Université de Liège

Avril 2014

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
SIMULATION D'EXAMEN

Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chaque feuille votre nom (en caractères d'imprimerie) et votre prénom ainsi que le numéro de la question.
L'épreuve se termine à 18 heures.

QUESTION I : ALGÈBRE

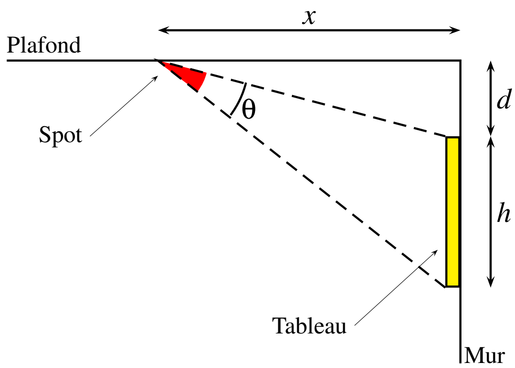
Montrez que $1+i$ est une solution de l'équation (dans $\mathbb{C}$)

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 12 = 0,$$

puis obtenez les autres solutions.

QUESTION II : ANALYSE

On désire éclairer, au moyen d'un spot unique fixé au plafond, un tableau de hauteur $h \neq 0$ suspendu au mur, comme illustré ci-dessous. On considère une approche bidimensionnelle. On note d la distance (mesurée verticalement) entre le dessus du tableau et le plafond et x la distance (mesurée horizontalement) entre le spot et le mur.



L'angle θ que doit couvrir le spot pour éclairer le tableau dépend de la distance x par la relation

$$\theta(x) = \operatorname{arctg}\frac{d+h}{x} - \operatorname{arctg}\frac{d}{x}$$

i. Justifiez l'expression de $\theta(x)$.

ii. Calculez

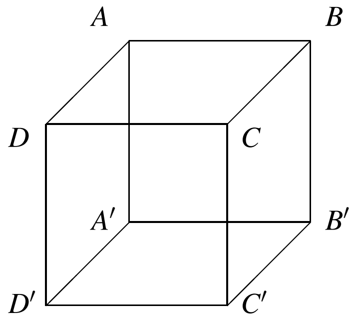
$$\lim_{x\to 0^+} \theta(x)$$

en discutant s'il y a lieu en fonction des valeurs des paramètres d et h,

iii. En considérant d et h comme des paramètres fixés, déterminez la valeur maximale de l'angle θ et exprimez cette valeur en fonction de d et h.
Justifiez et discutez s'il y a lieu en fonction des paramètres d et h.

Question III : Géométrie

On donne un cube de sommets $A, B, C, D, A', B', C', D'$ (voir figure).



i. Démontrez que les plans $AB'D'$ et $C'DB$ sont parallèles.

ii. Démontrez que la droite $B'D'$ est orthogonale au plan formé par les droites AA' et CC' et que la droite AD' est orthogonale au plan formé par les droites DC et $A'B'$.

iii. Démontrez que la droite $A'C$ est orthogonale au plan $AB'D'$.
(*Suggestion : exploitez la propriété établie au point ii.*)

iv. On désigne par T la projection orthogonale du point C sur le plan $AB'D'$. Démontrez que la longueur du segment $[A'T]$ est égale au tiers de la longueur du segment $[A'C]$.
(*Suggestion : exploitez les propriétés du triangle $AA'C$.*)

Question IV : Trigonométrie

i. Factorisez l'expression

$$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x$$

ii. Sur base de l'expression obtenue, déterminez toutes les solutions de l'équation

$$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0$$

(en les exprimant en radians) et représentez celles-ci sur le cercle trigonométrique.

SOLUTIONS TYPES

Avertissement. **Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Chaque candidat(e) est libre d'adopter la méthode qu'il/elle souhaite, pour autant que celle-ci soit correctement justifiée.**

Question I

Notons

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 12$$

On établit facilement

$$(1+i)^2 = 2i\,,\ (1+i)^3 = -2+2i\,,\ (1+i)^4 = -4\,.$$

Dès lors,

$$P(1+i) = -4 - 3(-2+2i) - 2(2i) + 10(1+i) - 12 = 0$$

et $1+i$ est bien une racine du polynôme.

