>0$$

iii. La dérivée seconde de f est donnée par

$$\begin{aligned} f''(x)=\left(\frac{x^2-a^2}{a^2x+x^3}\right)' &= \frac{2x(a^2x+x^3)-(x^2-a^2)(a^2+3x^2)}{x^2(a^2+x^2)^2}\\ &= \frac{a^4+4a^2x^2-x^4}{x^2(a^2+x^2)^2}\end{aligned}$$

Les zéros de f'' à considérer sont les solutions réelles et positives de l'équation bicarrée

$$x^4 - 4a^2x^2 - a^4 = 0$$

Posant $z = x^2$, celle-ci peut s'écrire

$$z^2 - 4a^2z - a^4 = 0$$

dont les solutions sont

$$z_{1,2} = \frac{4a^2 \pm \sqrt{16a^4 + 4a^4}}{2} = (2 \pm \sqrt{5})a^2$$

Le seul zéro positif de f'' est donc $\sqrt{2+\sqrt{5}}a$.
La concavité du graphe peut être étudiée à partir du signe de f'', soit

x	0		$\sqrt{2+\sqrt{5}}a$	
f''	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\nexists$	$\smile$	P.I.	$\frown$

La concavité changeant de part et d'autre de $\sqrt{2+\sqrt{5}}a$, la fonction présente un point d'inflexion en ce point. On note que

$$f(\sqrt{2+\sqrt{5}}a) = \ln \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}}$$

iv. Sur base des informations recueillies plus haut, on peut dresser le tableau récapitulatif suivant :

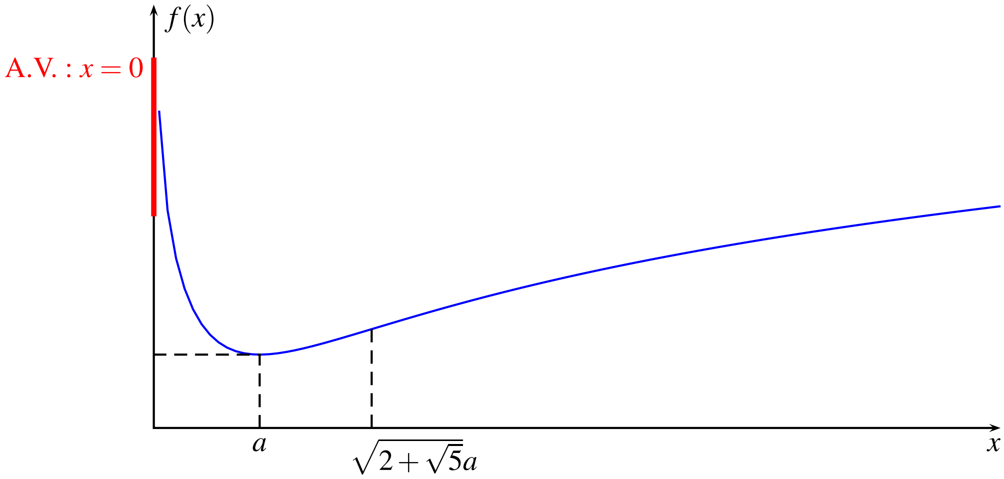
x	0		a		$\sqrt{2+\sqrt{5}}a$		
f'	$\nexists$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
f''	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$: A.V.		$\ln 2$		$\ln \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}}$		$+\infty$
		$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	
		$\smile$	$\smile$	$\smile$	P.I.	$\frown$	

Remarquons que la fonction est toujours positive puisque sa valeur minimale est égale à $\ln 2$. On peut aussi vérifier directement que l'équation

$$\ln \frac{x^2+a^2}{ax} = 0 \qquad \text{soit} \qquad x^2 + a^2 = ax$$

ne possède pas de solution réelle (le discriminant, $-3a^2$, est strictement négatif) de sorte que f ne s'annule pas sur son domaine de définition.

On peut donc esquisser le graphe de f de la façon suivante :



Question II

i. On calcule aisément

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\pi/2} d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\\
I_1 &= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta = \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} = 1\\
I_2 &= \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Pour calculer I_3, on transforme d'abord l'intégrale selon

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \sin\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$$

Ensuite, introduisant le changement de variable $\cos\theta = u$, auquel correspond $-\sin\theta\, d\theta = du$, il vient

$$I_3 = -\int_1^0 (1-u^2)du = \int_0^1 (1-u^2)du = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

ii. Pour évaluer I_{n+2}, développons d'abord l'intégrale selon

$$
\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta(1-\cos^2\theta)\, d\theta\\
&= I_n - \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta \cos^2\theta\, d\theta
\end{aligned}
$$

Appliquant ensuite la formule d'intégration par parties

$$\int_0^{\pi/2} f'(\theta)g(\theta)d\theta = \Big[f(\theta)g(\theta)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} f(\theta)g'(\theta)d\theta$$

à la seconde intégrale en posant

$$\begin{cases} f'(\theta) = \cos\theta \sin^n\theta \\ g(\theta) = \cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} f(\theta) = \dfrac{\sin^{n+1}\theta}{n+1} \\ g'(\theta) = -\sin\theta \end{cases}$$

il vient

$$I_{n+2} = I_n - \left[\cos\theta \frac{\sin^{n+1}\theta}{n+1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin\theta \frac{\sin^{n+1}\theta}{n+1}\, d\theta$$
$$= I_n + 0 - \frac{I_{n+2}}{n+1}$$

Dès lors, comme annoncé,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

iii. Utilisant les résultats ci-dessus successivement pour $n = 5$ et $n = 3$, on a

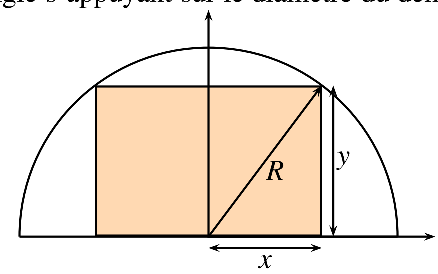
$$I_7 = \frac{6}{7} I_5 = \frac{6}{7}\frac{4}{5} I_3$$

Sachant que $I_3 = 2/3$, il vient finalement

$$I_7 = \frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3} = \frac{16}{35}$$

Question III

Notons $2x$ la longueur du rectangle s'appuyant sur le diamètre du demi-cercle et y sa hauteur.



Par Pythagore, on a

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

L'aire du rectangle est donc décrite par la fonction

$$f(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}, \qquad x \in [0, R]$$

Pour identifier le maximum de cette fonction, on calcule

$$f'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2(R^2 - 2x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Le seul zéro positif de f' correspond à $x^\star = \frac{\sqrt{2}}{2}R$. Ce point correspond bien à l'aire maximale puisque, comme le montre l'étude du signe de f', f est croissante à gauche de $x^\star$ et décroissante à droite :

x	0		$\sqrt{2}R/2$		R
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0

En conclusion, l'aire maximale du rectangle inscrit est égale à

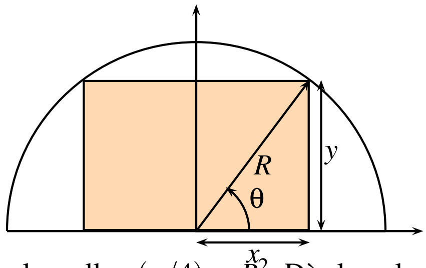
$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right) = R^2$$

L'aire totale du demi-disque étant égale à $\pi R^2/2$, la fraction maximale recherchée est égale à $2/\pi$.

De façon alternative, on peut décrire le rectangle inscrit dans le demi-cercle par l'angle au centre θ repérant la position d'un coin du rectangle appartenant au cercle tel qu'illustré ci-dessous.

En fonction de cette variable, on a

$$y = R\sin\theta, \qquad x = R\cos\theta$$



de sorte que l'aire du rectangle est décrite par la fonction

$$g(\theta) = 2xy = 2R^2 \sin\theta\cos\theta = R^2 \sin 2\theta, \qquad \theta \in [0,\pi]$$

La valeur maximale du sin est atteinte pour $2\theta = \pi/2$, soit $\theta = \pi/4$, pour laquelle $g(\pi/4) = R^2$. Dès lors, la fraction maximale du demi-cercle recouverte par le rectangle est de $2/\pi$.

Université de Liège

Prof. Éric J.M. DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Juillet 2016

Consignes :
- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées.*
  Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 12h00.*

Question I

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3}$$

où a représente un paramètre réel non nul.

En discutant s'il y a lieu en fonction de a,

i. déterminez le domaine de définition de la fonction f et ses éventuelles asymptotes ;
ii. étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema ;
iii. sur base des informations recueillies, esquissez le graphe de f.

Question II

i. Calculez

$$I_0 = \int \ln x \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int x \ln x \, dx$$

ii. Pour tout $\ell \in]0,1[$, on définit

$$J_n(\ell) = \int_\ell^1 x^n \ln x \, dx \qquad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}$$

Calculez

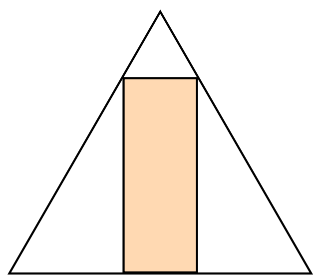
$$\lim_{\ell \to 0^+} J_n(\ell)$$

iii. Calculez

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

Question III

On inscrit un rectangle dans un triangle équilatéral en faisant en sorte qu'un côté du rectangle s'appuie sur un côté du triangle comme illustré ci-contre.
Quelle est la fraction maximale de la surface du triangle qui peut être ainsi recouverte ?



Question I

i. La fonction est définie pour tous les x tels que

$$x^3 - a^3 \neq 0$$

soit

$$(x-a)(x^2+ax+a^2) \neq 0$$

Dans les conditions envisagées ($a \neq 0$), le discriminant du trinôme du second degré est toujours négatif, *i.e.*

$$\rho = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0$$

Dès lors,

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \backslash \{a\}$$

On peut cependant remarquer que

$$f(x) = \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \frac{x+a}{x^2+ax+a^2}$$

et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x+a}{x^2+ax+a^2} = \frac{2}{3a}$$

de sorte que la fonction ne possède pas d'asymptote verticale mais peut être prolongée continûment en $x = a$ en posant $f(a) = 2/(3a)$.

Les éventuelles asymptotes horizontales peuvent être identifiées en calculant

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+a}{x^2+ax+a^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ce qui montre que f approche l'asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Notons que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

L'asymptote horizontale est donc approchée par valeurs inférieures au voisinage de $-\infty$ et par valeurs supérieures au voisinage de $+\infty$.
Comme f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$, il n'y a pas d'asymptote oblique.

ii. Pour identifier les éventuels extrema, on calcule

$$f'(x) = \left(\frac{x+a}{x^2+ax+a^2}\right)' = \frac{x^2+ax+a^2-(2x+a)(x+a)}{(x^2+ax+a^2)^2} = \frac{-x(x+2a)}{(x^2+ax+a^2)^2}$$

La dérivée première s'annule en $x_1 = 0$ et $x_2 = -2a$.

- Si $a > 0$, on a $x_2 < x_1 < a$ et on peut dresser le tableau de variation suivant

x		$-2a$		0		a	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	$\nexists$	-
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

  La fonction étant décroissante à gauche de $x_2 = -2a$ et croissante à droite, elle y présente un minimum local. De même, f étant croissante à gauche de $x_1 = 0$ et décroissante à droite, elle présente un maximum local en $x = 0$. On calcule aisément

$$f(-2a) = -\frac{1}{3a} < 0, \qquad f(0) = \frac{1}{a} > 0$$

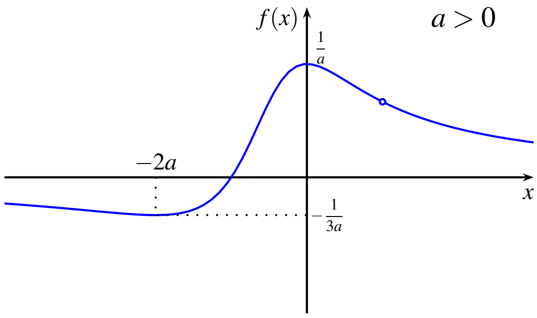
- Si $a < 0$, on a $a < x_1 < x_2$ et on peut dresser le tableau de variation suivant

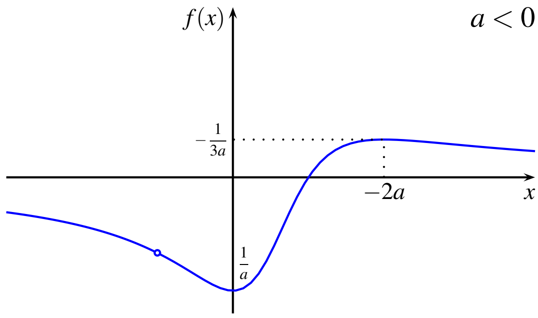
x		a		0		$-2a$	
$f'(x)$	-	$\nexists$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

La fonction étant décroissante à gauche de $x_1 = 0$ et croissante à droite, elle y présente un minimum local. De même, f étant croissante à gauche de $x_2 = -2a$ et décroissante à droite, elle présente un maximum local en cette abscisse.
On a

$$f(-2a) = -\frac{1}{3a} > 0, \qquad f(0) = \frac{1}{a} < 0$$

iii. En rassemblant les résultats obtenus précédemment, on peut esquisser le graphe de f en distinguant les cas $a > 0$ et $a < 0$.





Question II

i. On calcule les primitives demandées par primitivation par parties

$$I_0 = \int (x)' \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x = -x + x \ln x + C$$

où C est une constante arbitraire.

$$I_1 = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \mathrm{d}x = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} \ln x + C$$

où C est une constante arbitraire.

ii. On peut calculer les intégrales demandées en intégrant à nouveau par parties

$$\begin{aligned}
J_n(\ell) = \int_\ell^1 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \ln x \, dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x\right]_\ell^1 - \int_\ell^1 \frac{x^n}{n+1} dx \\
&= -\frac{\ell^{n+1}}{n+1} \ln \ell - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\ell^1 \\
&= -\frac{\ell^{n+1}}{n+1} \ln \ell + \frac{\ell^{n+1} - 1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Cette expression n'est pas définie pour $\ell = 0$. On peut cependant calculer

$$\lim_{\ell \to 0^+} J_n(\ell) = -\lim_{\ell \to 0^+} \left[\frac{\ell^{n+1}}{n+1} \ln \ell\right] - \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

puisque, par le théorème de l'Hospital, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\ell \to 0^+} \ell^{n+1} \ln \ell = \lim_{\ell \to 0^+} \frac{\ln \ell}{\ell^{-(n+1)}} = \lim_{\ell \to 0^+} \frac{\frac{1}{\ell}}{-(n+1)\ell^{-(n+2)}} = -\frac{1}{n+1} \lim_{\ell \to 0^+} \ell^{n+1} = 0$$

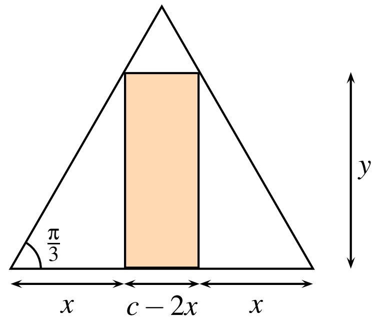
iii. Posant $t^2 = 1 - x^2$ avec $t > 0$, il vient $t\,dt = -x\,dx$ et

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx = -\int_1^0 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Question III

Soit c le côté du triangle et x la longueur laissée libre sur le demi-côté de ce triangle (voir figure). La base du rectangle mesure $c-2x$. L'autre côté du rectangle a une longueur notée y telle que

$$y = x \text{ tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}x$$



L'aire du rectangle s'exprime donc par

$$S(x) = y(c-2x) = \sqrt{3}x(c-2x)$$

où seules les valeurs de x dans l'intervalle $[0, c/2]$ doivent être prises en compte.

Remarquons qu'on retrouve bien $S(0) = 0$ (le rectangle dégénère en un segment de droite correspondant à la base du triangle) et $S(c/2) = 0$ (le rectangle dégénère en un segment de droite correspondant à la hauteur du triangle). Entre ces deux extrêmes, l'aire du rectangle est naturellement positive et possède un extremum.

On calcule aisément

$$S'(x) = \sqrt{3}(-2x+c-2x) = \sqrt{3}(c-4x)$$

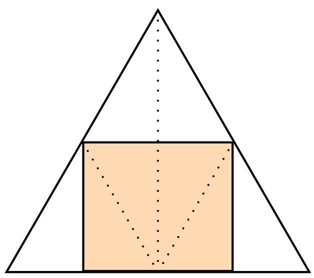
qui s'annule uniquement pour $x = c/4$. Les variations de S sont décrites par

x	0		c/4		$c/2$
$S'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$S(x)$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0

La surface est donc maximale pour $x = c/4$. Dans ce cas,

$$S(c/4) = \frac{c}{2}\frac{c}{4}\sqrt{3} = \frac{c^2\sqrt{3}}{8}$$

que l'on peut comparer à $c^2\sqrt{3}/4$, l'aire du triangle équilatéral. On dégage donc ainsi un taux de recouvrement du triangle de 50%, comme illustré ci-dessous.



Solution optimale

Admission aux Etudes d'Ingenieur Civil
Épreuve d'analyse

Prof. Vincent DENOEL

Septembre 2015

Consignes :
— Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
— Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.
— Préparez votre carte d'identité sur votre table.
— L'examen se termine à 12h00.

