Avril 2015

Université de Liège

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL

SIMULATION D'EXAMEN

Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chaque feuille votre nom (en caractères d'imprimerie)
et votre prénom ainsi que le numéro de la question.
Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
L'usage des calculatrices est interdit. [1]
L'épreuve se termine à 18 heures.

Question I

On considère l'équation suivante, dans laquelle m désigne un paramètre réel,

$$x^2 + mx + 2 = 0.$$

Déterminez l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation possède deux racines réelles distinctes telles que la plus grande soit supérieure ou égale à deux fois la plus petite.

Question II

Soit la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} z-y & -\dfrac{x+y}{2} \\ 0 & z-2x \end{pmatrix}$$

Déterminez les valeurs de x, y et z pour lesquelles cette matrice admet l'inverse

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question III

Résolvez l'équation

$$\frac{\sin 9x}{\sin 3x} + \frac{\cos 9x}{\cos 3x} = 0$$

et représentez les solutions sur le cercle trigonométrique.

Question IV

Si A, B et C sont les angles d'un triangle non dégénéré, déterminez la valeur de l'angle A si

$$\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = 0$$

1. Comme lors des sessions précédentes, l'utilisation d'une calculatrice sera autorisée lors de l'épreuve de trigonométrie mais restera interdite pour l'épreuve d'algèbre.

Différentes approches peuvent généralement être adoptées pour répondre aux questions posées. La solution type ne présente qu'un nombre limité d'entre elles. Toutes les méthodes de résolution sont cependant acceptées.

Question I

L'équation

$$x^2 + mx + 2 = 0$$

possède deux racines réelles distinctes si le discriminant (ou réalisant) est strictement positif, c'est-à-dire si

$$m^2 - 8 > 0$$

ce qui est le cas si

$$m > 2\sqrt{2} \qquad \text{ou} \qquad m < -2\sqrt{2}.$$

Les deux racines sont alors données par

$$x_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 8}}{2} \ \text{ et } \ x_2 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2}.$$

La plus grande des racines, soit x_2, est plus grande ou égale à deux fois la plus petite, x_1, si

$$\frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2} \geq -m - \sqrt{m^2 - 8}$$

ou encore si

$$3\sqrt{m^2 - 8} \geq -m. \qquad (\spadesuit)$$

La condition ($\spadesuit$) est toujours vérifiée si $m > 2\sqrt{2}$ puisque le membre de droite est alors négatif.

Dans le cas où $m < -2\sqrt{2} < 0$, la condition ($\spadesuit$) devient

$$9m^2 - 72 \geq m^2$$

ou encore

$$m \leq -3.$$

L'ensemble demandé est donc $]-\infty, -3] \cup]2\sqrt{2}, +\infty[$.

Question II

La matrice A^{-1} étant l'inverse de la matrice A, on doit avoir $\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathbb{I}$ où $\mathbb{I}$ désigne la matrice identité, soit

$$\begin{pmatrix} z-y & -\dfrac{x+y}{2} \\ 0 & z-2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z-2y & -\dfrac{x}{2}-\dfrac{7}{2}y+3z \\ 0 & -2x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs de x, y et z recherchées vérifient donc le système formé par les équations linéaires

$$\begin{cases} 2z-2y=1 \\ x+7y-6z=0 \\ -2x+z=1 \end{cases}$$

La première et la troisième de ces équations permettent d'exprimer, respectivement, y et x en fonction de z sous la forme

$$y = z - \frac{1}{2}, \qquad x = \frac{z-1}{2} \tag{$\heartsuit$}$$

Substituant ces expression dans la seconde équation, on obtient

$$\frac{z-1}{2} + 7z - \frac{7}{2} - 6z = 0, \qquad \text{soit} \qquad z = \frac{8}{3}$$

Injectant cette valeur dans ($\heartsuit$), il vient finalement

$$x = \frac{5}{6}, \qquad y = \frac{13}{6}, \qquad z = \frac{8}{3}$$

Question III

L'équation

$$\frac{\sin 9x}{\sin 3x} + \frac{\cos 9x}{\cos 3x} = 0$$

n'a de sens que si $\sin 3x$ et $\cos 3x$ diffèrent de zéro. Elle est donc assortie des conditions d'existence

$$x \neq k\frac{\pi}{6}, \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{$\diamondsuit$}$$

