Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Juillet 2017

Question 1 *(· /8) Résoudre dans* $\mathbb{R}$

$$2\sin 2x + \cos 2x = 2\sin^2 x + 3\tan x$$

et représenter les solutions comprises entre $-\pi$ *et* π *sur le cercle trigonométrique.*

Solution

Tout d'abord, nous exprimons les conditions d'existence. La présence de $\tan x$ impose que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ qui est la seule condition à exprimer.

Méthode 1

En utilisant $2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$, l'équation s'écrit

$$2\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + 3\tan x.$$

Nous voyons alors apparaitre le sinus et le cosinus de l'angle double ainsi que la tangente de l'angle. Il parait dès lors opportun d'utiliser les formules qui lient le cosinus et le sinus de l'angle double à la tangente, c'est-à-dire

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$
$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}.$$

En utilisant ces formules, l'équation devient

$$\frac{2}{1+\tan^2 x}(2\tan x + 1 - \tan^2 x) = 1 + 3\tan x. \tag{1}$$

On pose maintenant $t = \tan x$ ce qui nous permet de réécrire (1) (après avoir multiplié par $(1+t^2)$) comme

$$4t + 2 - 2t^2 = 1 + 3t + t^2 + 3t^3$$
$$3t^3 + 3t^2 - t - 1 = 0 \tag{2}$$
$$(t+1)(3t^2-1) = 0.$$

Par la règle du produit nul, on obtient donc deux familles de solutions, c'est-à-dire

(i) $t = -1$, soit $\tan x = -1$ ce qui nous donne
$x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z}$, ou

(ii) $t = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ soit $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ qui est une valeur d'angle remarquable pour la tangente et fournit les solutions
$x = \frac{\pi}{6} + k_2\pi, k_2 \in \mathbb{Z}$
ou $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ qui fournit les solutions
$x = -\frac{\pi}{6} + k_3\pi, k_3 \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est donc $\{-\frac{\pi}{4} + k_1\pi, \frac{\pi}{6} + k_2\pi, -\frac{\pi}{6} + k_3\pi, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}\}$.

Les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sont $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$ qui sont représentées sur le cercle trigonométrique sur la figure suivante.

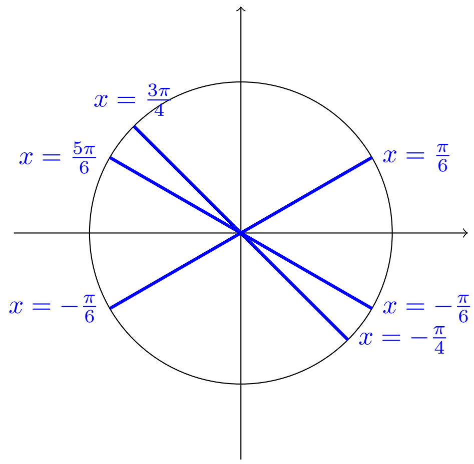


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

Méthode 2

On utilise $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ et $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, on remplace également la tangente par un quotient de sinus et cosinus, on obtient donc

$$4 \sin x \cos x + \cos^2 x - 3 \sin^2 x = 3\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$4 \sin x \cos^2 x + \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x - 3 \sin x = 0,$$

qui est presque une équation homogène de degré 3 si on excepte le dernier terme. Si on multiplie celui-ci par $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$, on obtient

$$4 \sin x \cos^2 x + \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x - 3 \sin x(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0,$$

ce qui, en réarrangeant les termes et en divisant par $\cos^3 x$ (autorisé en vertu des conditions d'existence), nous ramène à (2). La suite est alors similaire à la méthode 1.

Méthode 3

On utilise $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ et $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, on remplace également la tangente par un quotient de sinus et cosinus, on obtient donc

$$4\sin x\cos^2 x + \cos x - 4\sin^2 x\cos x - 3\sin x = 0.$$

On remplace ensuite $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
4\sin x - 4\sin^3 x + \cos x - 4\sin^2 x\cos x - 3\sin x &= 0\\
\sin x - 4\sin^3 x + \cos x - 4\sin^2 x\cos x &= 0\\
(\sin x + \cos x) - 4\sin^2 x(\sin x + \cos x) &= 0\\
(\sin x + \cos x)(1 - 4\sin^2 x) &= 0
\end{aligned}$$

ce qui, par la règle du produit nul, mène aux deux mêmes familles de solutions que pour la méthode 1, à savoir $\tan x = -1$ ou $\sin x = \pm\frac{1}{2}$.

Question 2 *(· /4) A, B et C désignant les mesures des angles d'un triangle non dégénéré, montrer que si :*

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin C}{1 - \cos C}$$

alors le triangle est isocèle.

