Université de Liège

Avril 2016

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL

SIMULATION D'EXAMEN

Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chaque feuille votre nom (en caractères d'imprimerie) et votre prénom ainsi que le numéro de la question.
Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.

L'épreuve se termine à 18 heures.

Question I

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{1 - a^3 x^3}$$

où a désigne un paramètre réel strictement positif. En discutant s'il y a lieu en fonction de a,

i. déterminez le domaine de définition de f ;
ii. déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f ;
iii. étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema ;
iv. étudiez la concavité du graphe et déterminez ses éventuels points d'inflection ;
v. résumez vos observations dans un tableau et esquissez le graphe de f.

Question II

On considère les intégrales I_n ($n \in \mathbb{N}$) définies par

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-x} \, dx$$

i. Calculez I_0 et I_1.
ii. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = (n+1) I_n$.
iii. Des points précédents, déduisez l'expression de I_n en fonction de n.

Question III

Sur les côtés OA et OB d'un triangle rectangle en O, on construit les carrées $OACD$ et $OBEF$, à l'extérieur du triangle.

Démontrez que la hauteur issue du sommet O du triangle et les droites AE et BC sont concourantes.

Question IV

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole d'équation cartésienne

$$y = (x+2)^2$$

Déterminez le lieu du milieu du segment découpé par cette parabole sur une droite variable comprenant l'origine des axes.

Réponses types

Avertissement. **Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Dans bien des cas, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Chacun est libre d'adopter la méthode qu'il/elle souhaite, pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.**

Question I

Soit la fonction

$$f(x) = \sqrt{1-a^3x^3}$$

où $a > 0$ est un paramètre réel.

i. La fonction racine carrée étant définie sur $[0,+\infty[$, la fonction f est définie pour les valeurs de x telles que $1-a^3x^3 \geq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1/a$. Dès lors,

$$\mathrm{dom} f =]-\infty, 1/a]$$

ii. • Il n'y a pas d'asymptote verticale puisque

$$\lim_{x\to 1/a} \sqrt{1-a^3x^3} = 0$$

La fonction est définie et continue en $x = 1/a$.

• On a

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{1-a^3x^3} = +\infty$$

et la fonction ne présente donc pas d'asymptote horizontale.

• Pour examiner l'existence d'une éventuelle asymptote oblique, on doit calculer

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1-a^3x^3}}{x}$$

qui est du type "∞/∞" et donc a priori indéterminée. Considérant le terme dominant du numérateur et du dénominateur, on a

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1-a^3x^3}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{-a^3x^3}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{-a^3x}}{x} = -\lim_{x\to -\infty} \sqrt{-a^3x} = -\infty$$

de sorte que la fonction ne présente pas non plus d'asymptote oblique.

iii. Pour caractériser la croissance/décroissance de f, on calcule

$$f'(x) = \frac{-3a^3x^2}{2\sqrt{1-a^3x^3}}$$

La dérivée s'annule en $x = 0$ et est strictement négative partout ailleurs.
On peut aussi remarquer que la fonction n'est pas dérivable en $x = 1/a$ et que

$$\lim_{x\to 1/a} f'(x) = -\infty$$

En résumé, on a donc

x		0		$1/a$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

La fonction est strictement décroissante sur tout son domaine de définition (y compris en $x = 0$).

L'abscisse $x = 0$ ne correspond pas à un extremum de la fonction car la dérivée n'y change pas de signe : la fonction est décroissante de part et d'autre de ce point.

Par contre, puisque la fonction est décroissante à gauche de $x = 1/a$, le graphe de f présente un minimum en ce point où $f(1/a) = 0$.

iv. Une nouvelle dérivation conduit à

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-12a^3x\sqrt{1-a^3x^3} - (3a^3x^2)^2 \dfrac{1}{\sqrt{1-a^3x^3}}}{4(1-a^3x^3)} \\
&= \frac{-12a^3x(1-a^3x^3) - 9a^6x^4}{4(1-a^3x^3)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{3a^3x(-4+a^3x^3)}{4(1-a^3x^3)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

On peut donc dresser le tableau suivant

x		0		$1/a$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$	$\smile$	P.I.	$\frown$	0

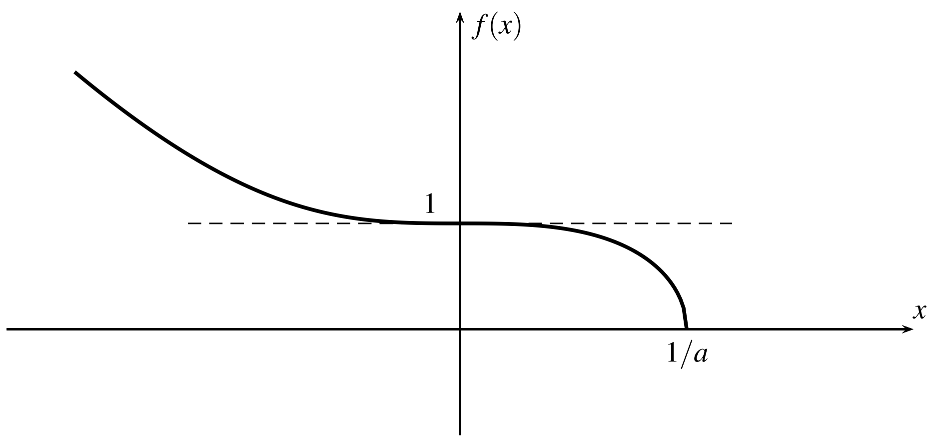
Le seul zéro de f'' dans le domaine est situé en $x = 0$. Ce point correspond à un point d'inflexion puisque la dérivée seconde de la fonction y change de signe. Il s'agit d'un point d'inflexion à tangente horizontale puisque la dérivée première de la fonction y est aussi nulle.