Sous ces conditions d'existence, l'équation est équivalente à

$$\sin 9x \cos 3x + \sin 3x \cos 9x = 0$$

Puisque $\sin(p+q) = \sin p \cos q + \sin q \cos p$, l'équation peut être mise sous la forme

$$\sin(9x+3x) = \sin 12x = 0$$

qui est vérifiée par les x tels que

$$x = \frac{k\pi}{12}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Tenant compte des conditions d'existence ($\diamondsuit$), l'ensemble des solutions de l'équation de départ doit être limité aux seuls multiples impairs de $\pi/12$, *i.e.*

$$x = (2k-1)\frac{\pi}{12} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ces solutions sont représentées sur le cercle trigonométrique de la figure 1.

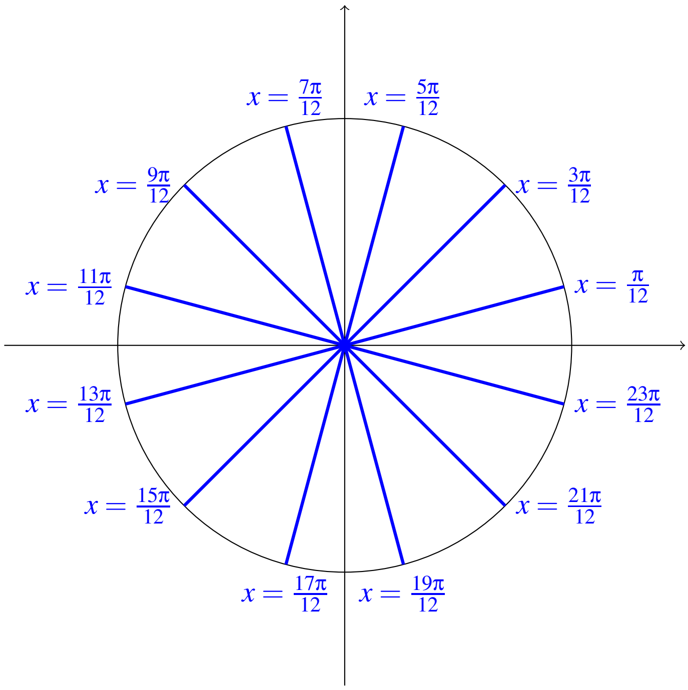

FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

Question IV

Puisque A, B et C désignent les angles d'un triangle, on a $A = \pi - (B+C)$ et, dès lors,

$$\begin{aligned}\sin^2 B + \sin^2 C &= \sin^2 A \\ &= \sin^2(\pi - B - C) = \sin^2(B+C)\end{aligned}$$

En utilisant la formule $\sin(p+q) = \sin p \cos q + \cos p \sin q$, il vient

$$\begin{aligned}\sin^2 B + \sin^2 C &= [\sin B \cos C + \cos B \sin C]^2 \\ &= \sin^2 B \cos^2 C + \cos^2 B \sin^2 C + 2 \sin B \cos B \sin C \cos C\end{aligned}$$

En réarrangeant les termes de cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned}\sin^2 B(1-\cos^2 C) + \sin^2 C(1-\cos^2 B) &= +2\sin B \cos B \sin C \cos C \\ 2\sin^2 B \sin^2 C &= +2 \sin B \cos B \sin C \cos C\end{aligned}$$

Puisque le triangle est non dégénéré, les angles sont tous strictement compris entre 0 et π de sorte que $\sin B$ et $\sin C$ diffèrent de zéro. Après simplification, il vient dès lors

$$0 = \cos B \cos C - \sin B \sin C = \cos(B+C)$$

On en déduit que $B + C = \pi/2$ et dès lors

$$A = \frac{\pi}{2}$$

i.e. le triangle est rectangle en A.

Solution 2

De façon alternative, on peut utiliser la relation des sinus où a, b et c représentent les longueurs des côtés opposés aux angles A, B et C respectivement :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ce qui donne, appliqué à l'équation de départ :

$$\sin^2 A - \frac{b^2 \sin^2 A}{a^2} - \frac{c^2 \sin^2 A}{a^2} = 0$$

Après simplification (CE : $\sin^2 A \neq 0$ puisque le triangle est non dégénéré), nous obtenons la relation

$$a^2 = b^2 + c^2$$

et le triangle est rectangle en A. Dès lors, $A = \dfrac{\pi}{2}$.