Question I

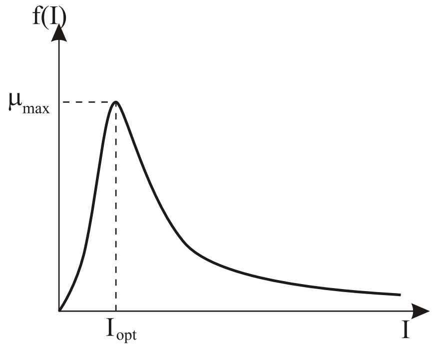
La fonction arch, appelée arccosinus hyperùbolique, peut être définie par

$$\operatorname{arch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Déterminez le domaine de définition de la fonction arch, ses éventuelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema, points d'inflexion et points à tangente verticale de son graphe. Sur base des résultats obtenus, esquissez le graphe de $\operatorname{arch}(x)$, en illustrant bien la concordance avec vos résultats préalables.

Question II

Par une série d'expériences réalisées dans des conditions d'éclairement contrôlées, on détermine que le taux de croissance d'une variété de légumineuse peut être décrit par la fonction $f(I)$ de l'éclairement I dont l'allure est représentée graphiquement ci-dessous.



Le taux de croissance

i. est positif,
ii. est nul sous un éclairement nul,
iii. est maximum et vaut μ_{max} (connu) pour un éclairement optimum I_{opt} (connu),
iv. tend vers zéro si l'éclairement tend vers l'infini.

Déterminez toutes les fonctions de la forme

$$f(I) = \frac{\alpha + \beta I}{1 + \delta I + \varepsilon I^2}$$

permettant de traduire la dépendance du taux de croissance en l'éclairement I en exprimant les constantes apparaissant dans cette expression en fonction des paramètres μ_{max}, I_{opt} positifs mesurés expérimentalement. Veillez à simplifier votre résultat au maximum.

Question III

On considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n}\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{Q}.$$

i. Calculez I_0,$I_{1/2}$, I_1, I_2 et I_4.
ii. Montrez que

$$I_n \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Question I

Domaine de définition

L'argument de la fonction ln doit être défini et strictement positif, ce qui conduit aux conditions

$$x^2 - 1 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad x + \sqrt{x^2-1} > 0.$$

La première de ces conditions implique que $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$. Quant à la seconde, elle implique

$$\sqrt{x^2-1} > -x.$$

Donc,

— si $x \leq -1$, les deux membres de l'inégalité sont positifs et, en élevant au carré, on obtient $x^2 - 1 > x^2$, ce qui est impossible ;

— si $x \geq 1$, le membre de gauche de l'inégalité est positif tandis que celui de droite est négatif et l'inégalité est vérifiée de facto.

Le domaine de définition de la fonction $\operatorname{arch}(x)$ est donc $[1, +\infty[$.

Asymptotes

Il est possible qu'il existe une asymptote horizontale ou oblique, pour $x \to +\infty$, vu le domaine de définition. On calcule donc

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = +\infty$$

ce qui montre qu'il n'existe pas d'asymptote horizontale et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x} &= \text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"} \underset{(\mathrm{H})}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{1}, \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{1} = 0\end{aligned}$$

par application du théorème de l'Hospital et car $\lim_{x\to+\infty} x/\sqrt{x^2-1} = 1$. Il n'y a pas d'asymptote oblique non plus.

Il n'y a pas d'asymptote verticale, en raison de la continuité de la fonction sur son domaine de définition $[1, +\infty[$.

Extrema et Points d'inflexion

On calcule successivement les deux premières dérivées de la fonction à étudier

$$\begin{aligned}(\operatorname{arch})'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \\ (\operatorname{arch})''(x) &= \left(\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{-x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

L'étude de signe de ces dérivées donne

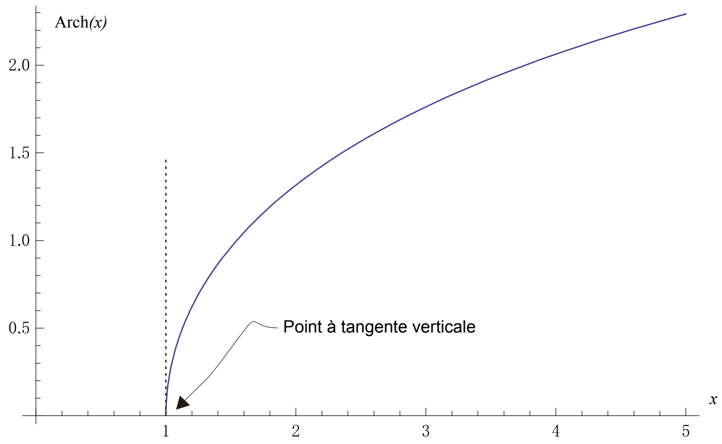
x		1	
$(\operatorname{arch})'(x)$		$\nexists$	$+$
$(\operatorname{arch})''(x)$		$\nexists$	$-$
$\operatorname{arch}(x)$	$\nexists$	Tg.V.	$\nearrow$
		$(1,0)$	$\frown$

On peut vérifier que

$$\lim_{x\to 1^+} (\mathrm{arch})'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty,$$

ce qui justifie que le point d'abscisse $x = 1$ est un point à tangente verticale.

Esquisse de la fonction



Question II

Soit la fonction

$$f(I) = \frac{\alpha + \beta I}{1 + \delta I + \varepsilon I^2}.$$

Puisque le taux de croissance est nul à éclairement nul, $f(0) = 0$, et donc $\alpha = 0$. Pour éviter toute solution triviale, il convient donc également que $\beta \neq 0$.

Le taux de croissance doit également tendre vers 0 pour $I \to +\infty$. En observant que

$$\lim_{I\to+\infty} f(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon \neq 0, \\ \frac{\beta}{\delta} \neq 0 & \text{si } \varepsilon = 0, \end{cases}$$

on peut conclure que ε doit nécessairement être non nul. La fonction que nous cherchons s'écrit donc

$$f(I) = \beta \frac{I}{1 + \delta I + \varepsilon I^2}$$

avec $\beta \neq 0$ et $\varepsilon \neq 0$. On sait également que $f(I)$ présente un optimum qui vaut $\mu_{\max}$ en $I = I_{opt}$, soit deux informations supplémentaires qui devraient réduire de deux unités le nombre de paramètres de ce problème. La dérivée première

$$f'(I) = \beta \frac{1 + \delta I + \varepsilon I^2 - I(\delta + 2\varepsilon I)}{(1 + \delta I + \varepsilon I^2)^2} = \beta \frac{1 - \varepsilon I^2}{(1 + \delta I + \varepsilon I^2)^2}$$

doit s'annuler lorsque $I = I_{opt}$ et donc il faut que $\varepsilon = 1/I_{opt}^2$. Par ailleurs, la valeur de la fonction $f(I)$ prise en I_{opt} vaut $\mu_{\max}$, donc

$$f(I_{opt}) = \beta \frac{I_{opt}}{1 + \delta I_{opt} + \varepsilon I_{opt}^2} = \beta \frac{I_{opt}}{2 + \delta I_{opt}} = \mu_{\max}.$$

Ceci conduit à

$$\delta = \frac{\beta}{\mu_{\max}} - \frac{2}{I_{opt}}.$$

Finalement, on obtient l'expression paramétrique suivante pour $f(I)$, avec β comme seul et unique paramètre,

$$f(I)=\beta\frac{I}{1+\left(\frac{\beta}{\mu\mathrm{max}}-\frac{2}{I_{opt}}\right)I+\frac{I^2}{I_{opt}^2}}=\beta\frac{I}{\left(1-\frac{I}{I_{opt}}\right)^2+\frac{\beta}{\mu\mathrm{max}}I}$$

où la seule restriction est $\beta>0$, pour que le taux de croissance à modéliser soit positif. Notons qu'en posant $\beta=\mu\mathrm{max}b^2/I_{opt}$ et $i=I/I_{opt}$, on peut également écrire cette loi sous une forme *adimensionnelle*

$$\frac{f(I)}{\mu\mathrm{max}}=\frac{i}{\left(\frac{i-1}{b}\right)^2+i}$$

et le paramètre b apparaît comme un paramètre d'étalement autour du pic de croissance.

Question III

i. On trouve les trois intégrales correspondant à $n=0$, 1 et 2 par intégration directe

$$I_0=\int_0^1\frac{x}{1+1}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}=0.25,$$

$$I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1+x}{1+x}-\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=[x-\ln(1+x)]_0^1=1-\ln 2\simeq 0.307,$$

$$I_2=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2\%\simeq 0.347.$$

On évalue $I_{1/2}$ à l'aide du changement de variable $t=1+\sqrt{x}$, soit $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x/\left(2\sqrt{x}\right)$, ce qui donne

$$I_{1/2}=\int_0^1\frac{x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t}\mathrm{d}t==2\int_1^2 t^2-3t+3-\frac{1}{t}\mathrm{d}t=2\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+3t-\ln t\right]_1^2=\frac{5}{3}-2\ln 2\simeq 0.280.$$

Quant à I_4, on l'évalue à l'aide du changement de variable $t=x^2$, soit $\mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$, ce qui donne

$$I_4=\int_0^1\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\left[\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\ t\right]_0^1=\frac{\pi}{8}\simeq 0.393.$$

ii. On peut démontrer que $I_n\leq I_{n+1}$ est observant que

$$\frac{x}{1+x^n}\leq\frac{x}{1+x^{n+1}},\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

lorsque $x\in[0,1]$ (puisque $1\geq x^n\geq x^{n+1}\geq 0$ dans ces conditions). On peut intégrer cette inégalité membre à membre, ce qui donne le résultat cherché. Une autre méthode consisterait à démontrer que $I_n - I_{n+1} \leq 0$. Il convient alors de calculer

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^n} - \frac{x}{1+x^{n+1}} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x\left(1+x^{n+1}-1-x^n\right)}{(1+x^n)\left(1+x^{n+1}\right)} \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)}{(1+x^n)\left(1+x^{n+1}\right)} \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

qui est bien négatif, puisque la fonction à intégrer est partout négative sur l'intervalle $[0;1]$.

On démontre maintenant que $I_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$. Les résultats du point (i.) montrent que $I_n \leq \frac{1}{2}$ pour $n \in \{0,1,2,4\}$. Par ailleurs, comme démontré ci-dessus, la suite des I_n est croissante, i.e. $I_n \leq I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Lorsque n est grand, x^n devient petit par rapport à 1 au dénominateur de l'intégrand. Pour toutes les valeurs entières de n, on a

$$1 + x^n \geq 1 \qquad \forall x \in [0,1]$$

Dès lors

$$\frac{x}{1+x^n} \leq x \qquad \forall x \in [0,1]$$

et

$$I_n = \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^n} \mathrm{d}x \leq \int\limits_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Université de Liège

Prof. Vincent DENOEL

ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Juillet 2015

Consignes :
— Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
— Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.
— Préparez votre carte d'identité sur votre table.
— L'examen se termine à 12h00.

Question I

La fonction arcth, appelée arctangente hyperbolique, peut être définie par

$$\operatorname{arcth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Déterminez le domaine de définition de la fonction arcth, ses éventuelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema et points d'inflexion de son graphe. Le cas échéant, déterminez l'équation de la tangente au(x) point(s) d'inflexion. Sur base des résultats obtenus, esquissez le graphe de $\operatorname{arcth}(x)$.

Question II

Calculez

i. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \, dx$

ii. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\, dx$

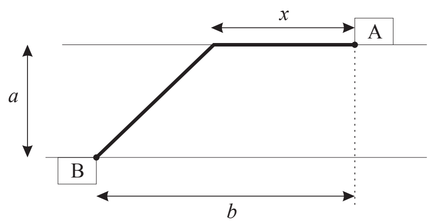
iii. $\displaystyle\int \sin^4 x \, dx$

iv. $\displaystyle\int_0^1 (1-x^3)dx$

v. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x \, dx$

Question III

Une entreprise installée sur les deux rives d'un fleuve supposé rectiligne (voir dessin) souhaite relier par fibre optique ses deux bâtiments A et B. Le tracé prévu est composé de deux segments rectilignes. Une partie du câble traverse le fleuve et l'autre est posée sur la berge. La pose du câble sur la berge coûte α € par mètre. Le coût par mètre est double, soit 2α € par mètre, lorsque le câble est posé dans le fleuve. Les paramètres a et b sont des données du problème et représentent la largeur de la rivière ainsi que la distance entre les deux implantations, projetée le long de la berge.



On souhaite minimiser le coût de l'installation.

i. Déterminez la longueur x du câble à poser sur la berge pour minimiser le coût dans le cas où $a = 30$ m et $b = 240$ m.

ii. Montrez que le câble doit relier les deux implantations A et B en ligne droite lorsque $a \geq \sqrt{3}b$.

Question I

 # Domaine de définition

L'argument de la fonction ln doit être défini et strictement positif, ce qui conduit aux conditions

$$1-x\neq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1+x}{1-x}>0$$

On étudie ces conditions à l'aide d'un tableau de signes, par exemple, soit

x		-1		1	
$\frac{1+x}{1-x}$	-	0	+	$\nexists$	-

et on trouve que $dom_f =]-1;1[$.

 # Asymptotes.

Il n'y a pas d'asymptote horizontale ni oblique, vu le domaine de définition.
On se limite donc à étudier l'existence possible d'asymptotes verticales :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1+x}{1-x}=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\operatorname{arcth}x=\frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{1+x}{1-x}=0^+ \Rightarrow \lim_{x\to -1^+}\operatorname{arcth}x=\frac{1}{2}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$$

Il existe donc deux asymptotes verticales en $x=\pm 1$.

 # Extrema et Points d'inflexion

On calcule successivement les deux premières dérivées de la fonction à étudier

$$(\operatorname{arcth})'(x)=\frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x^2},$$

$$(\operatorname{arcth})''(x)=\left(\frac{1}{1-x^2}\right)'=(-1)\left(1-x^2\right)^{-2}(-2x)=\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$$

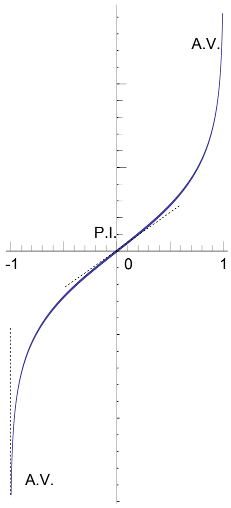
L'étude de signe de ces dérivées donne

x		-1		0		1	
$(\operatorname{arcth})'(x)$	$\nexists$	$\nexists$	+	+	+	$\nexists$	$\nexists$
$(\operatorname{arcth})''(x)$	$\nexists$	$\nexists$	-	0	+	$\nexists$	$\nexists$
$\operatorname{arcth}(x)$	$\nexists$	A.V.	$\nearrow$	P.I.	$\nearrow$	A.V.	$\nexists$
		$(-\infty)$	$\cap$	$(0,0)$	$\cup$	$(+\infty)$	

On accorde pour l'existence d'un point d'inflexion et son positionnement.
L'équation de la tangente au point d'inflexion est

$$\mathcal{T}(x)=\operatorname{arcth}(0)+x\operatorname{arcth'}(0)=x.$$

 # Esquisse de la fonction



Question II

i. $\int \mathrm{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + C$
la dernière égalité reposant sur la substitution $t = \cos x$.

ii. $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \, dx = \int \frac{1}{t^2} \, dt = -t^{-1} + C = \frac{-1}{1+e^x} + C$, où la substitution $t = 1 + e^x$ a été utilisée.

iii. En utilisant les formules de Carnot, on trouve successivement que

$$\begin{aligned}\sin^4 x = \sin^2 x \left(1 - \cos^2 x\right) = \sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{\sin^2 2x}{4} \\ = \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 4x}{8} = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int \sin^4 x \, dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

iv. $\int_0^1 \left(1 - x^3\right) \, dx = \left(x - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$

v. En procédant par parties, on trouve
$\int_0^{\pi/2} x \, \sin x \, dx = \left. -x \cos x \right|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \left. \sin x \right|_0^{\pi/2} = 1$

Question III

Le câble est composé de deux morceaux rectilignes de longueurs x et $\sqrt{a^2 + (b-x)^2}$ (par application du théorème de Pythagore). Etant donné que l'un coûte α (€/m) et que l'autre coûte 2α (€/m), nous pouvons écrire la fonction coût suivante

$$\mathcal{C}(x) = \alpha \left(x + 2\sqrt{a^2 + (b-x)^2} \right).$$

En écrivant ces relations, on admet que $x \geq 0$ car une longueur est toujours positive. De toute façon, le bon sens indique que la solution optimale doit nécessairement correspondre à une valeur de x positif.

On perçoit également que la solution optimale doit correspondre à une valeur de x inférieure à b. En effet, aux deux solutions $x = b \pm \delta$, où $\delta > 0$, on peut associer les coûts

$$\mathcal{C}(b-\delta) = \alpha\left(b - \delta + 2\sqrt{a^2+\delta^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}(b+\delta) = \alpha\left(b + \delta + 2\sqrt{a^2+\delta^2}\right),$$

et on constate que $\mathcal{C}(b+\delta) > \mathcal{C}(b-\delta)$. Il n'y a donc aucun intérêt à choisir une valeur de x supérieure à b.

Nous allons donc rechercher le coût minimum d'installation pour une valeur de x dans l'intervalle $[0;b]$. Etant donné que la fonction est continue et continument dérivable sur cet intervalle, le minimum de la fonction se trouve, soit aux bornes du domaine, soit au(x) point(s) stationnaire(s) de la fonction $\mathcal{C}(x)$, c'est-à-dire, ceux qui annulent la dérivée première.

