Avril 2013

Université de Liège

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL

SIMULATION D'EXAMEN

Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chaque feuille votre nom (en caractères d'imprimerie) et votre prénom ainsi que le numéro de la question.
L'usage des calculatrices est interdit. [1]
L'épreuve se termine à 18 heures.

Question I

On considère l'équation suivante, dans laquelle m désigne un paramètre réel,

$$x^2 + mx + 2 = 0.$$

Déterminez l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation possède deux racines réelles distinctes telles que la plus grande soit supérieure ou égale à deux fois la plus petite.

Question II

On considère l'équation suivante, dans laquelle a et b sont des paramètres réels,

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^{13}}{(\sqrt{3}-i)^8} = a + ib, \qquad i^2 = -1.$$

Déterminez a et b.

Question III

On considère la fonction suivante, dans laquelle n est un paramètre entier strictement positif,

$$f(x) = \ln \frac{x^n}{x-1}.$$

i. En discutant s'il y a lieu en fonction de n, déterminez le domaine de définition de f.

Pour les sous-questions suivantes, on demande d'étudier le comportement de la fonction f **uniquement pour les valeurs positives de x** appartenant à son domaine de définition. Dans ces conditions, en discutant s'il y a lieu en fonction de n,

ii. déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f ;

iii. étudiez la croissance/décroissance de f, déterminez et caractérisez les éventuels extrema ;

iv. étudiez la concavité du graphe et situez les éventuels points d'inflexion ;

v. esquissez le graphe de f.

1. Comme lors des sessions précédentes, l'utilisation d'une calculatrice sera autorisée lors de l'épreuve d'analyse de l'examen d'admission mais restera interdite pour l'épreuve d'algèbre.

Solution type

Différentes approches peuvent généralement être adoptées pour répondre aux questions posées. La solution type ne présente qu'un nombre limité d'entre elles. Toutes les méthodes de résolution sont cependant acceptées.

Question I

L'équation

$$x^2 + mx + 2 = 0$$

possède deux racines réelles distinctes si le discriminant (ou réalisant) est strictement positif, c'est-à-dire si

$$m^2 - 8 > 0$$

ce qui est le cas si

$$m > 2\sqrt{2} \qquad \text{ou} \qquad m < -2\sqrt{2}.$$

Les deux racines sont alors données par

$$x_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 8}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2}.$$

La plus grande des racines, soit x_2, est plus grande ou égale à deux fois la plus petite, x_1, si

$$\frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2} \geq -m - \sqrt{m^2 - 8}$$

ou encore si

$$3\sqrt{m^2 - 8} \geq -m. \tag{$\dagger$}$$

Cette condition est toujours vérifiée si $m > 2\sqrt{2}$.

Dans le cas où $m < -2\sqrt{2} < 0$, la condition ($\dagger$) devient

$$9m^2 - 72 \geq m^2$$

ou encore

$$m \leq -3.$$

L'ensemble demandé est donc $]-\infty, -3] \cup]2\sqrt{2}, +\infty[$.

Question II

En posant $n = 1 + i\sqrt{3}$ et $d = \sqrt{3} - i$, le membre de gauche de l'équation est n^{13}/d^8. On peut évaluer cette expression par calcul direct ou en utilisant les notations trigonométriques.

D'une part, par calcul direct, on obtient successivement

$$n^2 = -2 + 2i\sqrt{3},\ n^3 = -8,\ n^6 = 64,\ n^{12} = 4096 \text{ et } n^{13} = 4096(1 + i\sqrt{3});$$

$$d^2 = 2(1 - i\sqrt{3}),\ d^4 = -8(1 + i\sqrt{3}) \text{ et } d^8 = 128(-1 + i\sqrt{3}).$$

On en déduit :

$$\frac{n^{13}}{d^8} = 32\frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = 32\frac{(1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})}{(-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})} = 16(1 - i\sqrt{3}).$$

