UNIVERSITE DE LIEGE

EXAMEN D'ADMISSION AUX ETUDES D'INGENIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique

Examen "à blanc" de mai 2012 — Corrigé

1. Dans un triangle ABC, on note A', B' et C' les pieds des hauteurs respectivement issues des sommets A, B et C, ainsi que H l'intersection de ces hauteurs. On considère le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle $BA'C'$.
   (a) Démontrer que le segment $[BH]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.
   (b) Par le point A', on mène une tangente à $\mathcal{C}$, qui rencontre le côté $[AC]$ du triangle en un point noté P. Démontrer que le triangle $A'PC$ est isocèle.
   (c) En déduire que le point P est situé au milieu du côté $[AC]$.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les cercles passant par les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(0, 2)$, et tangents à la droite issue du point de coordonnées $(2, 0)$ parallèle à la bissectrice du premier quadrant.
   (a) Combien y-a-t-il de cercles de ce type?
   (b) Quelles sont les coordonnées de leur centre?

3. On considère un tétraèdre $ABCD$ dont les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ sont mutuellement perpendiculaires. Démontrer que le carré de l'aire de la face BCD de ce tétraèdre est égal à la somme des carrés des aires de ses trois autres faces.

Exemple de solution:

1. (a) Par définition, on a $HA' \perp BC$ et $HC' \perp AB$. Le quadrilatère $BC'HA'$ possède donc deux angles droits opposés et est par conséquent inscriptible. On en déduit que le point H appartient à $\mathcal{C}$. Le cercle $\mathcal{C}$ est dès lors circonscrit au triangle $BA'H$, qui est rectangle en A', donc son centre est situé au milieu de l'hypoténuse $[BH]$ de ce triangle.

(b) Le triangle $BB'C$ étant rectangle en B', on a

$$\widehat{B'BC} = 90° - \widehat{BCB'}.$$

Soit O le centre de $\mathcal{C}$. Etant donné que les points A' et B appartiennent tous deux à ce cercle, on a $|OB| = |OA|$, donc le triangle OBA' est isocèle en O, ce qui implique

$$\widehat{OBA'} = \widehat{OA'B}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\widehat{OA'B} &= \widehat{B'BC}\\ &= 90° - \widehat{BCB'}\\ &= 90° - \widehat{A'CP}.\end{aligned}$$

La droite $A'P$ étant tangente à $\mathcal{C}$, on a $OA' \perp A'P$, qui entraîne

$$\begin{aligned}\widehat{PA'C} &= 180° - \widehat{OA'B} - \widehat{PA'O}\\ &= 90° - \widehat{OA'B}\\ &= \widehat{A'CP}.\end{aligned}$$

Le triangle $A'PC$ est donc bien isocèle en P.

(c) Le triangle $AA'C$ est rectangle en A' par hypothèse, donc le centre O' de son cercle circonscrit est situé au milieu de son hypoténuse $[AC]$. Le point O' est donc situé à l'intersection de la droite AC et de la médiatrice du segment $[A'C]$.

Par hypothèse, on a $P \in AC$. Le point P appartient également à la médiatrice de $[A'C]$, car il a été établi au point (b) que l'on a $|A'P| = |PC|$. On en déduit que les points P et O' sont confondus, et que l'on a donc $|PA| = |PC|$.

2. Notons O, A et B les points qui ont respectivement pour coordonnées $(0, 0)$, $(0, 2)$ et $(2, 0)$ et t la droite passant par B et parallèle à la bissectrice du premier quadrant. Cette droite, ayant 1 comme coefficient angulaire et passant par B, a donc l'équation cartésienne $x - y - 2 = 0$.

   Cela étant, le centre des cercles passant par les points O et A appartient à la médiatrice du segment$[OA]$, droite ayant pour équation cartésienne $y = 1$. Les centres ont donc des coordonnées du type $(\lambda, 1)$, λ étant un paramètre réel. Pour conclure, il reste donc à déterminer λ de telle sorte que le cercle de centre $(\lambda, 1)$ soit tangent à la droite t.