La fonction tourne sa concavité vers le haut pour $x < 0$ et vers le bas pour $x > 0$.

v. Le tableau des variations qui suit résume toutes les propriétés de la fonction étudiée.

x	$-\infty$		0		$1/a$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$-$	$-\infty$
$f''(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0
		$\smile$	P.I.	$\frown$	

Le graphe présente donc l'allure suivante quelle que soit la valeur du paramètre a.



Question II

i. Particularisant l'expression de l'intégrale I_n aux cas $n = 0$ et $n = 1$, on a

$$\begin{cases} I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx \\ I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\, dx \end{cases}$$

Le calcul de I_0 peut être mené directement :

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}(-\mathrm{e}^{-x}) + 1 = 1$$

Pour calculer I_1, on peut faire appel à la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

En posant

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

il vient

$$I_1 = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx = -\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} + I_0$$

La limite apparaissant dans le membre de droite peut être calculée en utilisant la règle de l'Hospital [1] puisque

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Il vient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$$

et, finalement,

$$I_1 = I_0 = 1$$

ii. On a

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} x^{n+1}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx$$

qui peut encore être calculée au moyen de la formule d'intégration par parties avec

$$\begin{cases} f(x) = x^{n+1} \\ g'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(x) = (n+1)x^n \\ g(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a donc

$$I_{n+1} = \left[-x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n+1)x^n\,\mathrm{e}^{-x}\, dx = -\lim_{x\to+\infty} x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x} + (n+1)I_n$$

où la limite peut à nouveau être calculée en utilisant la règle de l'Hospital [1] puisque

$$\lim_{x\to+\infty} x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{\mathrm{e}^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

On a alors, en appliquant $n+1$ fois successivement l'Hospital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{\mathrm{e}^x} = (n+1)\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = (n+1)n\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-1}}{\mathrm{e}^x} = \ldots = (n+1)!\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$$

et, finalement,

$$I_{n+1} = (n+1)I_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

1. La valeur de la limite peut aussi être directement déduite de la connaissance du comportement respectif des fonctions puissances et exponentielles dans le voisinage de $+\infty$: l'exponentielle l'emporte toujours sur les puissances.

iii. De la relation $I_{n+1} = (n+1)I_n$, on déduit, en procédant par récurrence,

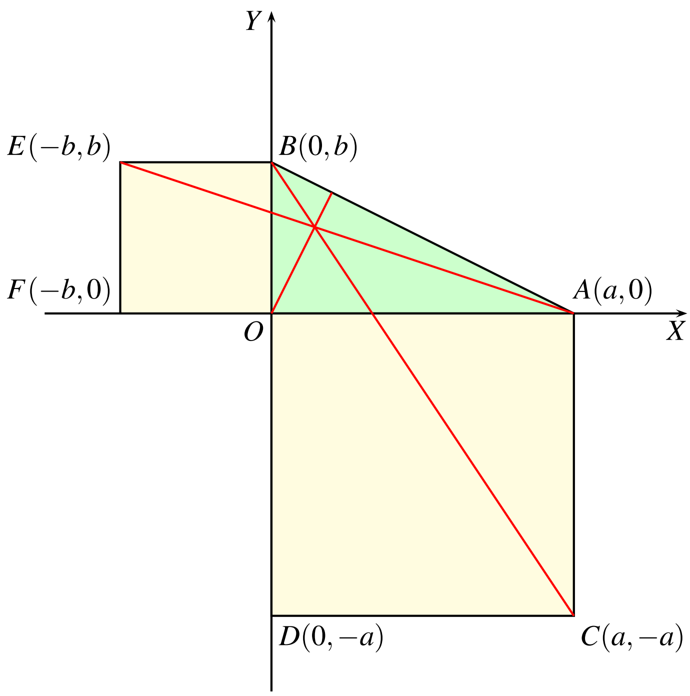
$$I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)nI_{n-1} = ... = (n+1)!I_0 = (n+1)!$$

c'est-à-dire

$$I_n = n!$$

Question III

Résolution par la géométrie analytique



Choisissons le point O comme origine d'un repère orthonormé dont l'axe des abscisses est la droite OA et l'axe des ordonnées la droite OB. Dans ce repère, les points A,B,C,D,E,F ont pour coordonnées $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(a,-a)$, $D(0,-a)$, $E(-b,b)$ et $F(-b,0)$ avec $a,b \in \mathbb{R}_0$ puisque $OACD$ et $OBEF$ sont des carrés et que OAB est un triangle rectangle en O.