La dérivée de la fonction coût s'écrit

$$\mathcal{C}'(x) = \alpha\left(1 + \frac{-2(b-x)}{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}\right).$$

La (Les) ordonnée(s) $x^\star$ annulant $\mathcal{C}'(x)$ satisfait (satisfont)

$$\frac{2(b-x^\star)}{\sqrt{a^2+(b-x^\star)^2}} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2(b-x^\star) = \sqrt{a^2+(b-x^\star)^2}$$

soit

$$4(b-x^\star)^2 = a^2+(b-x^\star)^2 \qquad \text{et} \qquad b - x^\star \geq 0$$

dont la seule solution est $\sqrt{3}(b-x^\star) = +a$, donc

$$x^\star = b - \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Pour les raisons énoncées ci-dessous, cette solution n'a de sens que si $x^\star \geq 0$, c'est-à-dire, si $a \leq b\sqrt{3}$. Dans le cas contraire, le point stationaire $x^\star$ de $\mathcal{C}(x)$ se trouve en dehors de l'intervalle $[0;b]$, si bien que l'optimum se trouve aux bornes du domaine. On peut alors calculer les valeurs du coût d'installation, aux deux bornes de l'intervalle, soit $\mathcal{C}(0) = 2\alpha\sqrt{a^2+b^2}$ et $\mathcal{C}(b) = 2\alpha\left(a+\frac{b}{2}\right)$. On vérifie facilement que $\mathcal{C}(0) \leq \mathcal{C}(b)$ lorsque $a > b\sqrt{3}$, et donc que le minimum se trouve en $x = 0$. En effet, puisque α, a et b sont des grandeurs positives, on a successivement

$$2\alpha\sqrt{a^2+b^2} \leq 2\alpha\left(a+\frac{b}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad a^2+b^2 \leq a^2+ab+\frac{b^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3b}{4} \leq a \quad \Leftarrow \quad b\sqrt{3} < a.$$

On pourrait également démotrer que $\mathcal{C}(0) \leq \mathcal{C}(b)$ en établissant que $\mathcal{C}'(x) > 0$ lorsque $a > b\sqrt{3}$.

En résumé, lorsque $a \leq b\sqrt{3}$, il existe un optimum en $x^\star = b - \frac{a\sqrt{3}}{3}$ qui se trouve dans l'intervalle $[0;b]$. Lorsque $a \geq b\sqrt{3}$, le minimum de la fonction coût se trouve à la borne inférieure de l'intervalle $[0,b]$, soit en $x^\star = 0$.

i. Lorsque $a = 30$m et $b = 240$m, on tombe sous la première condition et $x^\star = 222.7$m.

ii. Lorsque $a \geq b\sqrt{3}$, le minimum de la fonction coût se trouve en $x^\star = 0$. Cela signifie que la longeur du fibre optique posé sur la berge est nulle, et donc que le câble relie les deux implantations en ligne droite, ce qui établit le résultat énoncé.

Université de Liège

Prof. Éric J.M. DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Septembre 2014

Consignes :
- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.*
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 12h00.*

Question I

On considère la fonction
$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2})$$
où $\alpha > 0$ est un paramètre réel.

i. Déterminez le domaine de définition de f.
ii. Identifiez les éventuels extrema locaux de f.
iii. Identifiez les éventuels points d'inflexion du graphe de f.
iv. Déterminez toutes les valeurs de α pour lesquelles f est une fonction impaire.

Question II

Compte tenu de la résistance de l'air, la vitesse de chute d'un corps de masse m initialement abandonné sans vitesse est donnée par
$$v = \frac{mg}{c}\left[1 - \exp\left(-\frac{ct}{m}\right)\right]$$
où g désigne l'accélération de pesanteur, t est le temps et c est le coefficient de frottement fluide. Tous les paramètres sont strictement positifs.

i. Calculez la vitesse limite de chute, soit $v_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} v$ (en considérant m, g et c fixés).
ii. Calculez la vitesse de chute lorsque la résistance de l'air devient négligeable, soit $v_0 = \lim\limits_{c\to 0} v$ (en considérant m, g et t fixés).
iii. Calculez la vitesse de chute d'un corps très lourd, soit $v_m = \lim\limits_{m\to+\infty} v$ (en considérant c, g et t fixés).

Question III

Calculez les expressions suivantes :

i. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$
ii. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,dx$
iii. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$
iv. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.

SOLUTION TYPE

Question I

Soit la fonction à étudier

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2})$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre réél.

i. La fonction logarithme étant définie sur $]0, +\infty[$, la fonction f est définie pour les valeurs de x telles que

$$x + \sqrt{x^2 + \alpha^2} > 0$$

Cette inégalité étant toujours vérifiée si $\alpha > 0$, on en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$ pour tout $\alpha > 0$.

ii. Pour rechercher les éventuels extrema, on calcule

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} + x}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} > 0 \end{aligned}$$

La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et ne présente pas d'extremum.

iii. Une nouvelle dérivation conduit à

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[(x^2 + \alpha^2)^{-1/2}\right]' = -\frac{1}{2}(x^2 + \alpha^2)^{-3/2}(2x) \\ &= -\frac{x}{(x^2 + \alpha^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

dont le seul zéro et situé en $x = 0$.

x		0	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$	P.I.	$\frown$

La dérivée seconde s'annulant et changeant de signe en $x = 0$, le graphe présente un point d'inflexion en ce point où $f(0) = \ln \alpha$. Le graphe de f tourne sa concavité vers le haut à gauche de $x = 0$ et vers le bas à droite de $x = 0$.

iv. La fonction est impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit si

$$\ln(-x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2})$$

ou encore

$$\begin{aligned} 0 &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}) + \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}) \\ &= \ln\left[(-x + \sqrt{x^2 + \alpha^2})(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2})\right] \\ &= \ln \alpha^2 = 2 \ln \alpha \end{aligned}$$

La fonction étudiée est donc impaire pour la seule valeur de $\alpha = 1$.

Question II

Soit

$$v = \frac{mg}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-ct/m}\right)$$

i. La vitesse limite de chute est donnée par

$$v_\infty = \frac{mg}{c}\lim_{t\to+\infty}\left(1 - \mathrm{e}^{-ct/m}\right) = \frac{mg}{c}$$

ii. Si la résistance de l'air devient négligeable, on a

$$\begin{aligned} v_0 &= mg\lim_{c\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-ct/m}}{c} = mg\left[\frac{0}{0}\right] \\ &= mg\lim_{c\to 0}\frac{(t/m)\,\mathrm{e}^{-ct/m}}{1} = gt \end{aligned}$$

où on a utilisé l'Hopital pour lever l'indétermination.

iii. Dans le cas d'un objet très pesant, la vitesse de chute devient

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{g}{c}\lim_{m\to+\infty} m\left(1-\mathrm{e}^{-ct/m}\right) = \frac{g}{c}\left[\infty\cdot 0\right] \\ &= \frac{g}{c}\lim_{m\to+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-ct/m}}{1/m} = \frac{g}{c}\left[\frac{0}{0}\right] \\ &= \frac{g}{c}\lim_{m\to+\infty}\frac{(-ct/m^2)\,\mathrm{e}^{-ct/m}}{(-1/m^2)} \\ &= \frac{g}{c}(ct) = gt \end{aligned}$$

où on a utilisé l'Hopital pour lever l'indétermination.

Question III

i. $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \left[\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$

ii. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$

iii. Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$, on applique la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

avec

$$\begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \operatorname{arctg} x \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx &= \Big[x \operatorname{arctg} x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

iv. Par le changement de variable

$$\sqrt{x} = t, \qquad \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$$

on peut transformer la primitive selon

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}} &= 2\int \frac{dt}{1+t} \\ &= 2\ \ln(1+t)+C\end{aligned}$$

Exprimant ce résultat en fonction de la variable d'origine, il vient

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}} = 2\ \ln(1+\sqrt{x})+C$$

Université de Liège

Prof. Éric J.M. DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Juillet 2014

Consignes :
- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.*
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 12h00.*

Question I

La fonction th, appelée tangente hyperbolique, est définie par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Déterminez le domaine de définition de la fonction th, ses éventuelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema et points d'inflexion de son graphe. Sur base des résultats obtenus, esquissez le graphe de $\mathrm{th}(x)$.

Question II

On considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

i. Calculez I_0, I_1, I_2 et I_4.

ii. Montrez que

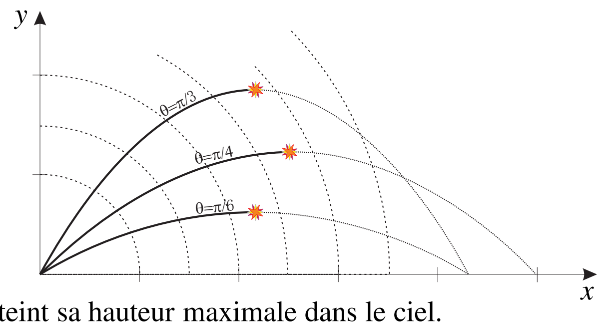
$$I_n = f(n) - I_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

où $f(n)$ est une fonction de n à déterminer.

Question III

Une base de tir se trouve à l'origine du plan (x,y). Un missile est lancé au temps $t = 0$ avec une vitesse initiale v_0 et une inclinaison d'angle θ par rapport à l'horizontale. La trajectoire du missile est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\theta \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases}$$



Ce missile a la particularité d'exploser lorsqu'il atteint sa hauteur maximale dans le ciel.

i. Déterminez (en fonction de v_0, g et θ) le moment $t^\star$ auquel le missile explose.

ii. Déterminez (en fonction de v_0 et g) l'angle $\theta^\star$ qui permet de maximiser la distance entre la base de tir et l'endroit de l'explosion. Que vaut la distance maximale ?

Justifiez chacun des résultats obtenus. Les constantes v_0 et g sont strictement positives et $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

SOLUTION TYPE

Question I

Soit la fonction à étudier

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

i. La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_0^+$, le dénominateur ne s'annule pour aucune valeur de $x \in \mathbb{R}$ et le domaine de définition de th est également $\mathbb{R}$.

ii.
- Il n'y a pas d'asymptote verticale car la fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- D'une part, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1^-$$

  La fonction présente donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ pour $x \to +\infty$. Celle-ci est approchée par valeurs inférieures.
  D'autre part, on calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = -1^+$$

  La fonction présente donc une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ pour $x \to -\infty$. Celle-ci est approchée par valeurs supérieures.
- Il n'y a pas d'asymptote oblique puisqu'il y a déjà des asymptotes horizontales pour $x \to \pm\infty$.

iii. Pour rechercher les éventuels extrema, on calcule

$$\begin{aligned}\mathrm{th}'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0\end{aligned}$$

La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et ne présente pas d'extremum.

iv. Une nouvelle dérivation conduit à

$$\mathrm{th}''(x) = -8\,\frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3}$$

dont le seul zéro vérifie $e^x = e^{-x}$ et est donc $x = 0$.

x		0	
$\mathrm{th}''(x)$	$+$	0	$-$
$\mathrm{th}(x)$	$\smile$	P.I.	$\frown$

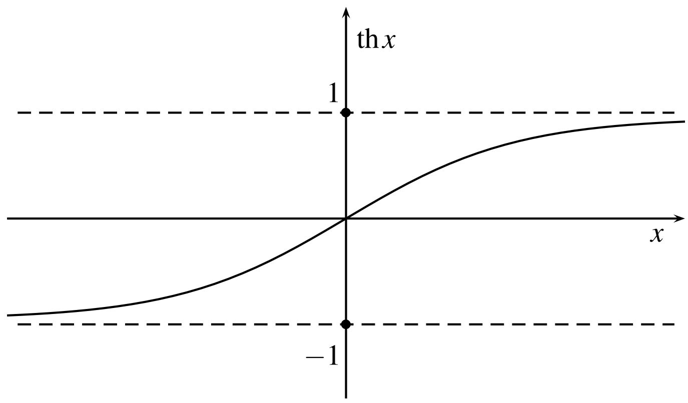
La dérivée seconde s'annulant et changeant de signe en $x = 0$, le graphe présente un point d'inflexion en ce point où $\mathrm{th}(0) = 0$. Le graphe de f tourne sa concavité vers le haut à gauche de $x = 0$ et vers le bas à droite de $x = 0$.

v. Rassemblant les informations obtenues ci-dessus, on peut représenter le graphe de la fonction th.

Pour ce faire, on notera que

$$\operatorname{th}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = -\operatorname{th}(x)$$

de sorte que la fonction est impaire et que son graphe présente donc une symétrie centrale par rapport à l'origine.



Question II

i. On calcule successivement

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,dx = \left[x - \operatorname{arctg} x\right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Afin de calculer I_4, on remarque d'abord que l'intégrand peut être transformé par division polynomiale selon

$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{x^2(1+x^2)-x^2}{1+x^2} = x^2 - \frac{x^2}{1+x^2}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{1+x^2}\right)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - I_2 = \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ii. Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$$

Pour tout $n \geq 2$, l'intégrand peut être transformé selon

$$\frac{x^n}{1+x^2} = \frac{x^{n-2}(1+x^2)-x^{n-2}}{1+x^2} = x^{n-2} - \frac{x^{n-2}}{1+x^2}$$

Dès lors

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \left(x^{n-2} - \frac{x^{n-2}}{1+x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^{n-1}}{n-1} \right]_0^1 - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} - I_{n-2} \end{aligned}$$

Ceci correspond bien à la formule annoncée

$$I_n = f(n) - I_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

avec

$$f(n) = \frac{1}{n-1}$$

Remarquons que les réponses obtenues plus haut sont bien compatibles avec la formule générale établie. On a en effet

$$I_2 = 1 - I_0 \qquad \text{et} \qquad I_4 = \frac{1}{3} - I_2$$

Question III

i. Le missile explose lorsqu'il atteint sa hauteur maximale. L'instant $t^\star$ correspondant est un point stationnaire de la fonction $y(t)$, *i.e.*

$$y'(t^\star) = 0$$

soit

$$-gt^\star + v_0 \sin\theta = 0 \quad \text{et} \quad t^\star = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

On peut dresser le tableau des variations suivant

t		$t^\star$	
$y'(t)$	$+$	0	$-$
$y(t)$	$\nearrow$	Max.	$\searrow$

La fonction $y(t)$ étant strictement croissante pour $t < t^\star$ et strictement décroissante pour $t > t^\star$, elle présente son maximum absolu en $t = t^\star$.

ii. La position du missile au moment de son explosion est donnée par

$$\begin{cases} x(t^\star) = \dfrac{v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta \\ y(t^\star) = \dfrac{v_0^2}{2g} \sin^2\theta \end{cases}$$

La distance d entre la base et l'endroit de l'explosion est telle que

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2(t^\star) + y^2(t^\star) \\ &= \left(\frac{v_0^2}{g} \right)^2 \sin^2\theta \left(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{4} \right) \\ &= \left(\frac{v_0^2}{g} \right)^2 \sin^2\theta \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2\theta \right) \end{aligned}$$

Puisque maximiser d revient à maximiser d^2 et puisque les paramètres du problème sont strictement positifs, on peut rechercher la distance maximale en étudiant la fonction

$$f(\theta) = \sin^2\theta - \frac{3}{4}\sin^4\theta$$

L'angle $\theta^\star$ pour lequel la distance d est maximale est un zéro de f'. On calcule donc

$$\begin{aligned} f'(\theta) =& 2\cos\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^3\theta \\ =& \left(2 - 3\sin^2\theta\right)\cos\theta\sin\theta \end{aligned}$$

Le seul zéro de cette expression appartenant à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ est

$$\theta^\star = \arcsin\sqrt{2/3}$$

On peut dresser le tableau des variations suivant

θ	0		$\theta^\star$		$\pi/2$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	Max.	$\searrow$	

La fonction $f(\theta)$ étant strictement croissante pour $\theta < \theta^\star$ et strictement décroissante pour $\theta > \theta^\star$, elle présente son maximum absolu en $\theta = \theta^\star$.
Pour cette valeur de l'angle de tir, l'explosion se produit à la distance

$$d^\star = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{f(\theta^\star)} = \frac{v_0^2}{\sqrt{3}\,g}$$

Université de Liège

Prof. Éric J.M. DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Septembre 2013

Consignes :
- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.*
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 12h.*

Question I

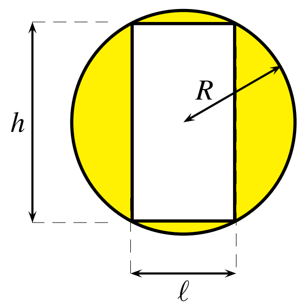
On considère la famille de fonctions

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^{2\beta}}{1-x}$$

où β désigne un paramètre entier strictement positif.
En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de β,

i. déterminez le domaine de définition de f ;
ii. déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f ;
iii. étudiez la croissance-décroissance de f, déterminez et caractérisez les éventuels extrema ;
iv. esquissez le graphe de f.

Question II



La résistance en flexion r d'une poutre de section rectangulaire est proportionnelle au produit de la largeur ℓ de la poutre et du carré de sa hauteur h, *i.e.*

$$r = \gamma\, \ell\, h^2$$

où γ est une constante strictement positive.

Déterminez les dimensions (ℓ et h) de la section de la poutre pouvant être découpée dans un tronc d'arbre (parfaitement circulaire) de rayon R et présentant la résistance la plus grande.

Question III

i. Calculez les deux intégrales suivantes :

$$a) \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx, \qquad b) \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx.$$

ii. Calculez les trois primitives suivantes :

$$a) \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx, \qquad b) \int x \sin x \, dx, \qquad c) \int \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}}\, dx.$$

Question I

i. Étant donné que la fonction arctg est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\dfrac{x^{2\beta}}{1-x}$ est défini $\forall x \neq 1$, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

ii. *Recherches des éventuelles asymptotes verticales.*
Comme
$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg} \frac{x^{2\beta}}{1-x} = \Big[\operatorname{arctg}(-\infty)\Big] = -\frac{\pi}{2}$$
et
$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg} \frac{x^{2\beta}}{1-x} = \Big[\operatorname{arctg}(+\infty)\Big] = \frac{\pi}{2},$$
il n'y a pas d'asymptote verticale mais la fonction présente une discontinuité en $x = 1$.