Un tel cercle est tangent à t si et seulement si la distance entre le centre et t est égale au rayon du cercle ou encore si et seulement si

$$\frac{|\lambda - 1 - 2|^2}{1^2 + (-1)^2} = \lambda^2 + 1.$$

La résolution de cette équation est alors directe:

$$\begin{aligned}\frac{|\lambda - 1 - 2|^2}{1^2 + (-1)^2} = \lambda^2 + 1 \;&\Leftrightarrow\; \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 2\lambda^2 + 2\\ &\Leftrightarrow\; \lambda^2 + 6\lambda - 7 = (\lambda + 7)(\lambda - 1) = 0.\end{aligned}$$

Dès lors, deux cercles répondent à la question; le centre de l'un a pour coordonnées $(1, 1)$, celui de l'autre $(-7, 1)$.

3. Vu les hypothèses (orthogonalité des arêtes), définissons un repère orthonormé de la manière suivante: l'origine est le sommet A du tétraèdre et les axes X, Y, Z sont les droites passant par A et B, C, D respectivement; on choisit l'orientation des axes de telle sorte que les coordonnées de B, C, D soient strictement positives.

   Cela étant, les points A, B, C, D ont pour coordonnées

$$A(0, 0, 0) \quad B(b, 0, 0), \quad C(0, c, 0), \quad D(0, 0, d)$$

   où b, c, d sont des réels strictement positifs. Dès lors l'aire

   - du triangle ABC (rectangle en A) est $bc/2$
   - du triangle ABD (rectangle en A) est $bd/2$
   - du triangle ACD (rectangle en A) est $cd/2$
   - du triangle BCD est égale à la moitié de la norme du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

   Comme ces vecteurs ont respectivement $(-b, c, 0)$ et $(-b, 0, d)$ pour composantes, leur produit vectoriel a (cd, bd, bc) pour composantes. Il s'ensuit que le carré de l'aire du triangle BCD est

$$\frac{b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2}{4},$$

   ce qui est bien égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces.

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

SIMULATION D'EXAMEN

TRIGONOMÉTRIE ET CALCUL NUMÉRIQUE

Prof. M. Hogge et P. Duysinx

Mai 2012

Nous présentons ici une voie de solution pour chaque problème, à titre d'exemple. Il va de soi que toute autre méthode correcte est admise lors de la correction

Question 1 *Les angles d'un triangle ABC sont a, b, c.*
Montrer que le triangle ABC est rectangle si et seulement si

$$\sin(4a)\ +\ \sin(4b)\ +\ \sin(4c)\ =\ 0$$

Solution
Partie 1 : Si le triangle est rectangle, alors $\sin(4a)\ +\ \sin(4b)\ +\ \sin(4c)\ =\ 0$
Supposons que $a = \frac{\pi}{2}$, alors

$$\sin 4a\ =\ \sin 2\pi\ =\ 0$$

En outre dans un triangle on a toujours $a + b + c = \pi$. Il vient

$$4b = 4\pi\ -\ 4\pi/2\ -\ 4c\ =\ 2\pi\ -\ 4\,c$$

soit

$$\sin(4b) = \sin(2\pi - 4c) = \sin(-4c) = -\sin(4c)$$

Au total, il vient :

$$\sin(4a) + \sin(4b) + \sin(4c)\ =\ 0$$

Partie 2 Supposons que $\sin(4a)\ +\ \sin(4b)\ +\ \sin(4c)\ =\ 0$, alors le triangle est rectangle.
Dans tout triangle, on a $a + b + c = \pi$. Soit

$$\begin{aligned}
& a\ +\ b\ +\ +c\ =\ \pi \\
\Leftrightarrow\ & 4a\ +\ 4b\ +\ 4c\ =\ 4\pi \\
\Leftrightarrow\ & 4a = 4\pi\ -\ (4b\ +\ 4c) \\
\Leftrightarrow\ & 4a = 4\pi\ -\ (4b\ +\ 4c) \\
\Leftrightarrow\ & \sin(4a) = -\sin(4b + 4c) \\
\Leftrightarrow\ & \sin(4a) = -(\sin(4b)\ \cos(4c)\ +\ \cos(4b)\ \sin(4c))
\end{aligned}$$