Solution

Vérifions tout d'abord les conditions d'existence :

1. $\operatorname{tg} B = \dfrac{\sin B}{\cos B}$ ce qui entraine que $\cos B \neq 0 \ \Rightarrow\ B \neq 90° + k180°$.
2. $1 - \cos C \neq 0 \ \Rightarrow\ C \neq 0° + k360°$ ce qui est toujours vérifié puisque le triangle est non-dégénéré. $\boxed{\text{A}}$

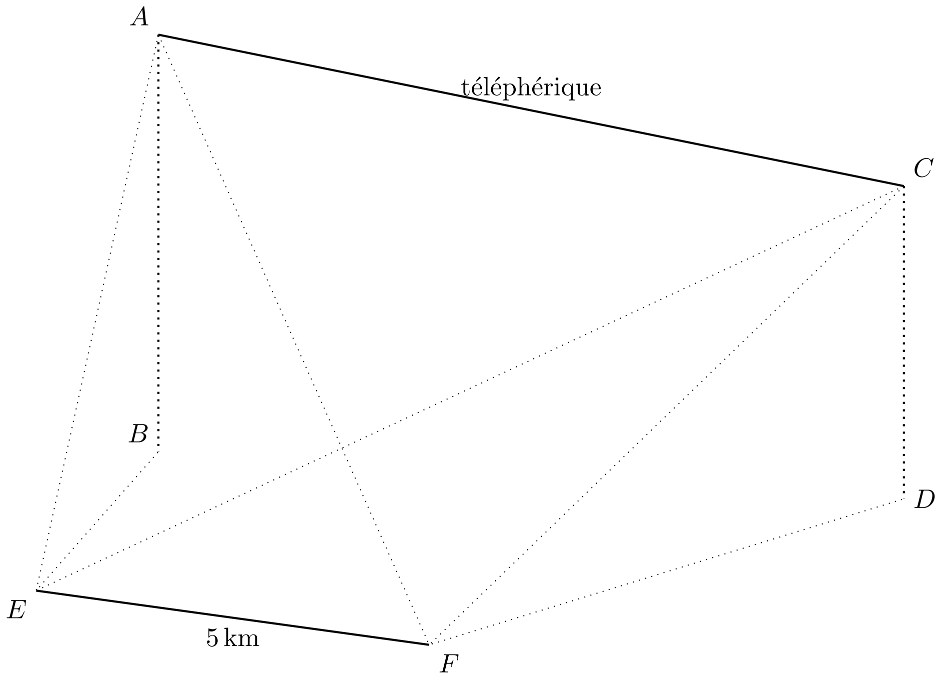
L'égalité peut être transformée successivement en utilisant la relation $2\sin a\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C}{1-\cos C} \ \Leftrightarrow\ \sin B - \sin B\cos C = \sin C\cos B \ \boxed{\text{B}}\\
&\Leftrightarrow\ \sin B - \frac{1}{2}\sin(B-C) - \frac{1}{2}\sin(B+C) = \frac{1}{2}\sin(C-B) + \frac{1}{2}\sin(C+B)
\end{aligned}$$

Après simplification, l'égalité de départ devient $\sin B = \sin(B+C)$ $\boxed{\text{C}}$, qui est vérifiée pour :

1. $B = B + C \ \Rightarrow\ C = 0°$ qui est à rejeter puisque le triangle est non-dégénéré.
2. $B = \pi - (B+C) \ \Rightarrow\ 2B = \pi - C$, or $A + B + C = \pi$ ce qui donne finalement après substitution $2B = A + B \ \Rightarrow\ B = A$ et le triangle est isocèle (CQFD) $\boxed{\text{D}}$.

Question 3 *(· /8) On désire relier les sommets A et C de deux collines par un téléphérique. Afin de déterminer l'ampleur des travaux, des mesures topographiques sont effectuées Ã partir de deux points E et F distants de* 5 km *et situés tous deux dans un même plan d'observation horizontal. Les points B et D représentent respectivement les bases des sommets A et C dans le plan d'observation. Les angles* $\widehat{AFE}$, $\widehat{AEF}$ *et* $\widehat{AEB}$ *valent respectivement* 12.3672°, 157.1063° *et* 5.8750° *et les angles* $\widehat{CFE}$, $\widehat{CEF}$ *et* $\widehat{CFD}$ *valent respectivement* 80.2493°, 68.9063° *et* 3.1996°.



a) Calculer la hauteur des sommets des deux collines par rapport au plan d'observation (segments AB et CD).

b) Calculer la distance entre les deux sommets (segment AC)

Solution

Point a

L'application de la formule des sinus dans le triangle EAF donne :

$$\frac{\overline{AE}}{\sin\widehat{AFE}} = \frac{\overline{EF}}{\sin\widehat{EAF}}$$

où l'angle $\widehat{EAF} = 180° - \widehat{AFE} - \widehat{AEF} = 180° - 12.3672° - 157.1063° = 10.5265°$, ce qui donne :

$$\overline{AE} = \overline{EF}\frac{\sin\widehat{AFE}}{\sin\widehat{EAF}} = 5000\frac{\sin 12.3672}{\sin 10.5265} = 5861.73\,\mathrm{m}$$

La longueur du segment AB est alors aisément déterminée en notant que le triangle AEB est rectangle en B et il vient :

$$\sin \widehat{AEB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \;\Rightarrow\; \overline{AB} = \overline{AE} \sin \widehat{AEB} = 5861.73 \sin 5.8750 = 600\,\mathrm{m}$$

De manière similaire en appliquant la formule des sinus dans le triangle ECF, on détermine :

$$\overline{CF} = \overline{EF} \frac{\sin \widehat{CEF}}{\sin \widehat{ECF}} = 5000 \frac{\sin 68.9063}{\sin 30.8444} = 9098.67\,\mathrm{m}$$