Recherches des éventuelles asymptotes horizontales.
On calcule d'abord
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2\beta}}{1-x} = -\lim_{x\to+\infty} x^{2\beta-1} = -\infty$$
puisque $\beta \geq 1$ et $2\beta - 1 \geq 1$. Dès lors
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^{2\beta}}{1-x} = -\frac{\pi}{2}^+$$
Le graphe de f présente une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = -\pi/2$. Cette asymptote est approchée par valeurs supérieures.

Procédant de la même façon en $-\infty$, on calcule d'abord (en tenant compte de $2\beta - 1 \geq 1$)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{2\beta}}{1-x} = -\lim_{x\to-\infty} x^{2\beta-1} = +\infty$$
Dès lors
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^{2\beta}}{1-x} = \frac{\pi}{2}^-$$
Le graphe de f présente une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = \pi/2$. Cette asymptote est approchée par valeurs inférieures.

Recherches des éventuelles asymptotes obliques.
Étant donné qu'il existe des asymptotes horizontales en $\pm\infty$ pour toutes les valeurs de β, cette fonction n'admet aucune asymptote oblique.

iii. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition et on a
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\dfrac{x^{4\beta}}{(1-x)^2}} \frac{2\beta x^{2\beta-1}(1-x)+x^{2\beta}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x^{2\beta-1}[x(1-2\beta)+2\beta]}{(1-x)^2+x^{4\beta}} \end{aligned}$$
Cette dérivée s'annule en
$$x_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2\beta}{2\beta-1}$$
Ces deux valeurs appartiennent bien au domaine de définition de f ; on a toujours
$$0 = x_1 < 1 < x_2$$

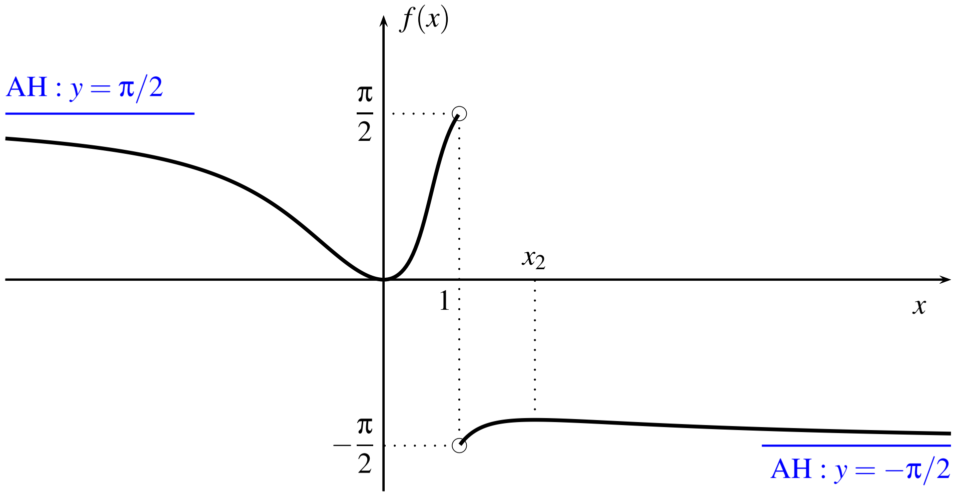
Dans ce cas, on peut dès lors dresser le tableau de variation de f de la façon suivante :

		0		1		$\frac{2\beta}{2\beta-1}$	
$x^{2\beta-1}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x(1-2\beta)+2\beta$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(1-x)^2+x^{4\beta}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	Max	$\searrow$

Ainsi, f admet un minimum local en $x_1 = 0$ et un maximum local en x_2.
On notera que

$$f(x_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x_2) = -\operatorname{arctg}\frac{(2\beta)^{2\beta}}{(2\beta-1)^{2\beta-1}} < 0$$

iv. En utilisant les résultats dégagés ci-dessus, le graphe de f peut être esquissé de la façon suivante pour toutes les valeurs entières de $\beta \geq 1$.

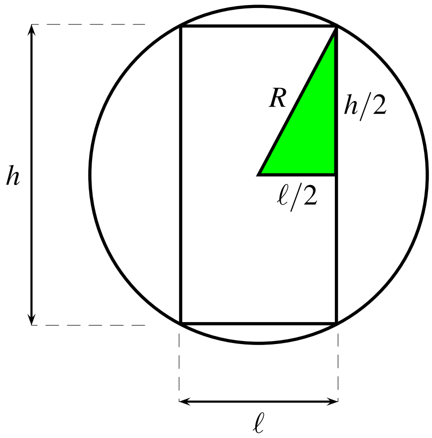


Question II

La résistance de la poutre est donnée par

$$r = \gamma \ell h^2$$

où $\gamma > 0$ désigne une constante.



En appliquant la relation de Pythagore dans le triangle identifié sur la figure ci-dessus, on peut exprimer la relation entre les dimensions de la poutre sous la forme

$$(\ell/2)^2 + (h/2)^2 = R^2$$

De cette expression, on tire la relation

$$h^2 = 4R^2 - \ell^2$$

qui permet d'exprimer la résistance de la poutre en fonction de la seule largeur ℓ, *i.e.*

$$r(\ell) = \gamma\ell(4R^2 - \ell^2)$$

Pour déterminer les dimensions optimales de la poutre, il suffit dès lors d'étudier les variations de cette fonction pour $\ell \in]0, 2R[$. On a

$$r'(\ell) = \gamma\left(4R^2 - 3\ell^2\right)$$

Sur l'intervalle considéré, cette dérivée s'annule pour

$$\ell = \ell_\star = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

On peut ainsi dresser le tableau de variation de r sur $[0, 2R]$.

	0		$\ell_\star$		$2R$
r'		$+$	0	$-$	
r	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0

Puisque la fonction est croissante à gauche de $\ell_\star$ et décroissante à droite, on en conclut que r prend sa valeur maximale en $\ell_\star$.
Les dimensions de la section de la poutre la plus résistante pouvant être découpée dans un tronc d'arbre de rayon R sont donc

$$\ell_\star = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

et

$$h_\star = \sqrt{4R^2 - \ell_\star^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$$

Question III

i. Calcul des intégrales.

a) La première intégrale est évaluée directement selon

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$$

b) La deuxième intégrale peut être calculée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

ii. Calcul des primitives.

a) La première primitive peut être évaluée en effectuant le changement de variable $x = u^2$ ($dx = 2udu$).

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx &= \int \frac{2u}{1+u}du \\ &= \int \frac{2(1+u)-2}{1+u}du = 2\int du - 2\int \frac{du}{1+u} \\ &= 2u - 2\ln(|1+u|) + C \\ &= 2\sqrt{x} - 2\ln(|1+\sqrt{x}|) + C\end{aligned}$$

où C désigne une constante arbitraire.

b) La deuxième primitive peut être évaluée en appliquant la formule d'intégration par parties

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

avec $f(x) = -\cos x$ et $g(x) = x$. On a $f'(x) = \sin x$, $g'(x) = 1$ et

$$\begin{aligned}\int x\sin x\, dx &= -x\cos x + \int \cos x dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

où C désigne une constante arbitraire.

c) La troisième primitive peut être évaluée en effectuant le changement de variable $x = 2\sin y$ ($dx = 2\cos y\, dy$),

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}}dx &= \int \frac{2\cos y\, dy}{(4-4\sin^2 y)^{3/2}} = \int \frac{2\cos y}{(4\cos^2 y)^{3/2}}dy \\ &= \int \frac{2\cos y}{8\cos^3 y}dy = \int \frac{dy}{4\cos^2 y} \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{tg} y + C \\ &= \frac{1}{4}\frac{\sin y}{\cos y} + C = \frac{1}{4}\frac{2\sin y}{\sqrt{4-4\sin^2 y}} + C \\ &= \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C\end{aligned}$$

où C désigne une constante arbitraire.

Université de Liège

Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Juillet 2013

Consignes :
- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.*
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 11h30.*

Question I

Soit la fonction $$f(x) = x^{\alpha} \ln x.$$

i. En considérant d'abord le cas $\alpha = 2$,

(a) déterminez le domaine de définition de f ;

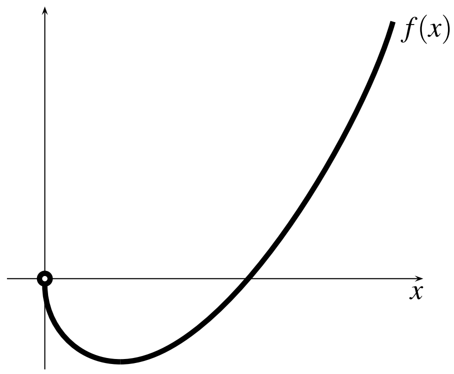
(b) déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f ;

(c) étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez les éventuels extrema ;

(d) étudiez la concavité du graphe et situez les éventuels points d'inflexion ;

(e) esquissez le graphe de f.

ii. Dans un cas plus général, déterminez toutes les valeurs entières du paramètre α pour lesquelles le graphe de f présente l'allure ci-contre. Justifiez.



Question II

Déterminez les dimensions (rayon de la base R et hauteur h) d'une canette, assimilée à un cylindre parfait, devant contenir un volume V donné et pouvant être réalisée en utilisant le minimum d'aluminium, c'est-à-dire présentant l'aire totale minimale. Justifiez.
Que vaut l'aire minimale ?

Question III

i. Calculez les trois intégrales suivantes :

$$a)\ \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx, \qquad b)\ \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx, \qquad c)\ \int_1^{e} x \ln x dx.$$

ii. Montrez que $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{\sin x + \cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1}$$

SOLUTION

Question I

i. Pour $\alpha = 2$, la fonction étudiée s'écrit

$$f(x) = x^2 \ln x$$

(a) La fonction logarithme étant définie sur $\mathbb{R}_0^+$, le domaine de définition de f est l'intervalle $]0,+\infty[$.

(b) Au voisinage de 0, on calcule, en appliquant le théorème de l'Hospital,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = [0\cdot(-\infty)] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x^2} &= \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \\ = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-2/x^3} &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^2 = 0\end{aligned}$$

Il n'existe donc pas d'asymptote verticale en $x = 0$. Notons que la fonction admet un prolongement continu si on pose $f(0) = 0$.
Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln x = [(+\infty)\cdot(+\infty)] = +\infty$$

de sorte qu'il n'existe pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.
Pour identifier une éventuelle asymptote oblique, on calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x \ln x = [(+\infty)\cdot(+\infty)] = +\infty$$

Il n'existe donc pas non plus d'asymptote oblique.

(c) Pour rechercher les éventuels extrema, on calcule

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2\left(\frac{1}{x}\right) = x(1+2\ln x)$$

dont le seul zéro est situé en l'abscisse $1/\sqrt{\mathrm{e}}$.
L'étude des variations de f sur $]0,+\infty[$ conduit à

x	0		$1/\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	

La fonction étant décroissante à gauche de $1/\sqrt{\mathrm{e}}$ et croissante à droite, elle présente un minimum local en $1/\sqrt{\mathrm{e}}$ où

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) = -\frac{1}{2\mathrm{e}} < 0$$

(d) Une nouvelle dérivation conduit à

$$f''(x) = 1 + 2\ln x + 2x\left(\frac{1}{x}\right) = 3 + 2\ln x$$

dont le seul zéro est situé en l'abscisse $1/\sqrt{\mathrm{e}^3}$.

L'étude du signe de f'' sur $]0,+\infty[$ conduit à

x	0		$1/\sqrt{e^3}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	*Point d'inflexion*	$\cup$	

Le graphe de f tourne sa concavité vers le haut à gauche de $1/\sqrt{e^3}$ et vers le bas à droite de $1/\sqrt{e^3}$. Le graphe possède donc un point d'inflexion en $1/\sqrt{e^3}$ où

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = -\frac{3}{2e^3}$$

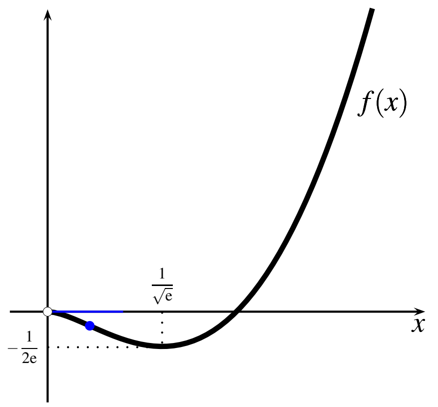
(e) Pour esquisser le graphe de f, on remarque

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} x(1+2\ln x) = 0$$

de sorte que la tangente au graphe de f tend à être horizontale au voisinage de l'origine.
Par ailleurs, on note également que $1/\sqrt{e^3} < 1/\sqrt{e}$ de sorte que le tableau consolidé des variations de f prend la forme

x	0		$1/\sqrt{e^3}$		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
f'	(0)	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
f''		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
f		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$	
		$\cap$	*P.I.*	$\cup$	$\cup$	$\cup$	
	(0)		$-3/(2e^3)$		$-1/(2e)$		

Le graphe de f peut donc être esquissé de la façon suivante :



ii. Pour que le graphe de f présente l'allure indiquée, il faut

– que $\lim_{x\to 0} x^{\alpha}\ln x = 0$.
La condition est vérifiée si et seulement si $\alpha > 0$ puisque toute puissance de x l'emporte sur le logarithme au voisinage de 0.

– que $\lim_{x\to +\infty} x^{\alpha}\ln x = +\infty$.
La condition est vérifiée si et seulement si $\alpha \geq 0$ puisque toute puissance de x l'emporte sur le logarithme au voisinage de l'infini.

- que la fonction présente un minimum local en une abscisse $\tilde{x} > 0$.
  Pour ce faire, on calcule

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \ln x + x^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}(\alpha \ln x + 1)$$

  qui s'annule en $\tilde{x} = \mathrm{e}^{-1/\alpha} > 0$. Le graphe de f présente bien un minimum local en $\tilde{x}$ puisque

x	0		$\tilde{x}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	

- que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$ pour que le graphe présente une tangente verticale au voisinage de l'origine.
  Utilisant l'expression de la dérivée calculée ci-dessus, cette condition est vérifiée si et seulement si $\alpha - 1 \leq 0$, *i.e.* si et seulement si $\alpha \leq 1$.

En regroupant les résultats ci-dessus, on constate que seule la valeur $\alpha = 1$ vérifie toutes les conditions et que le graphe présenté a donc été tracé pour cette valeur de α.

Question II

Notant R le rayon de la canette et h sa hauteur, le volume V et la surface totale A sont donnés respectivement par

$$V = \pi R^2 h, \qquad A = 2\pi R^2 + 2\pi R h$$

L'expression du volume V permet d'écrire

$$h = \frac{V}{\pi R^2}$$

En injectant ce résultat dans l'expression de A, on peut exprimer l'aire comme fonction de la seule variable R, soit

$$A(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

Pour étudier les variations de A et identifier les éventuels extrema, on calcule

$$A'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2}$$

qui s'annule en $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. L'étude du signe de la dérivée

R	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
A'		$-$	0	$+$	
A		$\searrow$	*min*	$\nearrow$	

montre que la fonction est décroissante à gauche de $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ et croissante à droite.

Dès lors l'aire est minimale pour

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \qquad h = \frac{V}{\pi R^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Pour ces dimensions, l'aire totale est donnée par

$$A = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

Question III

i. Les trois intégrales proposées peuvent être évaluées comme suit.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2\,;$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \Big[x-\operatorname{arctg}x\Big]_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}\,;$

(c) Par application de la formule d'intégration par par parties

$$\int_a^b fg'dx = fg]_a^b - \int_a^b f'g dx$$

avec

$$\begin{cases} f = \ln x \\ g' = x \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = \dfrac{1}{x} \\ g = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,dx &= \frac{1}{2}x^2\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}x^2\Big]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4} = \frac{1+\mathrm{e}^2}{4} \end{aligned}$$

ii. Afin de montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{tg}x+1}$$

commençons par transformer le second membre de cette expression en multipliant haut et bas par $\cos x$. Il vient

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{tg}x+1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sin x+\cos x}$$

puis, posant $u = \pi/2 - x$, $(du = -dx)$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{tg}x+1} &= -\int_{\pi/2}^0 \frac{\cos(\pi/2-u)\,du}{\sin(\pi/2-u)+\cos(\pi/2-u)} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin u\,du}{\cos u+\sin u} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de l'égalité annoncée.

Université de Liège

Prof. Éric J.M. DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Septembre 2012

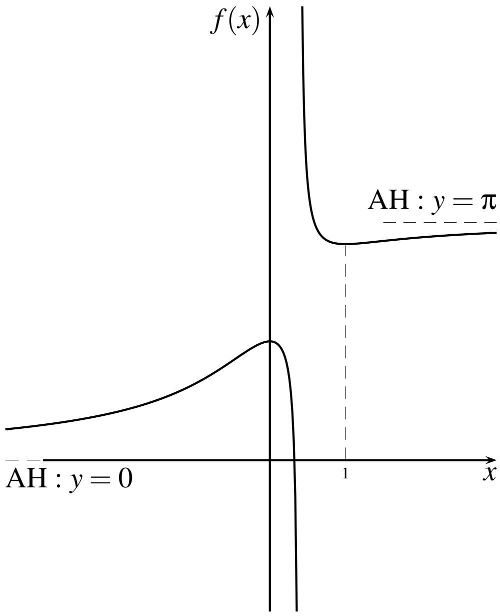
Consignes :
- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.*
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 11h30.*

Question I

On considère la famille de fonctions

$$f(x) = \alpha \frac{x}{x+\beta} \operatorname{arctg} x + \gamma$$

où α, β et γ désignent trois paramètres réels.
Le graphique ci-contre a été obtenu par logiciel en choisissant des valeurs particulières non nulles pour les paramètres.



i. Retrouvez les valeurs particulières de α, β et γ utilisées pour tracer ce graphique sachant que le graphe de f présente
   - une asymptote horizontale $y = \pi$ en $+\infty$;
   - une asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$;
   - des extrema locaux en $x = 0$ et en $x = 1$.

ii. Pour les valeurs des paramètres identifiées au point précédent, déterminez l'équation de l'asymptote verticale visible sur le graphique.

iii. De façon générale, déterminez pour quelles valeurs des paramètres le graphe présente un maximum local en $x = 0$.