D'autre part, en notations trigonométriques, on a :

$$n = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad d = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{-\pi}{6};$$

en tenant compte des formules

$$(\operatorname{cis}\alpha)^k = \operatorname{cis} k\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{cis}\alpha}{\operatorname{cis}\beta} = \operatorname{cis}(\alpha-\beta)\,,$$

on déduit :

$$\frac{n^{13}}{d^8} = \frac{2^{13}\operatorname{cis}(13\pi/3)}{2^8\operatorname{cis}(-8\pi/6)} = 2^5 \operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{3}+\frac{8\pi}{6}\right) = 32 \operatorname{cis}\frac{17\pi}{3} = 32 \operatorname{cis}\frac{-\pi}{3} = 16(1-i\sqrt{3})\,.$$

Les deux techniques conduisent à $a = 16$ et $b = -16\sqrt{3}$.

Question III

i. L'argument de la fonction ln devant être strictement positif, la fonction

$$f(x) = \ln\frac{x^n}{x-1}$$

est définie pour tout x tel que

$$\frac{x^n}{x-1} > 0$$

Si n est pair, ce sera le cas si $x > 1$ puisque le numérateur est alors toujours positif.

Si n est impair, on a

x		0		1	
x^n	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x^n}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

Connaissance du domaine de définition de la fonction ln *: 1 pt*

Utilisation de la parité de n comme critère de discussion : 1 pt

En résumé, il vient donc

$$\operatorname{dom} f = \begin{cases}]1,+\infty[& \text{si } n \text{ est pair} \\ ]-\infty,0[\cup]1,+\infty[& \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

dom$f$ *pour n pair : 1 pt*

dom$f$ *pour n impair : 1 pt*

Total i : 4 pts

Comme indiqué dans l'énoncé, nous limiterons l'étude du comportement de la fonction aux seules valeurs positives de x appartenant au domaine de définition. Quelle que soit la valeur de n, nous étudierons donc les propriétés de f sur l'intervalle $\mathtt{I} =]1,+\infty[$. Notons que, sur cet intervalle, la fonction peut également s'écrire sous la forme

$$f(x) = \ln x^n - \ln(x-1) = n\ln x - \ln(x-1) \qquad (\spadesuit)$$

ii. Que n soit pair ou impair, on a

$$\lim_{x\to 1^+} \ln\frac{x^n}{x-1} = +\infty$$

On en déduit la présence d'une asymptote verticale en $x = 1$.

Valeur de la limite en 1 : 1 pt

Éq. de l'AV : 1 pt

Pour étudier le comportement de la fonction au voisinage de $+\infty$, on remarque que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x-1} = \begin{cases} 1^+ & \text{si } n = 1 \\ +\infty & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Dès lors

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x^n}{x-1} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } n=1 \\ +\infty & \text{si } n>1 \end{cases}$$

Valeur de la limite en $+\infty$: 3 pts (dont 1 pt pour l'approche par valeur supérieure si $n=1$)

Si $n=1$, le graphe de f admet donc l'asymptote horizontale $y=0$ en $+\infty$.

Éq. de l'AH pour $n=1$: 1 pt

Pour examiner l'existence d'une éventuelle asymptote oblique en $+\infty$ dans le cas où $n>1$, on évalue

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\Big[n\ln x - \ln(x-1)\Big]$$

Par application de l'Hospital, on sait que

Valeur de la limite de $f(x)/x$: 1 pt

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/(x-1)}{1} = 0$$

Dès lors

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$$

Absence d'AO : 1 pt

et il n'existe pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

Total ii : 8 pts

iii. En vue de déterminer les éventuels extrema, calculons la dérivée de f. En exploitant la forme alternative (♠), il vient

$$f'(x) = \frac{n}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{(n-1)x-n}{x(x-1)}$$

Expression de la dérivée : 2 pts

Une fois encore, nous devons donc distinguer le cas $n=1$ des autres valeurs du paramètre.

En effet, pour $n=1$, on a

$$f'(x) = -\frac{1}{x(x-1)} < 0, \qquad \forall x>1$$

Décroissance pour $n=1$: 1 pt

et la fonction f est (strictement) décroissante sur I. Elle n'y présente donc pas d'extremum.