Et ensuite dans le triangle rectangle CFD :

$$\sin \widehat{CFD} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}} \;\Rightarrow\; \overline{CD} = \overline{CF} \sin \widehat{CFD} = 9098.67 \sin 3.1996 = 507.8\,\mathrm{m}$$

Point b

Les points A, C, F et E n'étant pas sur un même plan, il n'est pas possible de déterminer $\overline{AC}$ directement en calculant la valeur de l'angle AFC par la différence de $\widehat{CFE}$ et $\widehat{AFE}$ et en résolvant le triangle AFE.
Par contre, les points A, B, C et D sont dans un même plan et il est possible d'exprimer :

$$\overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 + (\overline{AB} - \overline{CD})^2$$

La longueur du segment BD est déterminée en résolvant le quadrilatère plan $BDFE$.

Commençons par déterminer la longueur des segments BE et DF :
- $\overline{BE} = \overline{AE} \cos \widehat{AEB} = 5830.94\,\mathrm{m}$
- $\overline{DF} = \overline{CF} \cos \widehat{CFD} = 9084.49\,\mathrm{m}$

Les diagonales BF et DE sont calculées en résolvant respectivement les triangles rectangles ABF et CDE :
- $\overline{BF} = \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{AB}^2}$ où $\overline{AF}$ est déterminé en appliquant la formule des sinus dans le triangle AEF, soit $\overline{AF} = 10\,647\,\mathrm{m}$ et $\overline{BF} = 10\,630.08\,\mathrm{m}$.
- $\overline{DE} = \sqrt{\overline{EC}^2 - \overline{CD}^2}$ où $\overline{EC}$ est déterminé en appliquant la formule des sinus dans le triangle ECF, soit $\overline{EC} = 9611.25\,\mathrm{m}$ et $\overline{DE} = 9597.82\,\mathrm{m}$.

La réponse finale s'obtient en appliquant la formule d'Al-Kashi successivement dans les triangles BEF, DEF et BDE :
- $\overline{BF}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EF}^2 - 2\overline{BE}\,\overline{EF} \cos \widehat{BEF} \;\Rightarrow\; \widehat{BEF} = 157.8306°$.
- $\overline{DF}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EF}^2 - 2\overline{DE}\,\overline{EF} \cos \widehat{DEF} \;\Rightarrow\; \widehat{DEF} = 68.8748°$.
- $\overline{BD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{ED}^2 - 2\overline{BE}\,\overline{ED} \cos(\widehat{BEF} - \widehat{DEF}) \;\Rightarrow\; \overline{BD} = 11\,139\,\mathrm{m}$.

Et il vient :

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BD}^2 + (\overline{AB} - \overline{CD})^2} = 11\,139.4\,\mathrm{m}$$

ATTENTION

- — NOM (en MAJUSCULES), prénom (en minuscules) sur chaque feuille.
- — Rendre une feuille par question même s'il n'y a pas de réponse.
- — Spécifier les conditions d'existence.
- — GSM et PC interdits.
- — Il est permis d'utiliser une calculette.
- — Préparer une pièce d'identité sur la table.
- — Fin de l'examen Ã 12 heures.

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Septembre 2016

Question 1 *Résoudre l'équation trigonométrique suivante en précisant les conditions d'existence :*

$$\frac{\tan x - \sin x}{\tan x + \sin x} = 2 - 2\cos x$$

Représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ *sur le cercle trigonométrique.*

Solution

C. E. : $\tan x$ doit être défini donc $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
De plus, $\tan x + \sin x \neq 0$. Pour trouver les valeurs à rejeter des conditions d'existence, on résout $\tan x + \sin x = 0$. On obtient $\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x = 0$ qui se factorise en $\sin x\ (\frac{1}{\cos x} + 1) = 0$ qui admet comme solution soit $\sin x = 0$, c'est-à-dire $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, soit $\cos x = -1$, c'est-à-dire $x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Les conditions d'existence se résument donc à $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Pour la suite, on suppose que x satisfait les conditions d'existence. On peut donc réécrire l'équation initiale comme

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = (2 - 2\cos x)(\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x).$$

En utilisant les conditions d'existence, on en déduit que $\sin x \neq 0$, le $\sin x$ peut donc se simplifier et on obtient

$$\frac{1}{\cos x} - 1 = (2 - 2\cos x)(\frac{1}{\cos x} + 1).$$

En ramenant tout sur le même dénominateur, et puisque $\cos x \neq 0$ d'après les conditions d'existence, on a

$$1 - \cos x = 2 + 2\cos x - 2\cos x - 2\cos^2 x,$$

ce qui se simplifie en

$$2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0.$$

On pose à présent $t = \cos x$ et on résout $2t^2 - t - 1 = 0$ qui admet les deux solutions $t = \frac{1 \pm 3}{4}$. Les solutions de $\cos x = 1$ sont à rejeter en vertu des conditions d'existence. Les solutions de $\cos x = -\frac{1}{2}$ mènent à $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Seules les solutions $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ sont à reporter sur le cercle trigonométrique.