Question II

i. Déterminez toutes les primitives des deux fonctions ci-dessous et précisez-en les domaines de définition :
   - $\dfrac{x^2}{1-x}$
   - $x\mathrm{e}^x$

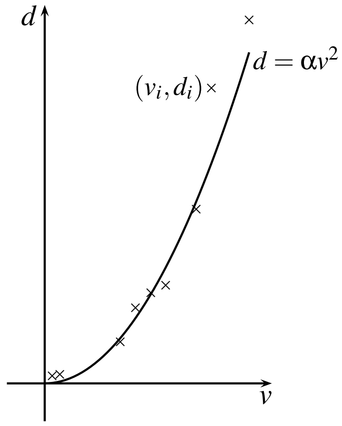
ii. Calculez les deux intégrales suivantes :
   - $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{1-x^2} dx$
   - $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \,\cos x}{1-\sin x} dx$

Question III

On détermine expérimentalement la déformation d d'un absorbeur de chocs en fonction de la vitesse v de l'impact. Les mesures étant réalisées à différentes vitesses non nulles, on dispose d'un ensemble de n points expérimentaux (v_i, d_i) $(i = 1, \ldots, n)$

Suspectant une dépendance quadratique de la déformation par rapport à la vitesse, on souhaite ajuster le paramètre α pour représenter aussi bien que possible les données expérimentales par une loi théorique de la forme

$$d = \alpha v^2.$$



Pour ce faire, on détermine la valeur de α permettant de minimiser l'erreur quadratique

$$e(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \left[d_i - \alpha v_i^2\right]^2$$

calculée en sommant les carrés des écarts entre les données expérimentales et les valeurs prédites par le modèle théorique.

i. Dans le cas où on dispose seulement de deux mesures ($n = 2$), déterminez, en fonction des données expérimentales (v_1, d_1, v_2 et d_2), la valeur de α correspondant au minimum de l'erreur quadratique

$$e(\alpha) = \left[d_1 - \alpha v_1^2\right]^2 + \left[d_2 - \alpha v_2^2\right]^2$$

ii. Déterminez la valeur optimale de α dans le cas général où on dispose d'un nombre $n > 0$ quelconque de points expérimentaux.

Question I

i. L'existence des asymptotes horizontales données en $+\infty$ et en $-\infty$ se traduit mathématiquement par

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

En évaluant les limites et en tenant compte de

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+\beta} = 1$$

il vient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha\frac{\pi}{2} + \gamma = \pi$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\alpha\frac{\pi}{2} + \gamma = 0$$

On en déduit que

$$\alpha = 1 \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{\pi}{2}$$

Par ailleurs, l'existence d'extrema aux points $x = 0$ et $x = 1$ où la fonction est dérivable demande l'annulation de la dérivée en ces points. On calcule d'abord

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\alpha}{(x+\beta)^2}\left[\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right)(x+\beta) - x\operatorname{arctg} x\right] \\ &= \frac{\alpha}{(x+\beta)^2}\left[\beta\operatorname{arctg} x + \frac{x(x+\beta)}{1+x^2}\right] \end{aligned}$$

Quelles que soient les valeurs des paramètres, la dérivée s'annule toujours à l'origine (Rappelons que β est supposé non nul.). Ceci ne permet donc pas de déterminer les valeurs des paramètres. Tenant compte de l'existence d'un extremum en $x = 1$, il vient (en supposant $\beta \neq -1$)

$$f'(1) = \frac{\alpha}{(1+\beta)^2}\left[\beta\frac{\pi}{4} + \frac{1+\beta}{2}\right] = 0$$

de sorte que

$$\beta = -\frac{2}{2+\pi}$$

Remarquons que l'annulation de la dérivée en $x = 0$ et en $x = 1$ ne garantit pas formellement la présence d'extrema en ces points. Cependant, comme l'annulation de la dérivée constitue une condition nécessaire pour la présence d'extrema et que cette condition n'est rencontrée que pour les seules valeurs des paramètres identifiées plus haut, on en déduit que le graphique a bien été tracé dans le cas particulier où

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -\frac{2}{2+\pi} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{\pi}{2}$$

ii. Avec les valeurs des paramètres identifiées plus haut, le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{x - \dfrac{2}{2+\pi}}\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$$

présente une asymptote verticale

$$x = \frac{2}{2+\pi}$$

puisque

$$\lim_{x\to\left(\frac{2}{2+\pi}\right)^+} f(x) = +\infty, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\left(\frac{2}{2+\pi}\right)^-} f(x) = -\infty$$

iii. Comme indiqué ci-dessus, on a toujours $f'(0) = 0$ quelles que soient les valeurs des paramètres. On peut déduire la nature du point stationnaire à l'origine en examinant la courbure du graphe via l'étude du signe de $f''(0)$. Après quelques calculs, on obtient

$$f''(x) = \frac{-2\alpha}{(x+\beta)^3}\left[\beta \operatorname{arctg} x + \frac{(x^3-\beta)(x+\beta)}{(1+x^2)^2}\right]$$

et

$$f''(0) = \frac{2\alpha}{\beta}$$

Le graphe présente un maximum local à l'origine si sa concavité est dirigée vers le bas, c'est-à-dire si

$$\alpha/\beta < 0$$

c'est-à-dire si α et β sont de signes opposés.

Question II

i. Calcul des primitives.

- La première primitive peut être calculée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{1-x}dx &= \int \frac{x^2-1+1}{1-x}dx \\ &= \int \left(-\frac{1-x^2}{1-x} + \frac{1}{1-x}\right)dx = \int \left(-(1+x) + \frac{1}{1-x}\right)dx \\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \ln|1-x| + C\end{aligned}$$

  où C désigne une constante arbitraire.
  Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

- Pour calculer la seconde primitive, on utilise la formule d'intégration par parties

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

  En posant

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \qquad g(x) = x$$

  on a

$$\int \mathrm{e}^x x\,dx = \mathrm{e}^x x - \int \mathrm{e}^x 1\,dx = \mathrm{e}^x x - \mathrm{e}^x + C$$

  Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

ii. Calcul des intégrales.

- La première intégrale est évaluée directement selon

$$\int_1^2 \frac{x}{1-x^2}dx = \left[\frac{-1}{2}\ln|1-x^2|\right]_2^3 = -\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$$

- La deuxième intégrale peut être évaluée en effectuant le changement de variable $y = \sin x$

$(dy = \cos x\, dx)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cos x}{1-\sin x} dx &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y}{1-y} dy \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y-1+1}{1-y} dy \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-1 + \frac{1}{1-y}\right) dy \\
&= \Big[-y - \ln|1-y| \Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Question III

i. Dans le cas où $n = 2$, l'erreur quadratique moyenne s'exprime sous la forme

$$e(\alpha) = \left[d_1 - \alpha v_1^2\right]^2 + \left[d_2 - \alpha v_2^2\right]^2$$

En dérivant par rapport à α, il vient

$$\begin{aligned}
e'(\alpha) &= 2\left[d_1 - \alpha v_1^2\right](-v_1^2) + 2\left[d_2 - \alpha v_2^2\right](-v_2^2) \\
&= -2(d_1 v_1^2 + d_2 v_2^2) + 2\alpha(v_1^4 + v_2^4)
\end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule pour

$$\alpha = \alpha^\star = \frac{(d_1 v_1^2 + d_2 v_2^2)}{v_1^4 + v_2^4}$$

(où le dénominateur diffère de zéro puisque les essais sont réalisés à des vitesses non nulles). Cette valeur correspond bien au minimum de e puisque, e' variant linéairement, on a

α		$\alpha^\star$	
$e'(\alpha)$	$-$	0	$+$
$e(\alpha)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

ii. En adoptant la même démarche dans le cas général, on a successivement

$$e'(\alpha) = \sum_{i=1}^n 2\left[d_i - \alpha v_i^2\right](-v_i^2) = -2\left(\sum_{i=1}^n d_i v_i^2\right) + 2\alpha\left(\sum_{i=1}^n v_i^4\right)$$

et

$$\alpha = \alpha^\star = \frac{\sum_{i=1}^n d_i v_i^2}{\sum_{i=1}^n v_i^4}$$

Cette valeur de α correspond bien au minimum de $e(\alpha)$ puisque l'erreur quadratique e est décroissante pour $\alpha < \alpha^\star$ (la dérivée est négative) et croissante pour $\alpha > \alpha^\star$ (la dérivée est positive).

Université de Liège

Prof. Éric J.M. DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Juillet 2012

Consignes :
- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.*
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 12h.*

Question I

On considère la fonction

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - 2\beta\,(x+1)$$

où β désigne un paramètre réel non nul en fonction duquel les propriétés de f seront discutées.

i. Déterminez le domaine de définition de f.
ii. Calculez les limites de f aux frontières de son domaine de définition et déterminez les éventuelles asymptotes.
iii. Identifiez et caractérisez les éventuels extrema locaux de f.
iv. Étudiez la concavité du graphe et situez les éventuels points d'inflexion.
v. Dressez un tableau récapitulatif des propriétés de f et esquissez son graphe.
vi. Déterminez toutes les valeurs de β pour lesquelles $f \leq 0$ sur $[0, +\infty[$.

Question II

À partir d'une fonction f_0 continue sur l'intervalle $]0,1[$, on définit la séquence de fonctions $f_1, f_2, \ldots$, elles-mêmes définies sur $]0,1[$, par la relation de récurrence

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_{n-1}(t)dt \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

i. On considère d'abord $f_0(t) = t^2$.
   (a) Calculez f_1 et f_2.
   (b) Donnez l'expression générale de f_n.
ii. Calculez f_1 dans le cas où $f_0(t) = t\exp(t)$ (ce qui peut aussi être noté sous la forme $f_0(t) = t\,e^t$).
iii. Montrez que, quelle que soit la fonction f_0 choisie pour initier la séquence de fonctions, on a

$$f_n{}'(x) = \frac{f_{n-1}(x) - f_n(x)}{x} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

iv. Si la fonction f_1 est strictement croissante sur $]0,1[$, situez les graphes des fonctions f_0 et f_1 l'un par rapport à l'autre sur cet intervalle.

Question III

On considère les courbes

$$x^2 - y^2 = \gamma \qquad \text{et} \quad xy = \delta$$

où γ et δ désignent des constantes strictement positives.

i. Sur base de l'étude des pentes des tangentes à leur intersection, montrez que ces courbes se coupent à angle droit dans le premier quadrant dans le cas particulier où $\gamma = 1$ et $\delta = \sqrt{2}$.
ii. Les courbes se coupent-elles à angle droit dans le premier quadrant quelles que soient les valeurs strictement positives de γ et δ ? Justifiez.

SOLUTION

Question I

i. Quel que soit $\beta \in \mathbb{R}_0$, $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$.

ii. On peut écrire $f(x) = 2x^{2/3} - 2\beta x - 2\beta$ et, puisque le terme dominant à l'infini est $-2\beta x$, calculer

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-2\beta x) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \beta > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \beta < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-2\beta x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \beta > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \beta < 0 \end{cases}$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.

Examinons l'existence éventuelle d'une asymptote oblique en $\pm\infty$ en calculant

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2x^{-1/3} - 2\beta - 2\beta x^{-1}\right) = -2\beta$$

et

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + 2\beta x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2x^{2/3} - 2\beta\right) = +\infty$$

Il n'y a donc pas non plus d'asymptote oblique.

Enfin, puisque la fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$, il n'y a pas d'asymptote verticale.

Nous concluons qu'il n'existe aucune asymptote, quel que soit $\beta \in \mathbb{R}_0$.

iii. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{-1/3} - 2\beta = \frac{4 - 6\beta\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}}$$

qui s'annule si

$$4 - 6\beta\sqrt[3]{x} = 0 \qquad \text{soit si} \qquad x = \left(\frac{2}{3\beta}\right)^3 \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad \beta > 0 \\ < 0 & \text{si} \quad \beta < 0 \end{cases}$$

La dérivée change de signe de part et d'autre de l'origine mais n'y est pas définie. On a, $\forall \beta \in \mathbb{R}_0$,

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty \quad \text{et} \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$$

La fonction présente donc un point de rebroussement en $x = 0$.

Si $\beta > 0$, nous avons le tableau de variation suivant

x		0		$\left(\frac{2}{3\beta}\right)^3$	
$4-6\beta\sqrt[3]{x}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$3\sqrt[3]{x}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

et, si $\beta < 0$, le tableau de variation devient

x		$\left(\dfrac{2}{3\beta}\right)^3$		0	
$4-6\beta\sqrt[3]{x}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3\sqrt[3]{x}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f'	$+$	0	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Nous constatons que, quel que soit $\beta \in \mathbb{R}_0$, f présente un minimum local en $x = 0$ (puisque f est définie et continue à l'origine, décroissante à gauche et croissante à droite) avec

$$f(0) = -2\beta \begin{cases} < 0 & \text{si} \quad \beta > 0 \\ > 0 & \text{si} \quad \beta < 0 \end{cases}$$

De même, f présente un maximum local en $x = (2/3\beta)^3$ avec

$$f\left([2/3\beta]^3\right) = \frac{8-54\beta^3}{27\beta^2} \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad \beta < \sqrt[3]{4}/3 \\ = 0 & \text{si} \quad \beta = \sqrt[3]{4}/3 \\ < 0 & \text{si} \quad \beta > \sqrt[3]{4}/3 \end{cases}$$

iv. On calcule

$$f''(x) = -\frac{4}{9}x^{-4/3} = \frac{-4}{9\sqrt[3]{x^4}} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0$$

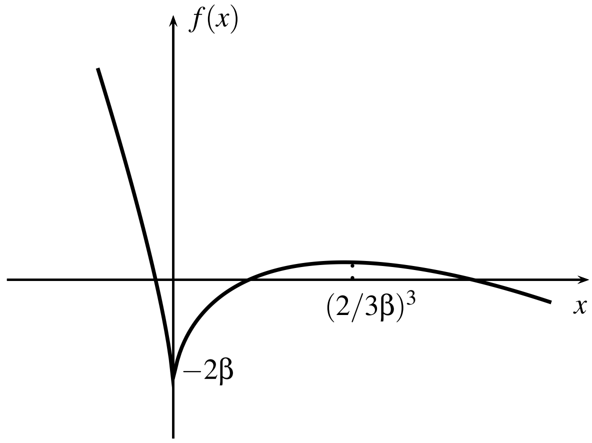
Il n'y a pas de point d'inflexion et la concavité de f est tournée vers le bas quel que soit $\beta \in \mathbb{R}_0$.

v. Dressons les tableaux récapitulatifs et esquissons le graphe de f.

- Si $\beta > 0$,

x	$-\infty$		0		$\left(\dfrac{2}{3\beta}\right)^3$		$+\infty$
f'	$-$	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	0	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$
f	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$-\infty$
			-2β		$\dfrac{8-54\beta^3}{27\beta^2}$		
			< 0		$\begin{cases} > 0 & \text{si} \quad \beta < \sqrt[3]{4}/3 \\ = 0 & \text{si} \quad \beta = \sqrt[3]{4}/3 \\ < 0 & \text{si} \quad \beta > \sqrt[3]{4}/3 \end{cases}$		

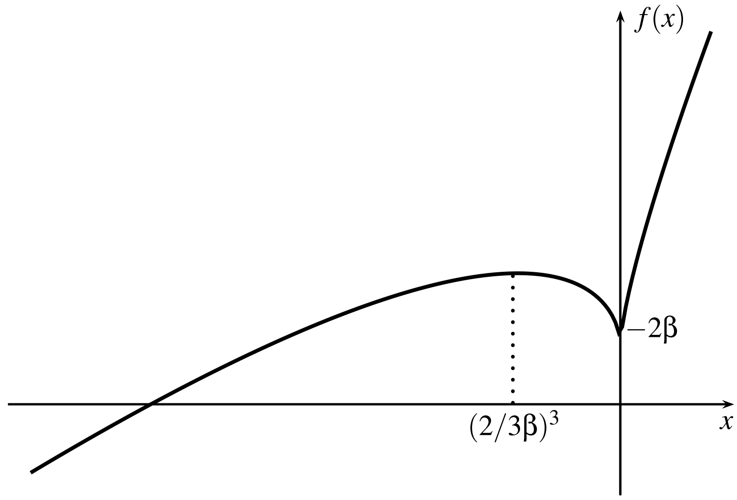
Le graphe a donc l'allure suivante dans le cas où $\beta \in]0, \sqrt[3]{4}/3[$. Les deux autres cas, qui ne diffèrent que par le signe de la fonction au maximum local, ne sont pas représentés ici mais s'en déduisent immédiatement.



- Si $\beta < 0$,

x	$-\infty$		$\left(\dfrac{2}{3\beta}\right)^3$		0		$+\infty$
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-\infty$	$-$	$-$
f	$-\infty$	$\nearrow$	Max $\dfrac{8-54\beta^3}{27\beta^2}$ >0	$\searrow$	min -2β >0	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe présente l'allure suivante



vi. Dans le cas où $\beta > 0$, on a $f \leq 0$ sur $[0, +\infty[$ si et seulement si le maximum de f sur cet intervalle est négatif ou nul, soit ssi $\beta \geq \sqrt[3]{4}/3$.