Dans le cas où $n>1$, la dérivée s'annule en

Valeur de x_0 : 1 pt

$$x_0 = \frac{n}{n-1} > 1$$

En se limitant à l'intervalle I considéré, on a

x	1		x_0	
$(n-1)x-n$	$-$	$-$	0	$+$
x	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	0	$+$	$+$	$+$
f'	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nexists$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Étude du signe de f' : 1 pt

Croissance / décroissance : 1 pt

Puisque f' change de signe en étant négative à gauche (fonction décroissante) et positive à droite (fonction croissante) de x_0, la fonction f présente un minimum en ce point. On a

Nature de l'extremum : 1 pt

$$f(x_0) = \ln\frac{x_0^n}{x_0-1} = \ln\left[n\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\right] > 0$$

Valeur de l'extremum : 0 pt

Total iii : 7 pts

iv. Une nouvelle dérivation conduit à

$$f''(x) = -\frac{n}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(1-n)x^2+2nx-n}{x^2(x-1)^2}$$

Expression de f'' : 2 pts

Dans le cas où $n=1$, cette expression devient simplement

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2} > 0 \qquad \forall x>1$$

La concavité est toujours dirigée vers le haut et la fonction ne possède pas de point d'inflexion. Pour $n > 1$, le polynôme du second degré apparaissant au numérateur de f'' s'annule en

Concavité et absence de point d'inflexion si n=1 : 1 pt

$$x_1 = \frac{n-\sqrt{n}}{n-1} < 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{n+\sqrt{n}}{n-1} > 1$$

Valeur de x_2 (sous la forme indiquée ou sous une autre) : 1 pt

Le signe de f'' étant celui de son numérateur et f et ses dérivées n'ayant de sens que pour $x > 1$, il vient

x	0		x_1		1		x_2	
$(1-n)x^2+2nx-n$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
f''	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\cup$	$P.I.$	$\cap$

Pour toutes les valeurs de $n > 1$, la fonction f est convexe (*i.e.*présente sa concavité vers le haut) sur $]1, x_2[$ et est concave (*i.e.*présente sa concavité vers le bas) sur $]x_2, +\infty[$. La fonction présente donc un point d'inflexion en x_2.

Concavité : 1 pt

Point d'inflexion en x_2 : 1 pt

Total iv : 6 pts

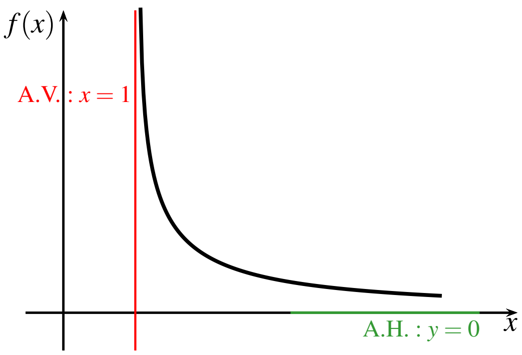
v. Afin d'esquisser le graphe, remarquons que, en plus des propriétés identifiées plus haut, on a, pour tout $x > 1$ et pour tout $n \geq 1$,

Signe de f : 1 pt

$$\frac{x^n}{x-1} = x^{n-1}\frac{x}{x-1} > 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) = \ln\frac{x^n}{x-1} > 0$$

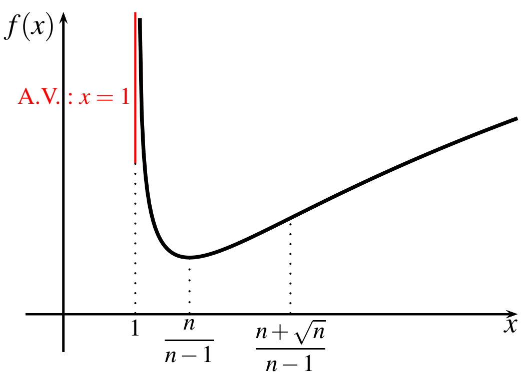
Dans le cas où $n = 1$, le graphe de f peut être esquissé comme suit.

Graphe pour $n = 1$: 2 pts



Pour tout $n > 1$, le graphe présente l'allure ci-dessous.

Graphe pour $n > 1$: 2 pts



Total v : 5 pts

TOTAL QIII : 30 PTS