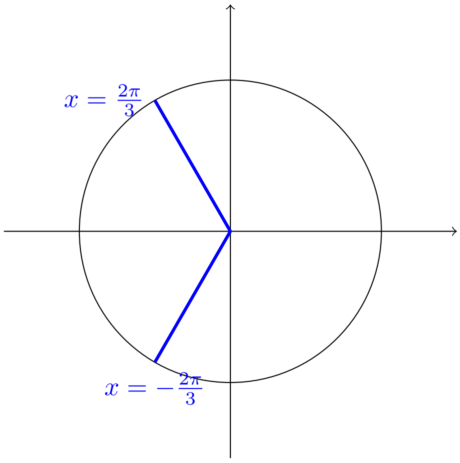
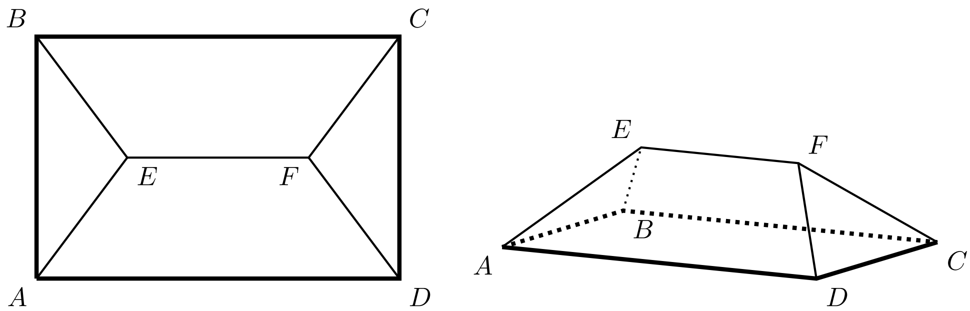


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

---

Question 2 *On souhaite couvrir la toiture à quatre pans représentée en vue de haut et en perspective sur la figure suivante. La base de la toiture est rectangulaire, de côtés $AB = 8m$ et $BC = 12m$. La toiture est symétrique, c'est-à-dire que les pans ABE et CDF sont isométriques, de même que les pans $BCFE$ et $ADFE$. En mesurant les arêtes principales de la toiture, on obtient que $AE = 6m$, $EF = 6m$ et $FD = 6m$.*



(a) *Calculer la surface totale de la toiture à couvrir.*

(b) *Calculer la hauteur de l'arête EF par rapport à la base rectangulaire.*

(c) *On souhaite poser des panneaux photovoltaïques sur la toiture. Pour ce faire, une inclinaison entre 30 ° et 40 ° est souhaitée. Déterminer quel pan de la toiture est le plus approprié pour accueillir les panneaux.*

Solution Soit E' la projection de E sur le plan $ABCD$. Soit $\bar{E}$ le milieu du segment AB. On note aussi par F' la projection de F sur le plan $ABCD$ et par $\bar{F}$ la projection de F' sur le segment BC.

Dans le triangle rectangle $B\bar{E}E'$, on sait que $|B\bar{E}| = 4\ m$ et $|\bar{E}E'| = 3\ m$ par symétrie. Par le théorème de Pythagore, on en déduit que $|BE'| = \sqrt{19+9} = 5\ m$..

Si on considère le triangle rectangle $BE'E$, on a $|BE'| = 5\ m$ et $|BE| = 6\ m$. Par Pythagore, on en déduit que $|EE'| = \sqrt{36-25} = \sqrt{11}\ m$. Ceci répond à la question (b).

Pour obtenir l'aire de la toiture, on doit calculer les aires des triangles et trapèzes. Dans le triangle rectangle $B\bar{E}E$, on sait que $|BE| = 6m$ et que $|B\bar{E}| = 4\ m$. On en déduit, par Pythagore, que $\bar{E}E| = \sqrt{36-16} = \sqrt{20}\ m$, ce qui est la hauteur du triangle ABE. Similairement, on calcule la hauteur du trapèze $BCFE$ qui vaut $\sqrt{16+11} = \sqrt{27}\ m$. Dès lors, l'aire du triangle ABE vaut $\frac{8\cdot\sqrt{20}}{2} = 8\sqrt{5} \approx 17,89\ m^2$. L'aire du trapèze $BCFE$ vaut $\frac{(12+6)}{2} \cdot \sqrt{27} = 27\sqrt{3} \approx 46,77\ m^2$. Si on somme les aires des quatre pans, on obtient une aire approximative de $129,3\ m^2$. Ceci répond à la question (a).

Remarque : La formule de Héron permet d'obtenir directement l'aire du pan ABE (et CDF) avec $p = \frac{1}{2}(8+6+6) = 10$ et l'aire est égale à $\sqrt{10\cdot 2\cdot 4\cdot 4} = 8\sqrt{5}$.

Si on considère le triangle rectangle $\bar{E}E'E$, l'angle $\angle E\bar{E}E' = \arctan\frac{\sqrt{11}}{3} \approx 47,87\ ^\circ$. Si on considère le triangle rectangle $\bar{F}FF'$, l'angle $\angle F\bar{F}F' = \arctan\frac{\sqrt{11}}{4} \approx 39,66\ ^\circ$.

Les pans $BCFE$ et $AEFD$ sont donc plus appropriés pour recevoir les panneaux photovoltaïques.