Question II

i. (a) On a

$$f_1(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_0(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x t^2 dt = \frac{1}{x}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^2}{3}$$

et

$$f_2(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_1(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^2}{3}dt = \frac{1}{x}\left[\frac{t^3}{9}\right]_0^x = \frac{x^2}{9}$$

(b) Chaque nouvelle intégration conservant la même puissance de x mais amenant un facteur $1/3$, il vient

$$f_n(x) = \frac{x^2}{3^n}$$

ii. On a

$$f_1(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_0(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\,dt$$

où l'intégrale peut être calculée par parties en écrivant

$$\int_0^x fg'\,dt = [fg]_0^x - \int_0^x f'g\,dt$$

avec $f = t$, $g' = \mathrm{e}^t$, $f' = 1$ et $g = \mathrm{e}^t$. On a donc

$$f_1(x) = \frac{1}{x}\left([t\,\mathrm{e}^t]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^t\,dt\right) = \frac{1}{x}\left(x\mathrm{e}^x - [\mathrm{e}^t]_0^x\right) = \frac{1}{x}(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1)$$

iii. En dérivant le quotient

$$f_n(x) = \frac{\int_0^x f_{n-1}(t)dt}{x}$$

et en tenant compte de

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt\right) = f_{n-1}(x)$$

on obtient, $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{xf_{n-1}(x) - \int_0^x f_{n-1}(t)dt}{x^2} = \frac{f_{n-1}(x) - \frac{1}{x}\int_0^x f_{n-1}(t)dt}{x} \\ &= \frac{f_{n-1}(x) - f_n(x)}{x} \end{aligned}$$

iv. Si la fonction f_1 est strictement croissante sur $]0,1[$, alors

$$f_1'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0,1[$$

Or, le résultat obtenu au point iii. nous apprend que

$$f_1'(x) = \frac{f_0(x) - f_1(x)}{x}$$

et donc

$$\frac{f_0(x) - f_1(x)}{x} \geq 0 \quad \forall x \in]0,1[$$

soit

$$f_0(x) \geq f_1(x) \quad \forall x \in]0,1[$$

Le graphe de la fonction f_0 est donc situé au-dessus du graphe de la fonction f_1 sur $]0,1[$.

Question III

i. Déterminons pour commencer les points d'intersection des deux courbes. Leurs coordonnées (x,y) vérifient le système

$$\begin{cases} xy = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

dès lors

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{2}{x^2} \\ y^2 = x^2 - 1 \end{cases}$$

qui est équivalent à l'équation bicarrée

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$

dont la seule solution acceptable est $x^2 = 2$ soit $x = \pm\sqrt{2}$.
Le seul point d'intersection situé dans le premier quadrant est donc le point $(\sqrt{2}, 1)$.

Déterminons ensuite les pentes des deux courbes en ce point.
La première courbe a pour équation

$$y_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$$

On calcule alors

$$y_1'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{x^2}$$

et

$$y_1'(\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Dans le premier quadrant, la deuxième courbe a pour équation

$$y_2(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

On calcule alors

$$y_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

et

$$y_2'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

On vérifie que

$$y_1'(\sqrt{2})\ y_2'(\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = -1$$

Les courbes se coupent donc bien à angle droit dans le premier quadrant.

ii. Déterminons pour commencer les points d'intersection des deux courbes. Leurs coordonnées (x, y) vérifient le système

$$\begin{cases} xy = \delta \\ x^2 - y^2 = \gamma \end{cases}$$

dès lors

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{\delta^2}{x^2} \\ y^2 = x^2 - \gamma \end{cases}$$

qui est équivalent à l'équation bicarrée

$$x^4 - \gamma x^2 - \delta^2 = 0$$

dont la seule solution acceptable est

$$x^2 = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\delta^2}}{2}$$

soit

$$x = \pm\sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\delta^2}}{2}}$$

Le seul point d'intersection situé dans le premier quadrant est donc le point

$$(x_*, y_*) = \left(\sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\delta^2}}{2}}, \delta\sqrt{\frac{2}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\delta^2}}}\right)$$

La première courbe a pour équation

$$y_1(x) = \frac{\delta}{x}$$

On calcule

$$y_1'(x) = \frac{-\delta}{x^2}$$

Dans le premier quadrant, la deuxième courbe a pour équation

$$y_2(x) = \sqrt{x^2 - \gamma}$$

On calcule

$$y_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - \gamma}}$$

On a alors

$$y_1'(x)y_2'(x) = \frac{-\delta}{x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 - \gamma}} = \frac{-\delta}{x\sqrt{x^2 - \gamma}}$$

Au point d'intersection, on a $x_*^2 - \gamma = y_*^2$ et $\delta/x_* = y_*$ et dès lors

$$y_1'(x_*)y_2'(x_*) = \frac{-y_*}{\sqrt{y_*^2}} = -1$$

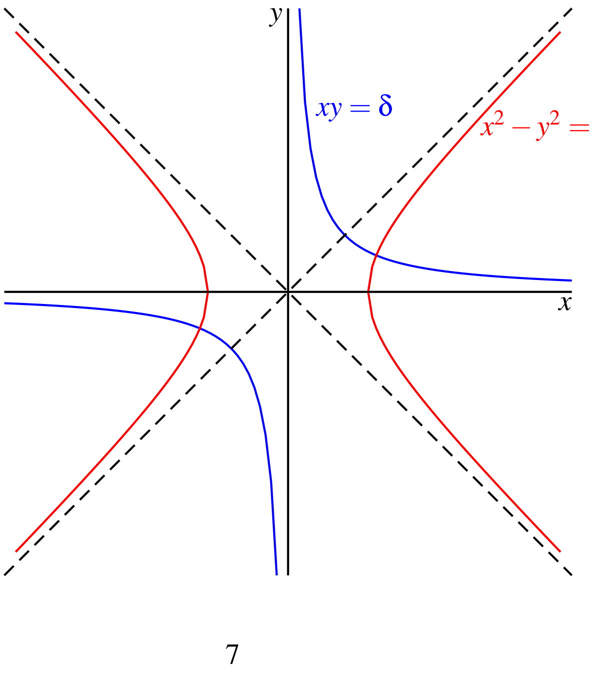
puisque $y_* > 0$.

Les courbes se coupent donc bien à angle droit dans le premier quadrant, quelles que soient les valeurs positives de γ et δ.

On notera, ainsi que le montre le dessin ci-dessous, que les familles de courbes étudiées

$$\begin{cases} xy = \delta \\ x^2 - y^2 = \gamma \end{cases}$$

sont des hyperboles dites équilatères dont les asymptotes correspondent respectivement aux bissectrices du plan et aux axes de coordonnées.



Université de Liège

Prof. Éric J.M. DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

Admission aux études d'ingénieur civil
Épreuve d'analyse

Septembre 2011

Consignes :
- *Répondez aux deux questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.*
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 11h30.*

Introduction.

L'installation d'une éolienne sur un site particulier est généralement précédée d'une étude de longue durée destinée à recueillir les statistiques décrivant la variation du vent à cet endroit. Ignorant l'information sur la direction du vent, puisque les éoliennes peuvent pivoter autour de leur axe vertical pour s'aligner avec celui-ci, la distribution statistique de la vitesse du vent est généralement décrite par une *loi de Weibull* de la forme

$$f(v) = \alpha v \exp\left(-v^2/\lambda^2\right)$$

où v désigne la vitesse du vent et où α et λ sont des paramètres constants strictement positifs déterminés en fonction des mesures effectuées à l'endroit considéré. La fonction $f(v)$ est la *densité de probabilité*. Elle permet d'exprimer la probabilité que le vent souffle à une vitesse comprise entre v_a et v_b par

$$P(v_a \leq v \leq v_b) = \int_{v_a}^{v_b} f(v)dv$$

Question I

Étudiez le graphe de la fonction $f(v)$ sur le domaine utile constitué des valeurs de $v \geq 0$. En particulier,

i. déterminez les asymptotes éventuelles ;

ii. étudiez la croissance/décroissance et déterminez les extrema éventuels ;

iii. étudiez la concavité et déterminez les points d'inflexion éventuels ;

iv. déterminez les équations des tangentes au graphe de f en l'abcisse $v = 0$ ainsi qu'aux éventuels extrema et points d'inflexion du graphe de f ;

v. esquissez le graphique de f et les tangentes déterminées ci-dessus.

Question II

i. Sachant que (condition de normalisation)

$$P(0 < v \leq +\infty) = \int_{0}^{+\infty} f(v)dv = 1$$

montrez que

$$\alpha = \frac{2}{\lambda^2}$$

Dans la suite, on utilisera cette valeur de α.

ii. Calculez en fonction de u (et de λ) la probabilité $F(u)$ que la vitesse du vent soit inférieure à une valeur $u > 0$ fixée.

iii. Montrez que les moments successifs

$$\mu_n = \int_0^\infty v^n f(v) dv \qquad (n \geq 0)$$

vérifient une relation de récurrence du type

$$\mu_n = \beta\, n\, \mu_{n-2} \qquad \text{pour tout } n \geq 2$$

où β désigne une constante à déterminer.

iv. Sachant que (intégrale de Poisson)

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > 0)$$

calculez la moyenne μ_1 de la vitesse du vent

$$\mu_1 = \int_0^{+\infty} v f(v) dv$$

v. Calculer la puissance moyenne théorique $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \eta\, C_p\, \mu_3 = \eta\, C_p \int_0^{+\infty} v^3 f(v) dv$$

(où η et C_p sont des paramètres fixés, $\eta \approx 0.59$ désignant le rendement théorique maximum de l'éolienne et C_p étant le coefficient de puissance) pouvant être produite par une éolienne placée à cet endroit.

Question I

i. La fonction
$$f(v) = \alpha v \exp\left(-v^2/\lambda^2\right)$$
est définie sur $\mathbb{R}$. Nous étudierons cependant ses variations uniquement sur l'intervalle utile $v \in [0, +\infty[$. On peut noter que $f(0) = 0$ et que la fonction est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

ii. La fonction étant définie sur tout l'intervalle utile $[0, +\infty[$, elle n'y présente pas d'asymptote verticale.
Pour identifier une éventuelle asymptote horizontale en $+\infty$, on calcule
$$\lim_{v\to+\infty} \alpha\, v \exp(-v^2/\lambda^2) = \left[+\infty \cdot 0\right]$$
Pour lever l'indétermination, on applique le théorème de L'Hospital à la fonction écrite sous la forme
$$\begin{aligned}\lim_{v\to+\infty} \alpha\, v \exp(-v^2/\lambda^2) &= \alpha \lim_{v\to+\infty} \frac{v}{\exp(v^2/\lambda^2)} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]\\ &= \alpha \lim_{v\to+\infty} \frac{[v]'}{[\exp\left(v^2/\lambda^2\right)]'}\\ &= \alpha \lim_{v\to+\infty} \frac{\lambda^2}{2v\exp\left(v^2/\lambda^2\right)} = 0\end{aligned}$$
On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$. La fonction étant positive, cette asymptote est approchée par valeur supérieure.

iii. Pour identifier d'éventuels extrema et étudier la croissance/décroissance de la fonction, on évalue
$$f'(v) = \alpha \exp\left(-v^2/\lambda^2\right) - 2\alpha\frac{v^2}{\lambda^2} \exp\left(-v^2/\lambda^2\right) = \alpha \exp\left(-v^2/\lambda^2\right)\left(1 - \frac{2v^2}{\lambda^2}\right)$$
Sur $[0, +\infty[$, la dérivée s'annule uniquement en $v_\star = \lambda/\sqrt{2}$ et on a

v	0		$v_\star$		$+\infty$
f'	α	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	

La fonction présente donc un maximum local en $v = v_\star = \lambda/\sqrt{2}$. En ce point, on a
$$f(v_\star) = \frac{\alpha\,\lambda}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-1/2}$$

iv. Par une nouvelle dérivation, on obtient
$$\begin{aligned}f''(v) &= -2\alpha\frac{v}{\lambda^2} \exp\left(-v^2/\lambda^2\right)\left(1 - \frac{2v^2}{\lambda^2}\right) - 4\alpha\frac{v}{\lambda^2} \exp\left(-v^2/\lambda^2\right)\\ &= 2\alpha\frac{v}{\lambda^2} \exp\left(-v^2/\lambda^2\right)\left(\frac{2v^2}{\lambda^2} - 3\right)\end{aligned}$$
Sur $[0, +\infty[$, cette expression s'annule en 0 et en $v = v_I = \sqrt{3/2}\,\lambda > v_\star$. Pour préciser le comportement de la fonction au voisinage de l'origine, il est utile de considérer aussi les variations du signe de f'' pour des valeurs négatives de v

v		0		v_I		$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\cup$	Pt. inflexion	$\cap$	Pt. inflexion	$\cup$	

Puisque la dérivée seconde chance de signe de part et d'autre de 0 et de v_I, on en déduit l'existence de points d'inflexion aux abscisses $v = 0$ et $v = v_I = \sqrt{3/2}\,\lambda$.

v. L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse v_0 est donnée par

$$y = f(v_0) + f'(v_0)(v - v_0)$$

À l'origine, *i.e.* pour $v_0 = 0$, on a $f(0) = 0$ et $f'(0) = \alpha$. Dés lors, l'équation de la tangente à l'origine est donnée par $y = \alpha v$.
Au point $v = v_\star$, on a $f'(v_\star) = 0$ et la tangente est horizontale. Son équation est

$$y = f(v_\star) = \frac{\alpha\,\lambda}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-1/2}$$

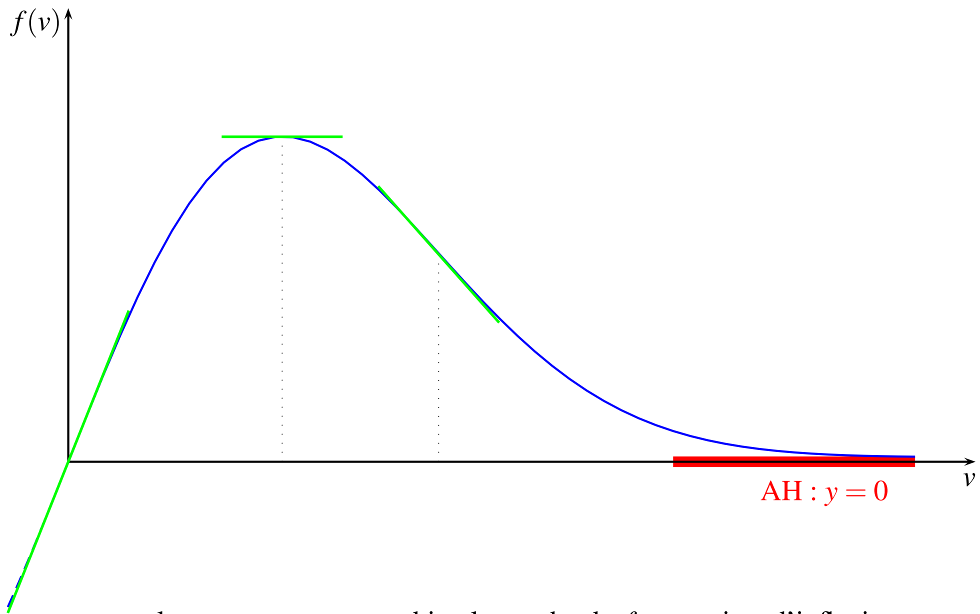
Au point $v = v_I$, on a

$$f(v_I) = \sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda\mathrm{e}^{-3/2}, \qquad f'(v_I) = -2\alpha\mathrm{e}^{-3/2}$$

et l'équation de la tangente est

$$y = \sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda\mathrm{e}^{-3/2} - 2\alpha\mathrm{e}^{-3/2}(v - \sqrt{3/2}\lambda) = 3\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda\mathrm{e}^{-3/2} - 2\alpha\mathrm{e}^{-3/2}v$$

vi. Regroupant tous les résultats précédents, on peut esquisser le graphe de f et les tangentes demandées de la façon suivante :



Remarquons que les tangentes coupent bien le graphe de f aux points d'inflexion.

