Université de Liège

Mai 2011

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
SIMULATION D'EXAMEN

Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chaque feuille votre nom (en caractères d'imprimerie) et votre prénom ainsi que le numéro de la question.
L'usage des calculatrices est interdit.
L'épreuve se termine à 18 heures.

Question I

On considère la fonction

$$f_n(x) = \frac{e^{1-x}}{(1+x)^n} \qquad \text{que l'on peut aussi écrire} \qquad f_n(x) = \frac{\exp(1-x)}{(1+x)^n}$$

où n est un entier strictement positif.

i. On envisage d'abord le cas où $n = 2$.

   (a) Déterminez le domaine de définition de f_2.

   (b) Déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f_2.

   (c) Déterminez et caractérisez les éventuels extrema de f_2.

   (d) Dressez un tableau récapitulatif des propriétés de f_2 déduites aux points précédents et esquissez le graphe de f_2.

ii. Dans le cas général où n est un entier strictement positif,

   (a) pour quelles valeurs de n la fonction f_n admet-elle un extremum local (maximum ou minimum) ?

   (b) donnez, en fonction de n, l'abscisse et l'ordonnée de cet extremum.

   (c) pour quelles valeurs de n s'agit-il d'un maximum ?

Question II

Calculez

$$a+b, \quad a^2, \quad b^2 \quad \text{et} \quad a^{10}+b^{10}$$

$(a, b \in \mathbb{R})$ sachant que

$$a^4+b^4 = 14 \quad \text{et} \quad ab = -1.$$

Question III

Calculez la somme des cubes des racines cinquièmes complexes de 32.

SOLUTION TYPE

Différentes approches peuvent généralement être adoptées pour répondre aux questions posées. La solution type ne présente qu'un nombre limité d'entre-elles. Toutes les méthodes de résolution sont cependant acceptées.

Question I

i. (a) La fonction

$$f_2(x) = \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{(1+x)^2}$$

est définie pour tout $x \neq -1$.

Domaine : 1 pt

Total i.(a) : 1 pt

(b) Asymptote verticale ?

De

$$\lim_{x\to-1} \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{(1+x)^2} = \mathrm{e}^2 \lim_{x\to-1} \frac{1}{(1+x)^2} = +\infty$$

on déduit la présence d'une asymptote verticale en $x = -1$.

Valeur de la limite en -1 : 1 pt

Éq. de l'asymptote verticale : 1 pt

Asymptote horizontale ?

De

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{(1+x)^2} = \left[\frac{0}{+\infty}\right] = 0$$

on déduit la présence d'une asymptote horizontale $y = 0$ pour $x \to +\infty$. La fonction étudiée étant positive, cette asymptote est nécessairement approchée par valeur supérieure (positive).

Valeur de la limite en $+\infty$: 1 pt

Éq. de l'asymptote horizontale : 1 pt

Position par rapport l'AH : 1 pt

Calculons ensuite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{(1+x)^2} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

Cette indétermination peut être levée en appliquant successivement deux fois le théorème de l'Hospital. On a

Valeur de la limite en $-\infty$: 1 pt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{(1+x)^2} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\mathrm{e}^{1-x}}{2(1+x)} = \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{2} = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale pour $x \to -\infty$.

Asymptote oblique ?

Absence d'asymptote oblique : 1 pt

Calculons

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{x(1+x)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{x^3+2x^2+x} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right]$$

Cette indétermination peut être levée en appliquant successivement trois fois le théorème de l'Hospital. On a

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{x^3+2x^2+x} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\mathrm{e}^{1-x}}{3x^2+4x+1} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{1-x}}{6x+4} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\mathrm{e}^{1-x}}{6} = -\infty$$

Il n'y a donc pas non plus d'asymptote oblique pour $x \to -\infty$.

Total i.(b) : 7 pts

(c) En vue de déterminer les éventuels extrema de f_2, calculons sa dérivée première :

Expression de la dérivée : 2 pts

Zéro de f' : 1 pt

$$f_2'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{1-x}(1+x)^2 - 2\,\mathrm{e}^{1-x}(1+x)}{(1+x)^4} = -\,\mathrm{e}^{1-x}\,\frac{x+3}{(1+x)^3}$$

Cette dernière s'annule uniquement en $x=-3$. Le tableau des signes qui suit précise le comportement de f_2'.

x		-3		-1	
$-\,\mathrm{e}^{1-x}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(1+x)^3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f_2'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
f_2	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$