Question 3 *Si A, B et C désignent les angles d'un triangle et a, b et c les longueurs des côtés opposés à ces angles, montrer que :*

$$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{a+b+c}{2a}\sin\frac{A}{2}$$

Solution Notons $\alpha = \frac{A}{2}, \beta = \frac{B}{2}, \gamma = \frac{C}{2}$. Remarquons tout d'abord que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ puisque ce sont des demi-angles d'un triangle. Remarquons que cela implique également que $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \frac{\pi}{2}[$ de même que $a, b, c > 0$. Les conditions d'existence sont donc satisfaites. Dans la suite, il sera également correct de diviser par a, b ou c ou par le cosinus ou le sinus des angles α, β ou γ.

On peut remplacer $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma$. La règle des sinus nous permet également d'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin B}{b} \\
\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{a} &= \frac{2\sin\beta\cos\beta}{b} \\
a &= b\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\beta\cos\beta} \\
a &= b\frac{\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\cos\beta}.
\end{aligned}$$

On remplace à présent α et a dans l'identité à démontrer. On obtient donc

$$\cos\beta\cos\gamma = \frac{\left(b\frac{\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\cos\beta} + b + c\right)}{2b\frac{\cancel{\cos(\beta+\gamma)}\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\cos\beta}}\cancel{\cos(\beta+\gamma)}$$

$$\frac{2b\cos\beta\cos\gamma\sin(\beta+\gamma)}{\cancel{\sin\beta}\cancel{\cos\beta}} = \frac{b\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta+\gamma) + b\sin\beta\cos\beta + c\sin\beta\cos\beta}{\cancel{\sin\beta}\cancel{\cos\beta}}$$

$$\cancel{2}b\cos\beta\cos\gamma\sin(\beta+\gamma) = \cancel{b\cos\beta\cos\gamma\sin(\beta+\gamma)} - b\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta+\gamma) + b\sin\beta\cos\beta + c\sin\beta\cos\beta$$

et finalement

$$b\sin(\beta+\gamma)(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma) = b\sin\beta\cos\beta + c\sin\beta\cos\beta$$

On peut à présent à nouveau utiliser la règle des sinus et observer que

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$
$$\frac{2\sin\beta\cos\beta}{b} = \frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{c}$$
$$c\sin\beta\cos\beta = b\sin\gamma\cos\gamma.$$

En utilisant l'expression de $c\sin\beta\cos\beta$ dans l'expression à démontrer et en développant la somme d'angles, on obtient à présent

$$\cancel{b}((\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma)) = \cancel{b}\sin\beta\cos\beta + \cancel{b}\sin\gamma\cos\gamma \quad (1)$$

On développe à présent le membre de gauche de (1) et en utilisant le fait que $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ et que $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$, on obtient

$$\sin\beta\cos\beta\cos^2\gamma + \sin^2\beta\cos\gamma\sin\gamma + \cos^2\beta\cos\gamma\sin\gamma + \cos\beta\sin\beta\sin^2\gamma$$
$$= \sin\beta\cos\beta + \cos\gamma\sin\gamma,$$

ce qui est bien le membre de droite de (1) et démontre dès lors l'identité.

ATTENTION

- NOM (en MAJUSCULES), prénom (en minuscules) sur chaque feuille.
- Rendre une feuille par question même s'il n'y a pas de réponse.
- GSM et PC interdits.
- Il est permis d'utiliser une calculette.
- Préparer une pièce d'identité sur la table.
- Fin de l'examen à 12 heures.

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Solutions de juillet 2016

Question 1 *Trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$$

Présenter sur le cercle trigonométrique celles appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

Solution

En utilisant la formule de factorisation $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$, il vient :

$$\sin 5x + \sin x = 1 - 2\sin^2 x \;\Leftrightarrow 2\sin 3x \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

En utilisant la formule de Carnot $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$, il est possible de réduire l'équation à :

$$2\sin 3x \cos 2x = \cos 2x \;\Leftrightarrow\; \cos 2x\,(2\sin 3x - 1) = 0$$

qui possède les solutions suivantes :

- $\cos 2x = 0 \;\rightarrow\; 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$
- $2\sin 3x - 1 = 0 \;\rightarrow\; \sin 3x = \frac{1}{2}$ qui donne deux ensembles de solutions :
  - $3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$
  - $3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\rightarrow x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$

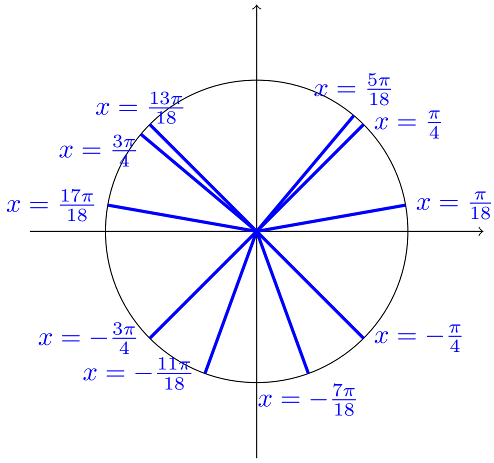


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

Question 2 *Si A, B et C désignent les angles d'un triangle et a, b et c les longueurs des côtés opposés à ces angles, montrer que :*

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

Solution

Enonçons d'abord les conditions d'existence :

$$\cos\frac{C}{2} \neq 0 \ \rightarrow \ \frac{C}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; \rightarrow \ C \neq \pi + 2k\pi \text{ et } c \neq 0$$

Ce qui est toujours vrai pour un triangle non dégénéré.