Remplaçons cette expression dans l'hypothèse, il vient :

$$\begin{aligned}
& \sin(4a)+\sin(4b)+\sin(4c) \;=\; -\sin(4b)\ \cos(4c)\ -\ \cos(4b)\ \sin(4c)\ +\ \sin(4b)\ +\ \sin(4c) \\
\Leftrightarrow\quad & \sin(4b)(1-\cos(4c))\ +\ \sin 4c\,(1-\cos(4b)) \;=\; 0
\end{aligned}$$

En utilisant les formules de duplication, il vient

$$\begin{aligned}
& \sin(4b)\,2\ \sin^2(2c)\ +\ \sin(4c)\,2\ \sin^2(2b) \;=\; 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\ \sin(2b)\ \cos(2b)\ \sin^2(2c)\ +\ 4\ \sin(2c)\ \cos(2c)\ \sin^2(2b) \;=\; 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\ \sin(2b)\ \sin(2c)\ [\sin(2c)\cos(2b)\ +\ \cos(2c)\ \sin(2b)] \;=\; 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 4\ \sin(2b)\ \sin(2c)\ [\sin(2b+2c)] \;=\; 0
\end{aligned}$$

Première possilité : $\sin(2b)=0$. Il vient : $b=\pi/2$ et le triangle est rectangle en B.

Seconde possibilité : $\sin(2c)=0$. Il vient : $c=\pi/2$ et le triangle est rectangle en C.

Troisième possibilité : $\sin(2b+2c)=0$. Il vient : $b+c=\pi/2$. Puisque $a+b+c=\pi$, on a $a=\pi/2$ et le triangle est rectangle en A.

Question 2 *Résoudre l'équation :*

$$\sqrt{3}\,\sin^2 x \;+\; \sin x\,\cos x \;+2\sqrt{3}\,\cos^2 x \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2} \;+\; \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution

L'équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\,\sin^2 x \;+\; \sin x\,\cos x \;+2\sqrt{3}\,\cos^2 x \;=\; \frac{\sqrt{2}}{2} \;+\; \frac{3\sqrt{3}}{2}\\
\Leftrightarrow&\sqrt{3}\,\sin^2 x \;+\; \sin x\,\cos x \;+2\sqrt{3}\,\cos^2 x \;=\; (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2})(\sin^2 x + \cos^2 x)\\
\Leftrightarrow&(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \;-\; \frac{3\sqrt{3}}{2})\;\sin^2 x \;+\; \sin x\,\cos x \;+(2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \;-\; \frac{3\sqrt{3}}{2})\;\cos^2 x \;=\; 0\\
\Leftrightarrow&(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})\;\sin^2 x \;-\; \sin x\,\cos x \;+(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})\;\cos^2 x \;=\; 0
\end{aligned}$$

On peut diviser l'équation par $\cos^2 x$ car on vérifie aisément que $x = 90° + k\,180°$ ne fait pas partie des solutions de l'équation. Il vient :

$$(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})\;\mathrm{tg}^2\,x \;-\; \mathrm{tg}\,x \;-(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2})\;\cos^2 x \;=\; 0$$

Résolvons l'équation du second degré en $\mathrm{tg}\,x$.

$$\rho \;=\; 1 \;+\; 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})\,(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) \;=\; 2$$

et

$$\mathrm{tg}\,x \;=\; \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})} \;=\; (1 \pm \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

La première solution s'écrit

$$\mathrm{tg}\,x \;=\; (1 + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \;=\; 0,7673$$

et

$$x^{(1)} \;=\; 37,5° \;+\; k\,180°$$

La seconde solution s'écrit

$$\mathrm{tg}\,x \;=\; (1 - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \;=\; -0,1317$$

et

$$x^{(2)} \;=\; -7,5° \;+\; k\,180°$$

On représente aisément ces solutions sur le cercle trigonométrique