Puisque f_2' change de signe en étant négative à gauche (fonction décroissante) et positive à droite (fonction croissante) de $x=-3$, la fonction f_2 présente un minimum en ce point. On a aussi

$$f_2(-3) = \frac{\mathrm{e}^4}{4}$$

Justification de la présence d'un extremum : 1 pt

Nature de l'extremum : 1 pt

Justification de la nature de l'extremum : 1 pt

Valeur de l'extremum : 1 pt

Total i.(c) : 7 pts

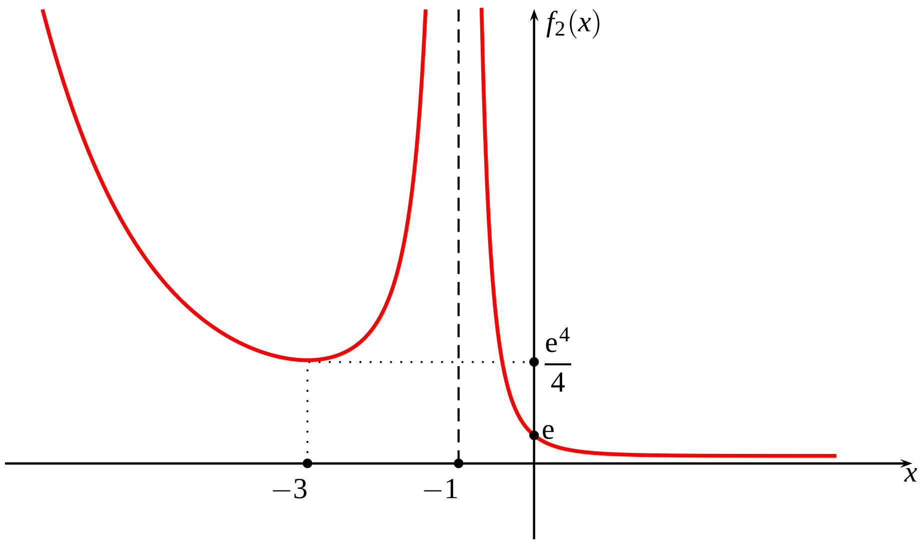
(d) Le tableau qui suit présente les propriétés de f_2 déduites aux points précédents. Nous pouvons aussi remarquer que la fonction f_2 est positive sur tout son domaine de définition et que $f_2(0)=\mathrm{e}$.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
f_2'	$-$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$-$
f_2	$+\infty$	$\searrow$	$\mathrm{e}^4/4$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0^+
			min		A.V.		A.H.

Le graphe de la fonction f_2 peut donc être esquissé comme suit

Tableau réapitulatif : 1 pt

Esquisse du graphe : 2 pts



Total i.(d) : 3 pts

Total i. : 18 pts

ii. (a) En vue de déterminer les valeurs de n pour lesquelles la fonction f_n admet un extremum, calculons sa dérivée première :

$$f_n'(x) = \frac{-\,\mathrm{e}^{1-x}(1+x)^n - n\,\mathrm{e}^{1-x}(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} = -\,\mathrm{e}^{1-x}\,\frac{(x+[n+1])}{(1+x)^{n+1}} \qquad (\dagger)$$

Valeur de la dérivée : 2 pts

Zéro de la dérivée : 1 pt

Le paramètre n étant positif, la dérivée s'annule au seul point d'abscisse $x_\star = -(n+1)$. Elle change de signe de part et d'autre de ce point, ce qui indique la présence d'un extremum local.

Changement de signe de f_n' : 1 pt

La fonction f_n présente donc un extremum local en $x_\star = -(n+1)$ pour tout entier $n > 0$.

Existence d'un extremum pour tout $n > 0$: 1 pt

Total ii.(a) : 5 pts

(b) Cet extremum a pour abscisse $x_\star = -(n+1)$ et pour ordonnée

$$f_n(x_\star) = \frac{\mathrm{e}^{1-(-[n+1])}}{(1-[n+1])^n} = \frac{\mathrm{e}^{n+2}}{(-n)^n}$$

Abscisse de l'extremum : 1 pt

Valeur de la fonction en $x_\star$: 1 pt

Total ii.(b) : 2 pts

(c) Pour identifier la nature de l'extremum en $x_\star$, il convient d'étudier la croissance/décroissance de f_n au travers du signe de f_n'.

Identification de la parité de n comme clé de la discussion : 1 pt

En $x_\star = -(n+1) < -1$, le facteur apparaissant au dénominateur de $(\dagger)$ devient

$$(1+x_\star)^{n+1} = (-n)^{n+1}$$

dont le signe dépend de la parité de n. On distingue donc les deux cas suivants.

Cas 1 : $n > 0$ pair.

Identification d'un minimum (et donc pas d'un maximum) dans le cas où n est pair : 2 pts

x		$x_\star$		-1	
$-\,\mathrm{e}^{1-x}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x+(n+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(1+x)^{n+1}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f_n'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
f_n	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\searrow$

Cas 2 : $n > 0$ impair.