En utilisant la formule des sinus $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, le premier membre de l'identité devient :

$$\frac{a-b}{c} = \frac{c\sin A - c\sin B}{c\sin C} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C}$$

Sous la condition d'existence $c \neq 0$ déjà exprimée.

En faisant ensuite usage de la formule de factorisation $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ au numérateur et de la formule de duplication des angles $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ au dénominateur, il vient :

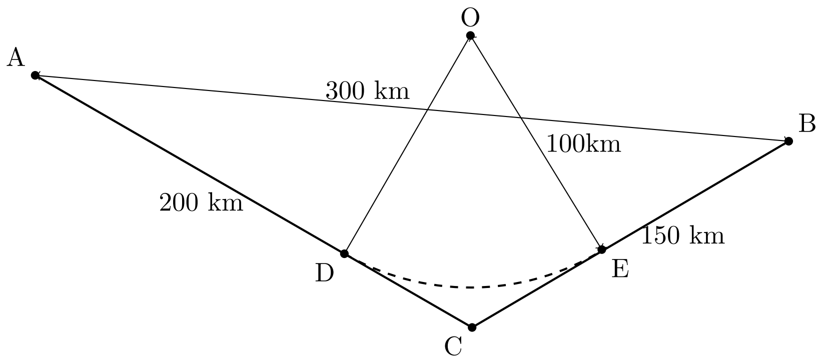
$$\frac{a-b}{c} = \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

De plus, $A+B+C=\pi$ permet d'écrire $\cos\frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$. Finalement, nous obtenons,

$$\frac{a-b}{c} = \frac{2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

qui démontre l'identité sous la condition d'existence $\sin \frac{C}{2} \neq 0 \ \rightarrow \ \frac{C}{2} \neq \pi + k\pi; \rightarrow \ C \neq 2\pi + 2k\pi$ qui est toujours vérifiée pour un triangle non dégénéré.

Question 3 *Deux lignes de chemin de fer relient en ligne droite les villes A et B distantes de $300\,\mathrm{km}$ par l'intermédiaire d'une ville C. Les villes A et B se trouvent respectivement à une distance de $200\,\mathrm{km}$ et $150\,\mathrm{km}$ de la ville C. Pour diminuer le temps de trajet entre les villes A et B, on désire éviter de passer par la ville C et raccorder les deux lignes de chemin de fer par une courbe en arc de cercle de $100\,\mathrm{km}$ de rayon tangente aux droites AC et CB aux points D et E comme représenté sur la figure ci-dessous.*



Quelle est la longueur de la nouvelle ligne à construire (arc DE) ? Quelle sera la distance ($ADEB$) à parcourir pour rejoindre les villes A et B par cette nouvelle ligne ? Calculer la surface DCE du terrain situé entre l'ancienne ligne et la nouvelle ligne.

Solution

En appliquant le théorème de Pythagore généralisé au triangle ACB, il vient :

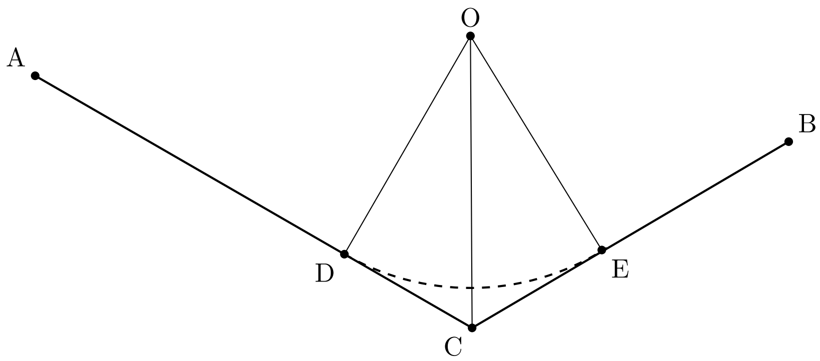
$$\cos \widehat{ACB} = \frac{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{-2\overline{AC}\overline{BC}} = -0.4583 \ \rightarrow \ \widehat{ACB} = 117.3^\circ$$

Une analyse du schéma ci-dessous nous montre que les rayons OD et OE du cercle sont perpendiculaires aux tangentes AC et CB. En conséquence, il est possible de former deux triangles rectangles ODC et OCB et on déduit :

$$\widehat{DOE} = 360^\circ - 2 \times 90^\circ - \widehat{ACB} = 62.7^\circ$$

La longueur de l'arc de cercle se déduit directement de la valeur de l'angle $\widehat{DOE}$ par :

$$\frac{2\pi}{360^\circ}\widehat{DOE} \times \overline{OD} = \frac{\pi}{180^\circ} \times 62.7^\circ \times 100\,\mathrm{km} = 109.4\,\mathrm{km}$$