Question II

i. On doit avoir

$$1 = \int_0^\infty \alpha v \exp\left(-v^2/\lambda^2\right)dv = \left[-\frac{1}{2}\alpha\lambda^2\exp\left(-v^2/\lambda^2\right)\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\alpha\lambda^2$$

Dès lors,

$$\alpha = \frac{2}{\lambda^2}$$

ii. La probabilité recherchée est donnée par

$$F(u) = P(0 \leq v \leq u) = \int_0^u f(v)dv = \left[-\frac{1}{2}\alpha\lambda^2\exp\left(-v^2/\lambda^2\right)\right]_0^u = \frac{1}{2}\alpha\lambda^2\left[1 - \exp\left(-u^2/\lambda^2\right)\right]$$

soit, en utilisant le résultat du point i.,

$$F(u) = 1 - \exp\left(-u^2/\lambda^2\right)$$

iii. Pour tout n positif, on peut transformer

$$\mu_n = \alpha \int_0^{\infty} v^{n+1} \exp(-v^2/\lambda^2) dv$$

en exploitant la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b g'(v)h(v)dv = [g(v)h(v)]_a^b - \int_a^b g(v)h'(v)dv$$

où

$$\begin{cases} g'(v) = \alpha v \exp(-v^2/\lambda^2) \\ h(v) = v^n \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} g(v) = -\frac{1}{2}\alpha\lambda^2 \exp(-v^2/\lambda^2) \\ h'(v) = nv^{n-1} \end{cases}$$

Il vient,

$$\begin{aligned} \mu_n &= \left[-\frac{1}{2}\alpha v^n \lambda^2 \exp(-v^2/\lambda^2)\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\alpha n \lambda^2 \int_0^{\infty} v^{n-1} \exp(-v^2/\lambda^2) dv \\ &= 0 + \frac{1}{2}\alpha n \lambda^2 \int_0^{\infty} v^{n-1} \exp(-v^2/\lambda^2) dv \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $n \geq 2$, il vient donc

$$\mu_n = \frac{1}{2} n \lambda^2 \mu_{n-2}$$

qui est de la forme annoncée dans l'énoncé pour $\beta = \lambda^2/2$.

iv. La valeur moyenne de la vitesse du vent est donnée par

$$\mu_1 = \int_0^{+\infty} v f(v) dv = \alpha \int_0^{+\infty} v^2 \exp(-v^2/\lambda^2) dv$$

En appliquant pour $n = 1$ la procédure d'intégration par parties introduite au point précédent, on obtient

$$\mu_1 = \alpha \int_0^{+\infty} v^2 \exp(-v^2/\lambda^2) dv = \frac{1}{2}\alpha\lambda^2 \int_0^{\infty} \exp(-v^2/\lambda^2) dv$$

L'intégrale apparaissant dans le membre de droite est une intégrale de Poisson du type

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Exploitant ce résultat et la valeur de α obtenue au point i, il vient dès lors

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\alpha\lambda^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1/\lambda^2}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\alpha\lambda^3 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\lambda$$

v. La puissance moyenne théorique est donnée par

$$\mathcal{P} = \eta\, C_p\, \mu_3 = \eta\, C_p \int_0^{+\infty} v^3 f(v) dv$$

En utilisant la formule de récurrence obtenue au point iii., il vient

$$\mathcal{P} = \eta\, C_p\, \mu_3 = \frac{3}{2}\eta\, C_p\, \lambda^2\, \mu_1$$

La valeur de μ_1 a été déterminée au point précédent de sorte que

$$\mathcal{P} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\eta\, C_p\, \lambda^3$$

Université de Liège

Prof. Éric J.M. DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Juillet 2011

Consignes :
- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.*
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 11h30.*

Question I

On considère la fonction $f(x) = \ln \dfrac{x^3}{4-x^2}$

i. Déterminez le domaine de définition de f.

ii. Calculez

$$\lim_{x\to -2} f(x), \qquad \lim_{x\to 0} f(x), \qquad \lim_{x\to 1} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 2} f(x)$$

iii. Déterminez les équations des éventuelles asymptotes du graphe de f.

Question II

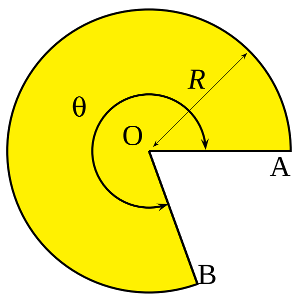
On découpe dans une feuille de papier un secteur circulaire de rayon R et d'ouverture θ comme représenté ci-contre. En appliquant l'un sur l'autre les points A et B, on forme ensuite un cône de sommet O.

i. Montrez que le volume du cône est donné par une expression du type

$$V(\theta) = \alpha R^3 \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

où α est une constante positive à déterminer et où θ est exprimé en radians.

ii. Le rayon R étant fixé, déterminez le volume maximum du cône pouvant être construit de la sorte. Justifiez.



Question III

On pose

$$c_n = \int_0^{\pi} (x+a)^n \cos x \, dx \qquad \text{et} \qquad s_n = \int_0^{\pi} (x+a)^n \sin x \, dx$$

où n désigne un entier positif ou nul et a est un réel quelconque.

i. Calculez c_0 et s_0.

ii. Calculez c_1 et s_1.

iii. Montrez que, pour tout n entier non nul, $c_n = -ns_{n-1}$.

iv. Montrez que, pour tout n entier strictement supérieur à 1,

$$s_n = (\pi + a)^n + a^n - n(n-1)s_{n-2}$$

v. Montrez que, pour tout n pair supérieur ou égal à 2,

$$\int_0^{\pi} \left[(x-\pi)^n - x^n\right] \sin x \, dx = 0$$

SOLUTION

Question I

i. L'argument du logarithme doit être strictement positif soit

$$\frac{x^3}{4-x^2} > 0$$

On a

		-2		0		2	
x^3	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$4-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{x^3}{4-x^2}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

et donc

$$\operatorname{dom} f =]-\infty, -2[\cup]0,2[$$

ii. Calculons les limites

$$\lim_{x\to -2^-} \ln\frac{x^3}{4-x^2} = \ln\left(\lim_{x\to -2^-}\frac{x^3}{4-x^2}\right) = \Big[\ln(+\infty)\Big] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\frac{x^3}{4-x^2} = \ln\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{4-x^2}\right) = \Big[\ln 0\Big] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1} \ln\frac{x^3}{4-x^2} = \ln\left(\lim_{x\to 1}\frac{x^3}{4-x^2}\right) = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3$$

$$\lim_{x\to 2^-} \ln\frac{x^3}{4-x^2} = \ln\left(\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3}{4-x^2}\right) = \Big[\ln(+\infty)\Big] = +\infty$$

iii. • Les limites calculées nous permettent d'identifier des asymptotes verticales $x=-2$, $x=0$ et $x=2$.

• Pour examiner l'existence d'une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$, calculons

$$\lim_{x\to -\infty} \ln\frac{x^3}{4-x^2} = \ln\left(\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3}{4-x^2}\right) = \Big[\ln(+\infty)\Big] = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.

• Pour examiner l'existence d'une asymptote oblique d'équation générale $y = ax+b$ au voisinage de $-\infty$, calculons d'une part

$$a = \lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{\ln\frac{x^3}{4-x^2}}{x} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right]$$

Il s'agit d'une indétermination qui peut être levée par le théorème de l'Hospital. On a

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to -\infty}\frac{\ln\frac{x^3}{4-x^2}}{x} \\ &= \lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x^3}\,\frac{3x^2(4-x^2)+x^3(2x)}{(4-x^2)^2}}{1} \\ &= \lim_{x\to -\infty}\frac{12x^2-x^4}{x^3(4-x^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$b = \lim_{x\to -\infty}(f(x)-ax) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$$

Il n'y a donc pas non plus d'asymptote oblique.

Question II

i. Le volume d'un cône se calcule au moyen de la formule

$$V = \frac{1}{3}hB$$

où h est la hauteur et B est l'aire de la base.

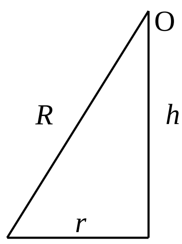
D'une part, le schéma présenté dans l'énoncé nous apprend que le périmètre P de la base du cône est donné par $P = \theta R$. Le rayon r de la base vaut donc

$$r = \frac{P}{2\pi} = \frac{\theta R}{2\pi}$$

et son aire est donnée par

$$B = \pi r^2 = \frac{\theta^2 R^2}{4\pi}$$

D'autre part, dans toute section du cône par un plan vertical, on identifie le triangle rectangle



où

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{1 - \frac{\theta^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

Dès lors

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}hB = \frac{1}{3}\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}\left(\frac{\theta^2 R^2}{4\pi}\right) = \frac{1}{24\pi^2}R^3\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \\ &= \alpha R^3\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \end{aligned}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{24\pi^2}$$

ii. Nous cherchons le maximum de la fonction

$$V(\theta) = \alpha R^3\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

en fonction de la variable $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculons sa dérivée première

$$\begin{aligned} V'(\theta) &= 2\alpha R^3\theta\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} - \alpha R^3\frac{\theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \\ &= \frac{\alpha R^3\theta(8\pi^2 - 3\theta^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \end{aligned}$$

Elle s'annule en $\theta = 0$, ce qui correspond à un volume nul, et en

$$\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$$

qui correspond bien à un maximum puisque la dérivée est positive à gauche de ce point et négative à droite. Pour cette valeur de θ, on obtient

$$\begin{aligned} V\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi\right) &= \alpha R^3 \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi\right)^2 \sqrt{4\pi^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi\right)^2} \\ &= \alpha R^3 \frac{16\pi^3}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{24\pi^2} R^3 \frac{16\pi^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{9\sqrt{3}}\pi R^3 \end{aligned}$$

qui est le volume maximum du cône pouvant être construit de la sorte.

Question III

i.

$$c_0 = \int_0^\pi \cos x \, dx = [\sin x]_0^\pi = 0$$

$$s_0 = \int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

ii. En intégrant par parties, on obtient

$$c_1 = \int_0^\pi (x+a)\cos x \, dx = [(x+a)\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx = -s_0 = -2$$

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^\pi (x+a)\sin x \, dx = [-(x+a)\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx \\ &= \pi + a + a + c_0 = \pi + 2a \end{aligned}$$

iii. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^\pi (x+a)^n \cos x \, dx = [(x+a)^n \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi n(x+a)^{n-1} \sin x \, dx \\ &= -n s_{n-1} \end{aligned}$$

iv. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} s_n &= \int_0^\pi (x+a)^n \sin x \, dx = [-(x+a)^n \cos x]_0^\pi + n\int_0^\pi (x+a)^{n-1} \cos x \, dx \\ &= (\pi+a)^n + a^n + n c_{n-1} \end{aligned}$$

Ensuite, puisque $c_{n-1} = -(n-1)s_{n-2}$, on a

$$s_n = (\pi+a)^n + a^n - n(n-1)\, s_{n-2}$$

v. On a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi [(x-\pi)^n - x^n] \sin x \, dx &= \int_0^\pi (x-\pi)^n \sin x \, dx - \int_0^\pi x^n \sin x \, dx \\ &= s_{n,-\pi} - s_{n,0} \end{aligned}$$

où, en utilisant la formule du point iv. et le fait que n est pair,

$$s_{n,-\pi} = (-\pi)^n - n(n-1)\, s_{n-2,-\pi} = \pi^n - n(n-1)\, s_{n-2,-\pi}$$

et

$$s_{n,0} = \pi^n - n(n-1)\, s_{n-2,0}$$

Étant donné que s_0 ne dépend pas de a (cf. i.), $s_{n-2,-\pi} = s_{n-2,0}$ et le résultat est nul.

Université de Liège

Prof. Éric J.M. DELHEZ

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Septembre 2010

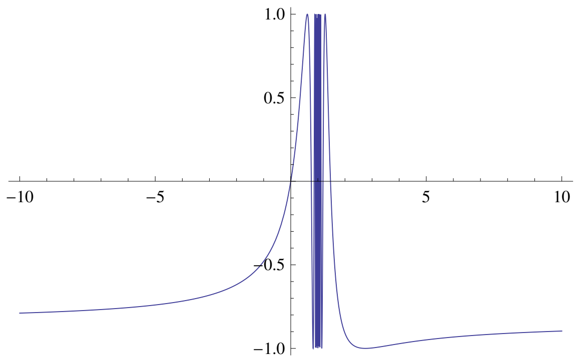
Consignes :
- *Répondez aux deux questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.*
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 11h30.*

Question I

On considère la fonction

$$f(x) = \sin \frac{x}{1-x}$$

En utilisant une calculatrice graphique, on obtient la représentation ci-contre.



i. Étudiez le graphe de la fonction $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$:
   - déterminez le domaine de définition ;
   - déterminez les asymptotes éventuelles ;
   - étudiez la croissance/décroissance et déterminez les extrema éventuels ;
   - esquissez le graphique.

ii. Déterminez le domaine de définition de f. Justifiez.

iii. Déterminez l'ensemble des valeurs de f. Justifiez.

iv. Précisez le comportement de f au voisinage de $x = 1$. Que vaut $\lim_{x\to 1} f(x)$?

v. Déterminez les asymptotes éventuelles du graphe de f.

vi. Calculez $f'(x)$.

vii. Déterminez tous les extrema locaux en précisant la nature de ceux-ci ainsi que les abscisses et les ordonnées correspondantes.

Question II

Soit $$I_n = \int_0^1 x^n \,\mathrm{e}^{-x}\, dx \qquad \text{où} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i. Calculez I_0.

ii. Calculez I_1.

iii. Établissez une relation de récurrence du type $I_n = n\, I_{n-1} - \alpha$ (valable pour tout n entier ≥ 1) où α désigne une constante à déterminer.

iv. Sans calculer explicitement les intégrales, montrez, en effectuant un changement de variable, que l'intégrale

$$\int_1^\beta \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$$

est égale à I_n pour une valeur adéquate de β à déterminer.

v. Montrez que $I_n \leq \dfrac{1}{1+n}$.

Question I

i. Étudions la fonction $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

- La fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
- D'une part, on a

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x}{1-x} = \mp\infty$$

ce qui se traduit par l'existence de l'asymptote verticale $x = 1$.
D'autre part, on calcule également

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-x} = -1$$

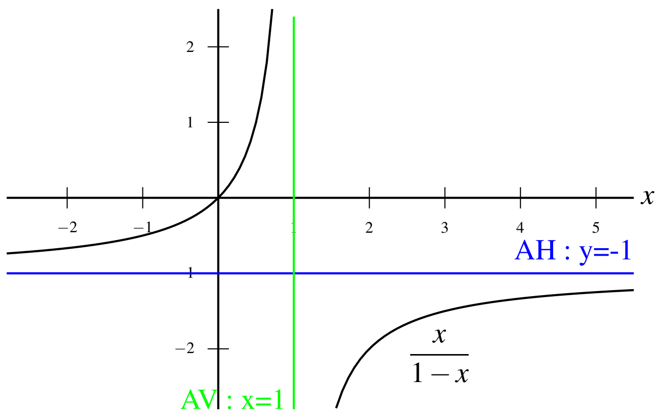
et la fonction possède donc l'asymptote horizontale $y = -1$ en $\pm\infty$. Puisque

$$\frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

cette asymptote est approchée par valeurs supérieures au voisinage de $-\infty$ et par valeurs inférieures au voisinage de $+\infty$.
- Pour identifier d'éventuels extrema, on calcule

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0, \qquad \forall x \neq 1$$

La fonction est donc strictement croissante sur son domaine de définition et il n'existe pas d'extremum.
- En utilisant les informations précédentes, on peut esquisser le graphique de la fonction g :



ii. La fonction $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$ étant définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et la fonction sinus étant définie sur $\mathbb{R}$, la fonction

$$f(x) = \sin\frac{x}{1-x}$$

est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

iii. Comme le montre le graphique, la fonction f prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$.
C'est évidemment une conséquence du fait que la fonction sinus prend ses valeurs dans cet intervalle. Cependant, pour que les valeurs de f couvrent tout l'intervalle $[-1,1]$, il faut aussi que $g(x)$, l'argument de la fonction sinus, varie 'suffisamment'. C'est le cas puisque, en observant le graphique de g, on constate que cette fonction prend toutes les valeurs réelles sauf -1. En particulier, l'ensemble des valeurs de g inclut l'intervalle $[0,2\pi]$, soit une période complète de la fonction sinus.
L'ensemble des valeurs de la fonction f est donc bien l'intervalle $[-1,1]$.

iv. Puisque $\lim\limits_{x\to 1^\pm} \dfrac{x}{1-x} = \mp\infty$, on a

$$\lim_{x\to 1^\pm} \sin\frac{x}{1-x} = \lim_{u\to\mp\infty} \sin u$$

et cette dernière limite n'existe pas, vu la périodicité de la fonction sinus.

Au voisinage de 1, la fonction f oscille donc, comme la fonction sinus, entre les valeurs +1 et -1, ce qui correspond bien au comportement présenté sur le graphe de f.

v. Il résulte de ce qui précède que la fonction f ne présente pas d'asymptote verticale en $x = 1$.

Au vu du domaine de f, seule la recherche d'asymptote(s) horizontale(s) ou oblique(s) au voisinage de l'infini s'impose encore.