Les coefficients du polynôme donné étant tous réels, les racines non réelles ne peuvent exister que par paires conjuguées, ce qui signifie qu'une deuxième racine est $1-i$.

Le polynôme donné peut donc s'écrire

$$P(x) = (x-(1+i))(x-(1-i))(ax^2+bx+c) = (x^2-2x+2)(ax^2+bx+c)\,,$$

où a, b et c sont des paramètres réels que l'on peut déterminer en identifiant terme à terme les polynômes :

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 12 = (x^2-2x+2)(ax^2+bx+c)\,.$$

Vu les termes en x^4, on a $a = 1$ et vu les termes indépendants on a $c = -6$; l'égalité se précise en

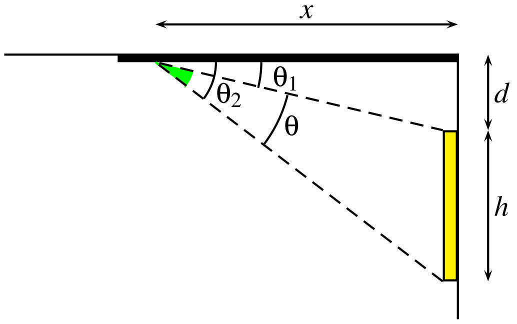
$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 12 = (x^2-2x+2)(x^2+bx-6)\,.$$

En considérant les termes en x^3 on obtient $-3 = b-2$, d'où $b = -1$.

Les deux dernières solutions de l'équation posée sont donc les racines du polynôme $x^2 - x - 6$, c'est-à-dire -2 et 3.

Question II

i. L'angle θ recherché peut être exprimé comme la différence des angles θ_2 et θ_1 illustrés ci-dessous et dont la mesure peut être obtenue en considérant les triangles rectangles auxquels ils appartiennent.



On a donc

$$\theta(x) = \theta_2 - \theta_1 = \operatorname{arctg}\frac{d+h}{x} - \operatorname{arctg}\frac{d}{x}$$

ii. • Si $d \neq 0$, puisque $\lim_{y \to +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\lim_{x \to 0^+} \theta(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

• Si $d = 0$,

$$\theta(x) = \operatorname{arctg} \frac{h}{x}$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} \theta(x) = \frac{\pi}{2}$$

iii. Pour étudier les variations de $\theta(x)$ et identifier un éventuel maximum, on calcule

$$\begin{aligned}
\theta'(x) &= \frac{1}{1 + \frac{(d+h)^2}{x^2}} \left(\frac{-(d+h)}{x^2} \right) - \frac{1}{1 + \frac{d^2}{x^2}} \left(\frac{-d}{x^2} \right) \\
&= \frac{d}{x^2 + d^2} - \frac{d+h}{x^2 + (d+h)^2} \\
&= \frac{dh^2 + d^2 h - hx^2}{(x^2 + d^2)(x^2 + (d+h)^2)} = \frac{h\left[d(d+h) - x^2\right]}{(x^2 + d^2)(x^2 + (d+h)^2)}
\end{aligned}$$

La fonction $\theta(x)$ est stationnaire si $\theta'(x) = 0$. Vu la configuration étudiée et la signification des variables qui en découle, seules les valeurs positives de x ont un sens. Le seul point stationnaire à considérer est donc

$$\tilde{x} = \sqrt{d(d+h)}$$

Nous pouvons dresser le tableau des variations suivant

x	0		$\tilde{x}$	
θ'		$+$	0	$-$
θ		$\nearrow$	Max.	$\searrow$

La fonction $\theta(x)$ étant strictement croissante pour $0 < x < \tilde{x}$ et strictement décroissante pour $x > \tilde{x}$, elle présente son maximum absolu en $x = \tilde{x}$.