Les deux triangles rectangles ODC et OCB ont en commun l'hypoténuse et le rayon d'un même cercle ($\overline{OD} = \overline{OE}$). Par application du théorème de Pythagore, ces deux triangles sont égaux (en effet, $\overline{OE}^2 + \overline{EC}^2 = \overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DC}^2 \; \rightarrow \; \overline{EC} = \overline{DC}$). En conséquence :

$$\widehat{OCD} = \frac{\widehat{ACB}}{2} = 58.64°$$

Et on déduit la longueur des segments CE et DC par :

$$\overline{CE} = \overline{DC} = \frac{\overline{OC}}{\tan \widehat{OCD}} = \frac{100\,\text{km}}{\tan 58.64°} = 60.94\,\text{km}$$

dont on déduit la longueur du trajet total

$$\begin{aligned} ADEB &= \overline{AC} + \overline{CB} - \overline{CE} - \overline{DC} + \overline{DE} \\ &= 200 + 150 - 2 \times 60.94 + 109.4 = 337.5\,\text{km} \end{aligned}$$

Le surface DCE est la soustraction des surfaces $ODCE$, formée par deux triangles rectangles égaux, et ODE, formée par une portion de cercle délimitée par l'arc DOE, ce qui donne :

$$S_{DCE} = 2\frac{\overline{OD} \times \overline{DC}}{2} - \widehat{DOE} \times \frac{\pi\,\overline{OD}^2}{360°} = 622.4\,\text{km}^2$$

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Duysinx et Prof. P. Dewallef

Septembre 2015

Question 1 *Si A, B et C désignent les sommets d'un triangle quelconque, vérifier l'identité suivante :*

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

Question 2 *Résoudre l'équation suivante :*

$$\cos nx + \cos (n-2)\, x = \cos x$$

Tracer les solutions entre 0 *et* 2π *sur le cercle trigonométrique dans le cas particulier où* $n = 5$.

Question 3 *Soit la surface S (surface grisée sur la figure 1 ci-dessous) délimitée par la corde AB et l'arc de cercle qu'elle intercepte.*

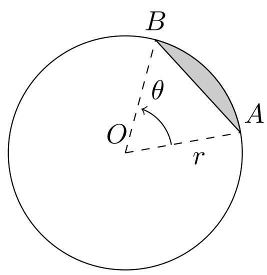


Figure 1 – r désigne le rayon du cercle et θ représente l'angle d'ouverture de l'arc intercepté exprimé en radians.

(a) *Démontrer que l'aire de cette surface vaut* $S = \dfrac{1}{2} r^2 (\theta - \sin\theta)$

(b) *Sur base de la formule donnée au point précédent, calculer la surface de l'intersection de deux cercles respectivement de rayons* $10\,\mathrm{cm}$ *et* $7\,\mathrm{cm}$ *dont les centres A et B sont distants de* $12\,\mathrm{cm}$ *(cf. figure 2 au verso).*

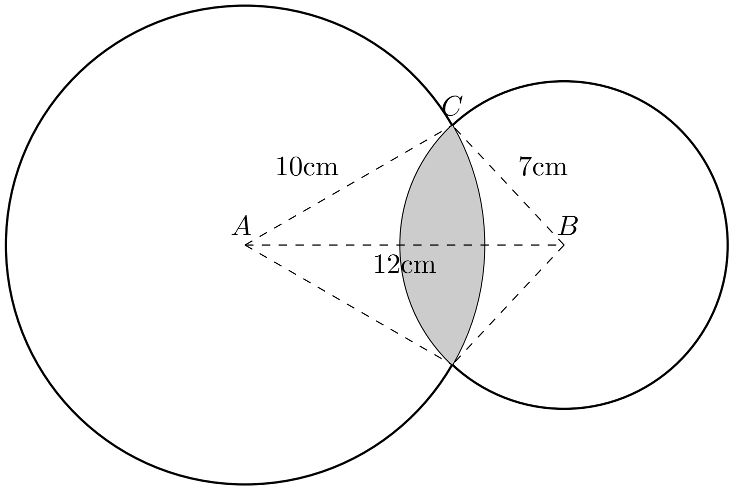


FIGURE 2 – L'intersection des deux cercles est représentée par la surface grisée.

ATTENTION

- NOM (en MAJUSCULES), prénom (en minuscules) sur chaque feuille.
- Rendre une feuille par question même s'il n'y a pas de réponse.
- GSM et PC interdits.
- Il est permis d'utiliser une calculette.
- Préparer une pièce d'identité sur la table.
- Fin de l'examen à 12 heures.

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Duysinx et Prof. P. Dewallef

Juillet 2015

Question 1 *Vérifier l'identité suivante :*

$$\frac{2}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \mathrm{cotg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Solution

En développant la tangente et la co-tangente par leur définition, le second membre de l'identité devient :

$$\frac{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

En utilisant les relations $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, l'expression se simplifie en :

$$\frac{2}{\sin\left[2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right]} = \frac{2}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{2}{\cos\alpha}$$

ce qui démontre l'identité.