On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sin\frac{x}{1-x} = \lim_{u\to -1} \sin u = \sin(-1) = -\sin 1$$

Dès lors, le graphe de f possède une asymptote horizontale d'équation

$$y = -\sin 1$$

en $+\infty$ et en $-\infty$. Puisque

$$\frac{x}{1-x} > -1$$

au voisinage de $-\infty$ et que la fonction sinus est croissante au voisinage de -1, on a aussi $f(x) > -1$ et l'asymptote horizontale est approchée par valeurs supérieures au voisinage de $-\infty$. À l'inverse, le graphe de f est situé sous l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

vi. Pour tout $x \neq 1$, il vient

$$f'(x) = \left(\sin\frac{x}{1-x}\right)' = \cos\frac{x}{1-x} \,.\, \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \cos\frac{x}{1-x} \,.\, \frac{1}{(1-x)^2}$$

vii. Les zéros de f' sont ceux de la fonction $\cos\dfrac{x}{1-x}$, soit les solutions x de l'équation

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Cette équation possède une infinité de solutions

$$x_k = \frac{(1+2k)\pi}{2+(1+2k)\pi},\ k \in \mathbb{Z}$$

La fonction cosinus changeant de signe chaque fois qu'elle s'annule, ces solutions correspondent toutes à des extrema locaux de f, avec une alternance minimum/maximum, comme le confirme le calcul de la valeur de f en ces points :

$$f(x_k) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cos k\pi = (-1)^k$$

Plus précisément, la fonction f possède une infinité de *maxima locaux* aux abscisses x_k pour lesquelles k est pair, soit, posant $k = 2\ell$, en

$$x_{2\ell} = \frac{(1+4\ell)\pi}{2+(1+4\ell)\pi},\ \ell \in \mathbb{Z} \qquad \text{où} \qquad f(x_{2\ell}) = 1$$

De même, la fonction f possède une infinité de *minima locaux* aux abscisses x_k pour lesquelles k est impair, soit, posant $k = 2\ell+1$, en

$$x_{2\ell+1} = \frac{(3+4\ell)\pi}{2+(3+4\ell)\pi},\ \ell \in \mathbb{Z} \qquad \text{où} \qquad f(x_{2\ell+1}) = -1$$

Question II

i. Pour $n=0$, il vient
$$I_0=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,dx=\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

ii. Pour $n=1$, on a
$$I_1=\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,dx$$
qui peut être évaluée en utilisant la formule d'intégration par parties
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$
en posant
$$\begin{cases} f(x)=x \\ g'(x)=\mathrm{e}^{-x}\end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} f'(x)=1 \\ g(x)=-\mathrm{e}^{-x}\end{cases}$$
Il vient
$$\begin{aligned} I_1&=\Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,dx \\ &=-\frac{1}{\mathrm{e}}+I_0=-\frac{1}{\mathrm{e}}+\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=1-\frac{2}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

iii. La relation de récurrence recherchée peut être obtenue en intégrant par parties l'expression
$$I_n=\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$
En posant
$$\begin{cases} f(x)=x^n \\ g'(x)=\mathrm{e}^{-x}\end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} f'(x)=nx^{n-1} \\ g(x)=-\mathrm{e}^{-x}\end{cases}$$
il vient, pour tout $n\geq 1$,
$$\begin{aligned} I_n&=\Big[-x^n\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1 nx^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx \\ &=-\mathrm{e}^{-1}+n\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx=n\,I_{n-1}-\frac{1}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$
qui est de la forme annoncée avec $\alpha=1/\mathrm{e}$.

iv. Dans l'expression
$$\int_1^\beta \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$$
introduisons le changement de variable
$$\ln x=t \qquad \text{soit} \qquad x=\mathrm{e}^t$$
En tenant compte de
$$\frac{dx}{x}=dt \qquad \text{ou} \qquad dx=\mathrm{e}^t\,dt$$
on a
$$\int_1^\beta \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx=\int_0^{\ln\beta}\frac{t^n}{\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{e}^t\,dt=\int_0^{\ln\beta}t^n\mathrm{e}^{-t}dt$$
Si $\beta=\mathrm{e}$, il vient donc, en remplaçant la variable d'intégration t par x,
$$\int_1^\beta \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}dx=I_n$$

v. Sur l'intervalle $[0,1]$, on a $\mathrm{e}^{-x} \leq 1$ et donc

$$x^n \mathrm{e}^{-x} \leq x^n$$

Dès lors, il vient

$$\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\, dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

et

$$I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

comme annoncé.

Université de Liège
Prof. Éric J.M. DELHEZ
Dr. Francine MONJOIE

Juillet 2010

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Consignes :
- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.*
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *Préparez votre carte d'identité sur votre table.*
- *L'examen se termine à 11h30.*

Question I

i. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x\left(\ln\frac{x}{1+a^2}\right)^3$$

où a désigne un paramètre réel quelconque. En discutant s'il y a lieu en fonction de a,

(a) déterminez le domaine de définition de f ;

(b) calculez les limites de f aux frontières de son domaine de définition et déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f ;

(c) déterminez et caractérisez les éventuels extrema ;

(d) étudiez la concavité du graphe et situez les éventuels points d'inflexion ;

(e) dressez un tableau récapitulatif des propriétés de f et esquissez son graphe.

ii. En exploitant les résultats obtenus au point précédent, sans effectuer aucun calcul supplémentaire, esquissez le graphe de

$$f_a(x) = a\,x\left(\ln\frac{x}{1+a^2}\right)^3$$

en discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur du paramètre réel a.

Question II

On considère une fonction g définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction h par

$$h(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

i. Quel est le domaine de définition de h ?

ii. Que vaut $h'(x)$?

iii. Que vaut $h''(x)$?

Question III

On appelle "coefficients de Fourier" d'une fonction f, les réels $a_0, a_1, a_2 \ldots$ et $b_1, b_2 \ldots$ définis par

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, \qquad k = 1,2,\ldots$$

(lorsque ces intégrales existent).

i. Calculez les coefficients de Fourier a_0, a_1 et b_1 de $f(x) = x^2$.

ii. Généralisez les résultats précédents en calculant les coefficients a_k et b_k ($k \in \mathbb{N}_0$) de $f(x) = x^2$.

SOLUTION

Question I

i. (a) La fonction f est définie si $\ln \dfrac{x}{1+a^2}$ est défini, c'est-à-dire si $x > 0$.
Ainsi, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, la fonction f est définie sur $]0, +\infty[$.

(b) Calculons

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \left(\ln \frac{x}{1+a^2} \right)^3$$

A priori, nous constatons une indétermination du type $0 \times (-\infty)$. Cependant, nous savons que, au voisinage de 0, toute puissance positive de x l'emporte sur le logarithme. Cette limite est donc nulle.
Voici, néanmoins, une démonstration explicite :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln \dfrac{x}{1+a^2}}{x^{-1/3}} \right)^3 &= \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \dfrac{x}{1+a^2}}{x^{-1/3}} \right)^3 \\
&= \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-\dfrac{1}{3} x^{-4/3}} \right)^3 \\
&= -3 \left(\lim_{x \to 0^+} x^{1/3} \right)^3 = 0
\end{aligned}$$

la troisième égalité résultant de l'application du théorème de l'Hospital.
Ainsi,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

et il n'y a pas d'asymptote verticale en $x = 0$.

Au voisinage de $+\infty$,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\ln \frac{x}{1+a^2} \right)^3 = +\infty$$

et il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.
Examinons l'existence éventuelle d'une asymptote oblique en $+\infty$ en calculant

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{x}{1+a^2} \right)^3 = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote en $+\infty$.

Nous concluons qu'il n'existe aucune asymptote, quel que soit $a \in \mathbb{R}$.

(c) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée première est donnée par

$$f'(x) = \left(\ln \frac{x}{1+a^2} \right)^3 + 3x \left(\ln \frac{x}{1+a^2} \right)^2 \left(\frac{1}{x} \right) = \left(\ln \frac{x}{1+a^2} \right)^2 \left(\ln \frac{x}{1+a^2} + 3 \right)$$

Elle s'annule si

$$\ln \frac{x}{1+a^2} = 0 \qquad \text{soit si} \qquad x = 1 + a^2$$

ou si

$$\ln \frac{x}{1+a^2} = -3, \qquad \text{c'est-à-dire si} \qquad x = (1+a^2)\,\mathrm{e}^{-3} < 1+a^2$$

Le signe de f' est celui de $\ln \dfrac{x}{1+a^2} + 3$, c'est-à-dire, négatif à gauche de $(1+a^2)\,\mathrm{e}^{-3}$ et positif à droite.

Nous avons le tableau de variation suivant :

	0		$(1+a^2)\,\mathrm{e}^{-3}$		$1+a^2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Nous constatons que f est minimale en $x = (1+a^2)\,\mathrm{e}^{-3}$. La valeur du minimum est

$$f\Big((1+a^2)\,\mathrm{e}^{-3}\Big) = (1+a^2)\,\mathrm{e}^{-3}\left[\ln(\mathrm{e}^{-3})\right]^3 = -27(1+a^2)\,\mathrm{e}^{-3} < 0$$

(d) La fonction f' est également dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f''(x) = 3\left(\ln \frac{x}{1+a^2}\right)^2 \frac{1}{x} + 6\left(\ln \frac{x}{1+a^2}\right)\frac{1}{x} = \frac{3}{x}\left(\ln \frac{x}{1+a^2}\right)\left(\ln \frac{x}{1+a^2} + 2\right)$$

Elle s'annule si

$$\ln \frac{x}{1+a^2} = 0 \qquad \text{c'est-à-dire si} \qquad x = 1+a^2$$

ou si

$$\ln \frac{x}{1+a^2} = -2 \qquad \text{soit si} \qquad x = (1+a^2)\,\mathrm{e}^{-2} < 1+a^2$$

Puisque $x > 0$, le signe de f'' est celui du produit

$$\left(\ln \frac{x}{1+a^2}\right)\left(\ln \frac{x}{1+a^2} + 2\right)$$

Il est donc positif si les deux facteurs ont le même signe, ce qui est le cas en dehors du segment $[(1+a^2)\,\mathrm{e}^{-2}, 1+a^2]$. Il est négatif à l'intérieur de ce segment.

Nous avons le tableau de variation suivant :

	0		$(1+a^2)\,\mathrm{e}^{-2}$		$1+a^2$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	$+\infty$

Ainsi, le graphe de f possède deux points d'inflexion situés en $(1+a^2)\,\mathrm{e}^{-2}$ et $1+a^2$.

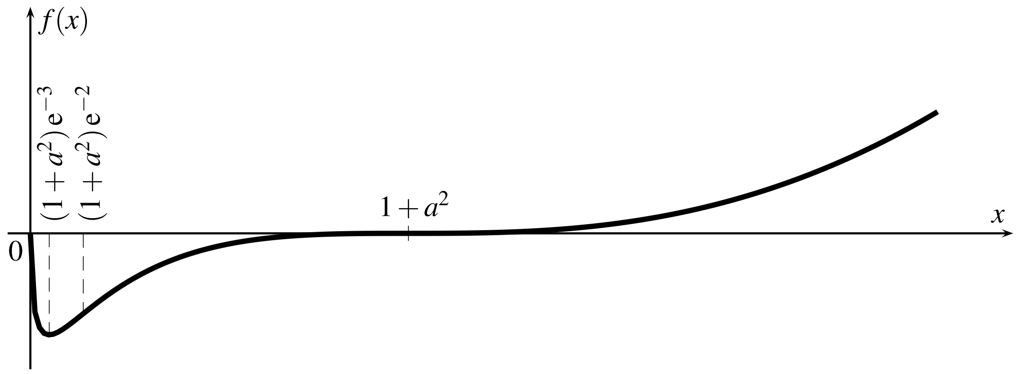
(e) En vue d'esquisser le graphe de f, dressons le tableau récapitulatif :

	0		$(1+a^2)\,\mathrm{e}^{-3}$		$(1+a^2)\,\mathrm{e}^{-2}$		$1+a^2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	
f''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$ $\cup$	$-27(1+a^2)\,\mathrm{e}^{-3}$ min	$\nearrow$ $\cup$	P.I.	$\nearrow$ $\cap$	0 P.I.	$\nearrow$ $\cup$	$+\infty$

Précisons aussi que le graphe présente un point d'inflexion à tangente horizontale en l'abscisse $1+a^2$ et que la tangente est verticale en 0^+ puisque

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$$

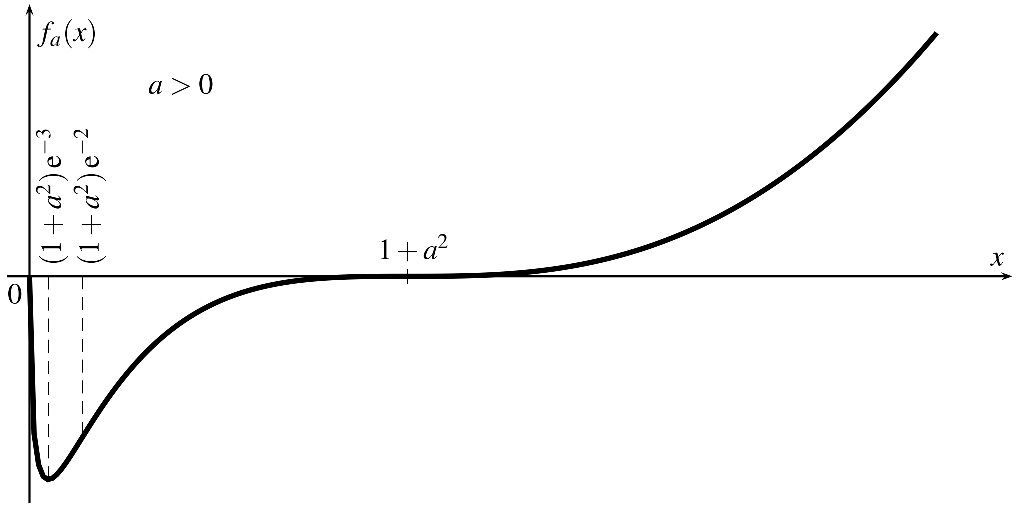
Le graphe a donc l'allure suivante



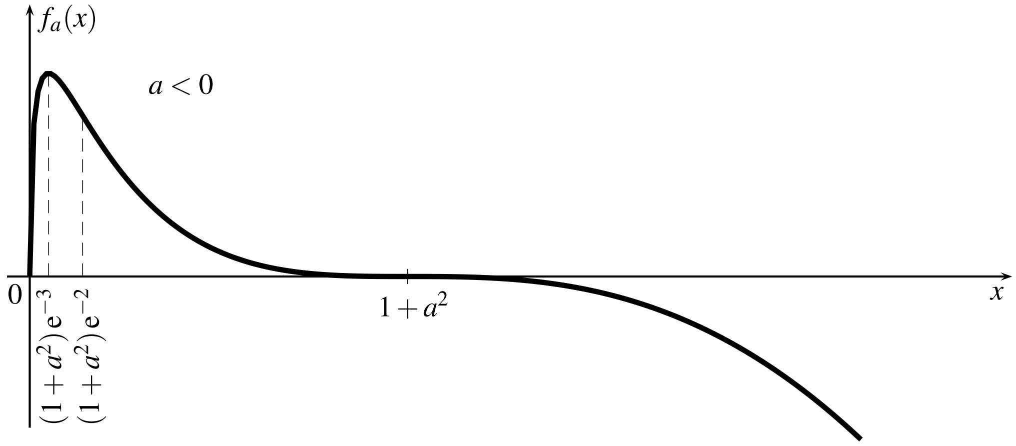
ii. Notons que $f_a(x) = af(x)$ c'est-à-dire que les valeurs de la fonction f_a sont obtenues en multipliant celles de la fonction f par a.

- Si $a = 0$, alors la fonction f_a est identiquement nulle, c'est-à-dire nulle pour toutes les valeurs de x. Son graphe se confond avec l'axe des abscisses.

- Si $a > 0$, le graphe de f_a a la même allure que celui de f, si ce n'est que la valeur du minimum est multipliée par a.



- Si $a < 0$, notons que
$$f_{-a}(x) = -f_a(x)$$
c'est-à-dire que les valeurs de f_{-a} sont exactement opposées aux valeurs de f_a. En particulier, le graphe de f_{-a} est symétrique de celui de f_a par rapport à l'axe des abscisses.



Question II

i. La fonction h est obtenue par composition des fonctions g et $1/x$. Vu que la fonction $1/x$ est définie sur $\mathbb{R}_0$ et à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ de définition de la fonction g, la fonction composée est définie sur $\mathbb{R}_0$.
Ainsi la fonction h est définie sur $\mathbb{R}_0$.

ii. Puisque g et $1/x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_0$, on a

$$h'(x) = g'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2}$$

iii. Puisque g est deux fois dérivable, nous déduisons

$$\frac{d}{dx}g'\left(\frac{1}{x}\right) = g''\left(\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2}$$

puis, en tenant compte de la dérivée d'un produit,

$$h''(x) = g''\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)^2 + g'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3} = \frac{1}{x^4}\,g''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}\,g'\left(\frac{1}{x}\right)$$

Question III

i. Vu que $\cos 0 = 1$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3}$$

Le calcul de

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos x\,dx$$

s'effectue par parties en posant

$$\begin{cases} u = x^2 \\ v' = \cos x \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} u' = 2x \\ v = \sin x \end{cases}$$

Ainsi,

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos x\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left.x^2\sin x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\sin x\,dx\right) = -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$$

en tenant compte de $\sin(\pm\pi) = 0$.
Une seconde intégration par parties, en posant

$$\begin{cases} u = x \\ v' = \sin x \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\cos x \end{cases}$$

conduit à

$$\begin{aligned} a_1 = -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx &= \frac{2}{\pi}\left(\left.x\cos x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\Big(\pi\cos\pi - (-\pi)\cos(-\pi) - \left[\sin x\right]_{-\pi}^{\pi}\Big) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Le calcul de

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \, dx$$

pourrait s'effectuer de manière analogue à l'aide de deux intégrations par parties successives. Notons cependant que $x^2 \sin x$ est une fonction impaire puisque

$$(-x)^2 \sin(-x) = -x^2 \sin x$$

et que l'intégration se fait sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine. Ceci implique que $b_1 = 0$.

En résumé, nous avons trouvé

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_1 = -4, \quad b_1 = 0$$

ii. En général, pour $k \in \mathbb{N}_0$, le calcul de

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) \, dx$$

s'effectue aussi par parties. On pose

$$\begin{cases} u = x^2 \\ v' = \cos(kx) \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} u' = 2x \\ v = \dfrac{\sin(kx)}{k} \end{cases}$$

De là,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{x^2 \sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x \sin(kx)}{k} \, dx \right) = -\frac{2}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) \, dx$$

en tenant compte de $\sin(\pm k\pi) = 0$.

Une seconde intégration par parties, en posant

$$\begin{cases} u = x \\ v' = \sin(kx) \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\dfrac{\cos(kx)}{k} \end{cases}$$

conduit à

$$\begin{aligned} a_k = -\frac{2}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) \, dx &= \frac{2}{k\pi} \left(\left[\frac{x \cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} \, dx \right) \\ &= \frac{2}{k^2\pi} \left(\pi \cos(k\pi) - (-\pi) \cos(-k\pi) - \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{4(-1)^k}{k^2} \end{aligned}$$

puisque $\cos(\pm k\pi) = (-1)^k$.

Chaque coefficient

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(kx) \, dx$$

résulte de l'intégration d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine et est donc nul.

En conclusion,

$$a_k = \frac{4(-1)^k}{k^2} \quad \text{et} \quad b_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Remarquons que, en particulier pour $k = 1$, on retrouve les résultats précédents

$$a_1 = -4 \qquad \text{et} \qquad b_1 = 0$$