L'angle de vue maximum est donc donné par

$$\begin{aligned}
\theta(\tilde{x}) &= \operatorname{arctg} \frac{(d+h)}{\sqrt{d(d+h)}} - \operatorname{arctg} \frac{d}{\sqrt{d(d+h)}} \\
&= \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d+h}{d}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d}{d+h}}
\end{aligned}$$

La solution obtenue n'est cependant pas valable si $d = 0$. Dans ce cas,

$$\theta(x) = \operatorname{arctg} \frac{h}{x}$$

et

$$\theta'(x) = -\frac{h}{h^2 + x^2} < 0$$

Si $d = 0$, il n'y a pas de point stationnaire mais la fonction est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. L'angle de vue θ maximal est donc obtenu pour x tendant vers zéro avec, comme montré au point ii,

$$\lim_{x \to 0^+} \theta(x) = \frac{\pi}{2}$$

Question III

i. Les droites sécantes distinctes DB et DC' déterminent le plan $C'DB$. De même les droites sécantes distinctes $B'D'$ et $B'A$ déterminent le plan $AB'D'$.

   Dans le cube donné, le quadrilatère $DD'B'B$ est un rectangle ; il s'ensuit que les droites DB et $D'B'$ sont parallèles. Il en est de même pour les droites DC' et AB'.

   En conclusion, les plans $C'DB$ et $AB'D'$ sont parallèles, car ils sont déterminés par un couple de droites sécantes, parallèles chacune à chacune.

ii. Dans le cube donné, la droite AA' est orthogonale au plan contenant les points A', B', C', D' ; la droite AA' est donc orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier à la droite $B'D'$. Par ailleurs, la droite $B'D'$ est orthogonale à la droite $A'C'$ (diagonales d'un carré). Dès lors, la droite $B'D'$ étant orthogonale à AA' et$A'C'$, droites sécantes du plan formé par les droites AA' et CC', elle est orthogonale à ce plan.

   Étant donné que l'on travaille dans un cube, la situation est exactement la même pour le cas de l'orthogonalité entre AD'et DC, $A'B'$.

iii. La droite $B'D'$ étant orthogonale au plan formé par les droites AA' et CC', elle est orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier à la droite $A'C$. La droite AD' étant orthogonale au plan formé par DC et $A'B$', elle est orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier à la droite $A'C$. Il s'ensuit que la droite $A'C$ est orthogonale au plan $AB'D'$ car elle est orthogonale à deux droites distinctes de ce plan (à savoir $B'D'$ et AD').

iv. Vu le point iii, le point T se trouve sur le segment $A'C$ et AT est orthogonal à $A'C$; il s'ensuit que, dans le triangle $A'AC$, le segment AT est la hauteur issue de A. De plus, dans le cube donné, le triangle $A'AC$ est rectangle en A. En utilisant les propriétés relatives à la hauteur issue de l'angle droit dans un triangle rectangle, on obtient

$$\left(\overline{AC}\right)^2 = \overline{A'C}\,\overline{TC}, \qquad \left(\overline{AA'}\right)^2 = \overline{A'C}\,\overline{A'T}$$

   d'où

$$\frac{\overline{TC}}{\overline{A'T}} = \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AA'}}\right)^2 = 2$$

   et finalement la longueur du segment $[A'T]$ est bien égale au tiers de la longueur du segment $[A'C]$.

Remarque : Cet exercice peut bien sûr être également résolu en utilisant la géométrie analytique (avec choix d'un repère orthonormé adapté au problème).

Question IV

i. Par application répétée de la formule

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x &= (\sin x - \sin 4x) + (\sin 3x - \sin 2x)\\
&= 2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{-3x}{2} + 2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}\\
&= 2\cos\frac{5x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right)\\
&= -4\cos\frac{5x}{2}\,\cos x\,\sin\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

ii. Les solutions de l'équation

$$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x = 0$$

sont donc obtenues en considérant successivement

- $\cos\frac{5x}{2} = 0$, qui donne $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$ avec k entier ;
- $\cos x = 0$, qui donne $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec k entier ;
- $\sin\frac{x}{2} = 0$, qui donne $x = 2k\pi$ avec k entier.

Sur le cercle trigonométrique, ces solutions sont disposées de la façon suivante :