Identification d'un maximum dans le cas où n est impair : 2 pts

x		$x_\star$		-1	
$-\,\mathrm{e}^{1-x}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x+(n+1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(1+x)^{n+1}$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
f_n'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
f_n	$\nearrow$	Max	$\searrow$		$\searrow$

La fonction f_n admet donc un maximum local pour $n > 0$ impair.

Total ii.(c) : 5 pts

Remarquons qu'il est aussi possible de répondre à cette dernière question en étudiant le signe de $f_n''(x_\star)$. On calcule aisément

Cette justification alternative donne également droit à 5 pts selon la même distribution des points.

$$f_n''(x) = \mathrm{e}^{1-x}\,\frac{(1+x)(x+n)+(1+n)(x+n+1)}{(1+x)^{n+2}}$$

et

$$f_n''(x_\star) = \frac{(-\mathrm{e})^{n+2}}{n^{n+1}}$$

La dérivée seconde en $x_\star$ est négative si n est impair et positive si n est pair. La fonction présente donc un maximum local en $x_\star$ dans le premier cas et un minimum local dans le second cas. Le maximum local recherché est donc obtenu pour toute valeur de $n > 0$ impaire.

Total ii. : 12 pts

TOTAL QI : 30 PTS

Question II

i. On a d'abord

$$(a^2+b^2)^2 = a^4+b^4+2a^2b^2 = 14+2(-1)^2 = 16\,,$$

d'où, les carrés étant positifs,

$$a^2+b^2 = 4 \qquad (\spadesuit)$$

Continuant de la même façon, on a

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 4-2 = 2$$

d'où

$$a+b = \pm\sqrt{2}$$

ii. De ($\spadesuit$) et de $a^2b^2 = 1$, on déduit que a^2 et b^2 sont les racines du trinôme x^2-4x+1. On a donc

$$\{a^2, b^2\} \;=\; \{2+\sqrt{3},\, 2-\sqrt{3}\}\,. \qquad (\heartsuit)$$

iii. On pourrait se servir des valeurs données en ($\heartsuit$) pour calculer a^{10} et b^{10} mais, dans la mesure où on demande seulement la somme $a^{10}+b^{10}$, il est plus simple de procéder comme suit. On a

$$(a^2+b^2)(a^4+b^4) = a^6+b^6+a^2b^2(a^2+b^2)$$
$$56 = (a^6+b^6)+4$$

et

$$a^6+b^6 = 52$$

De même,

$$(a^6+b^6)(a^4+b^4) = (a^{10}+b^{10})+a^4b^4(a^2+b^2)$$
$$728 = (a^{10}+b^{10})+4$$

d'où

$$a^{10}+b^{10} = 724$$

Remarque. On peut aussi montrer que

$$\{a, b\} \;=\; \{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\} \text{ ou } \{a, b\} \;=\; \{\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}, \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\}\,.$$

TOTAL QII : 20 PTS

Question II

Rappelons d'abord la formule de Moivre :

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

valable pour tout réel α et tout naturel n. En utilisant la notation

$$\operatorname{cis}\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

cette formule s'écrit plus commodément sous la forme

$$\operatorname{cis}^n\alpha = \operatorname{cis} n\alpha$$

Utilisant la formule de Moivre avec $n = 5$ et $\alpha = 2k\pi/5$ où k est entier, on obtient

$$\operatorname{cis}^5 \frac{2k\pi}{5} = \operatorname{cis}\frac{10k\pi}{5} = \operatorname{cis} 2k\pi = 1$$

de sorte que les 5 racines cinquièmes complexes de l'unité sont

$$\{\operatorname{cis}\frac{2k\pi}{5} : k = 0,1,2,3,4\}$$

L'ensemble des cinq racines cinquièmes complexes de $32 = 2^5$ est quant à lui

$$\{2\ \operatorname{cis}\frac{2k\pi}{5} : k = 0,1,2,3,4\}$$

L'ensemble des cubes de ces racines est

$$\{8\ \operatorname{cis}^3\frac{2k\pi}{5} : k = 0,1,2,3,4\}$$

et peut également s'écrire sous la forme

$$\{8\ \operatorname{cis}^k\frac{6\pi}{5} : k = 0,1,2,3,4\}$$

qui fait apparaître que ces éléments forment une progression géométrique de raison $\operatorname{cis}(6\pi/5) \neq 1$. La somme des termes de cette progression géométrique vaut

$$8\sum_{k=0}^{4}\operatorname{cis}^k\frac{6\pi}{5} = 8\ \frac{1-\operatorname{cis}^5(6\pi/5)}{1-\operatorname{cis}(6\pi/5)} \ = \ 8\ \frac{1-\operatorname{cis}(6\pi)}{1-\operatorname{cis}(6\pi/5)} \ = \ 0$$

puisque $\operatorname{cis}(6\pi) = \cos(6\pi) + i(\sin 6\pi) = 1$. TOTAL QIII : 10 PTS