Question 2 *Résoudre l'équation suivante et représenter les solutions entre* 0 *et* 2π *sur le cercle trigonométrique.*

$$4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 2\sin x = 1$$

Solution

L'équation de départ est factorisable suivant :

$$\begin{aligned}
&4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0\\
&\Leftrightarrow\ 2\sin^2 x\,(2\sin x + 1) - (2\sin x + 1) = 0\\
&\Leftrightarrow\ \left(2\sin^2 x - 1\right)(2\sin x + 1) = 0
\end{aligned}$$

qui accepte les solutions suivantes :

— $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ soit $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $x = -\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

— $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}$ soit $\sin x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

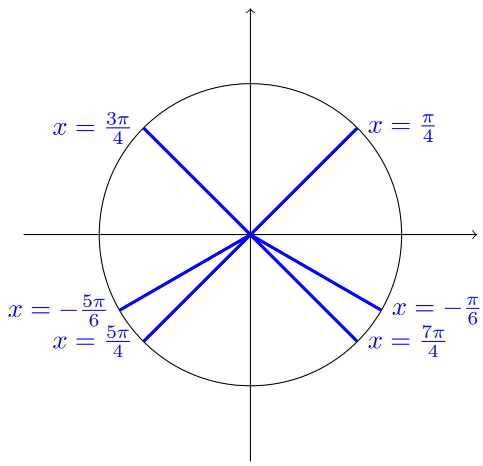
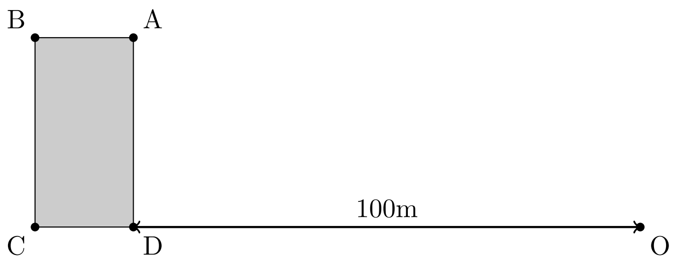


Figure 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

---

Question 3 *Un observateur situé en O se trouve à une distance de 100 m d'un bâtiment $ABCD$ de forme rectangulaire dont la base CD mesure 20 m. Il mesure l'angle $\widehat{AOB}$ qui vaut $2°$. Calculer la hauteur AD du bâtiment ainsi que l'aire du triangle AOB sachant que la hauteur du bâtiment ne peut dépasser 300 m. Les calculs seront effectués avec 4 chiffres significatifs.*



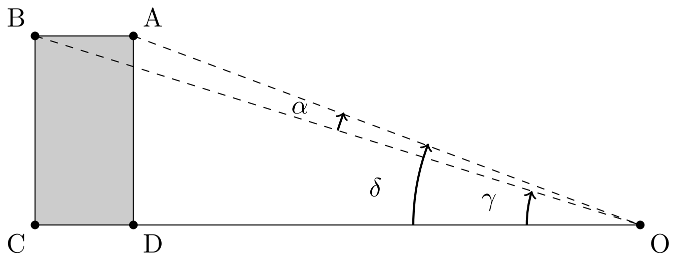
Solution

L'analyse de la figure ci-dessous permet de construire les deux triangles AOD et BOC et de définir les angles α, γ et δ.

Si on note x la longueur des côtés BC et AD, il est possible d'écrire :

— Dans le triangle AOD : $\operatorname{tg}\delta = x/\overline{DO}$

— Dans le triangle BOC : $\operatorname{tg}\gamma = x/\overline{CO}$



Comme $\alpha = \delta - \gamma$:

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}(\alpha+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma} = \frac{x}{\overline{DO}}$$

En utilisant la relation $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{x}{\overline{CO}}$ dans l'équation ci-dessus, nous obtenons une équation où seul x est inconnu :

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \frac{x}{\overline{CO}}}{1-\operatorname{tg}\alpha\frac{x}{\overline{CO}}} = \frac{x}{\overline{DO}} \;\Leftrightarrow\; \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\overline{DO}\times\overline{CO}}x^2 + \left(\frac{1}{\overline{CO}} - \frac{1}{\overline{DO}}\right)x + \operatorname{tg}\alpha = 0$$

Sachant, $\overline{CO} = 120\,\mathrm{m}$, $\overline{DO} = 100\,\mathrm{m}$, $\alpha = 2°$, la résolution de cette équation du second degré donne les solutions $x = 21.8\,\mathrm{m}$ et $x = 551.1\,\mathrm{m}$. La seconde solution est à rejeter.

Sur base de la connaissance des longueurs $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$, il est possible de déterminer la longueur des côtés $\overline{AO}$ et $\overline{BO}$ respectivement par :

— $\overline{AO} = \dfrac{\overline{DO}}{\cos\delta}$ avec $\operatorname{tg}\delta = x/\overline{DO}$ ce qui donne $\delta = 12.3°$ et $\overline{AO} = 102.3\,\mathrm{m}$

— $\overline{BO} = \dfrac{\overline{CO}}{\cos\gamma}$ avec $\operatorname{tg}\gamma = x/\overline{CO}$ ce qui donne $\gamma = 10.3°$ et $\overline{AO} = 122.0\,\mathrm{m}$

La surface du triangle AOB est calculée par la relation :

$$S = \frac{1}{2}\overline{AO}\;\overline{BO}\;\sin\alpha = 217.8\,\mathrm{m}^2$$

ATTENTION

— NOM (en MAJUSCULES), prénom (en minuscules) sur chaque feuille.
— Rendre une feuille par question même s'il n'y a pas de réponse.
— GSM et PC interdits.
— Il est permis d'utiliser une calculette.
— Préparer une pièce d'identité sur la table.
— Fin de l'examen à 12 heures.