Cela étant, d'une part la hauteur issue de O est orthogonale à la droite AB, dont un vecteur directeur est le vecteur $\overrightarrow{AB}(-a,b)$. Cette hauteur a donc pour équation cartésienne

$$ax - by = 0. \tag{$\spadesuit$}$$

D'autre part, les droites AE et BC ont respectivement pour équation cartésienne

$$bx + (a+b)y - ab = 0 \quad \text{et} \quad (a+b)x + ay - ab = 0.$$

L'intersection de ces deux droites est donnée par les solutions du système

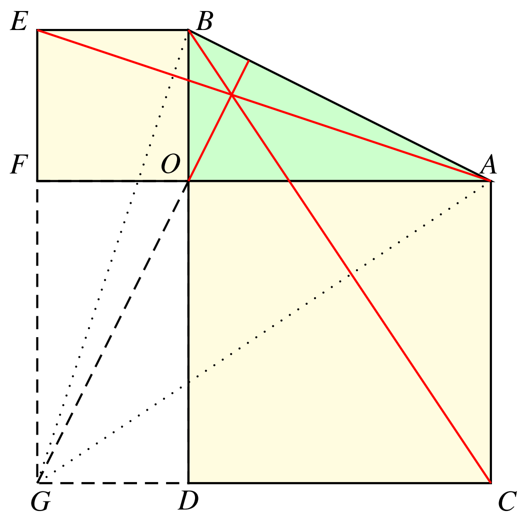
$$\begin{cases} bx + (a+b)y - ab = 0 \\ (a+b)x + ay - ab = 0. \end{cases}$$

Comme $det \begin{pmatrix} b & a+b \\ a+b & a \end{pmatrix} = -(a^2+b^2+ab) \neq 0$, ce système admet une seule solution, à savoir le couple

$$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2+ab}, \frac{a^2b}{a^2+b^2+ab}\right).$$

Ce couple vérifiant l'équation cartésienne ($\spadesuit$) de la hauteur issue de O, on conclut donc que cette hauteur et les droites AE et BC sont bien concourantes.

Résolution par la géométrie synthétique.



Notons G le point d'intersection des droites CD et EF. Les quadrilatères $OACD$ et $OBEF$ étant des carrés, ces droites CD et EF sont perpendiculaires. De plus, on a $|OD| = |OA|$ et $|GD| = |OF| = |OB|$. Les triangles DOG et OAB sont dès lors isométriques, ce qui entraîne $\widehat{DOG} = \widehat{OAB}$ et donc $OG \perp AB$. La droite OG coïncide donc avec la hauteur issue de O du triangle ABC.

De façon similaire, on établit ensuite que les triangles FAE et EGB sont isométriques : les angles $\widehat{EFA}$ et $\widehat{BEG}$ sont tous deux droits, et l'on a $|EF| = |EB|$ ainsi que $|FA| = |EG|$. On a donc $\widehat{FAE} = \widehat{EGB}$, ce qui entraîne $AE \perp BG$.

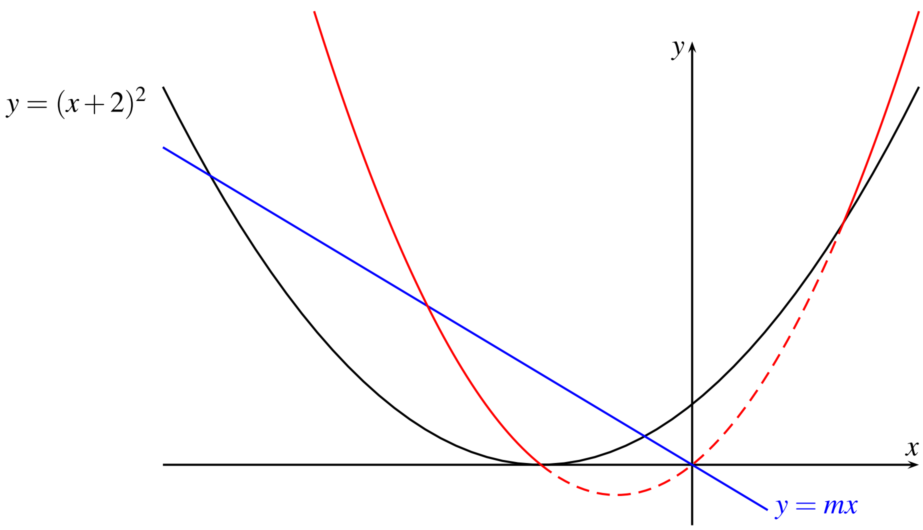
De même, les triangles CBD et GAF sont isométriques : Les angles $\widehat{CDB}$ et $\widehat{GFA}$ sont tous deux droits, et l'on a $|CD| = |GF|$ ainsi que $|BD| = |AF|$. On a donc $\widehat{CBD} = \widehat{GAF}$, ce qui entraîne $BC \perp AG$.

Les trois propriétés d'orthogonalité obtenues montrent que les droites OG, AE et BC constituent les trois hauteurs du triangle GAB. Ces droites sont donc concourantes en l'orthocentre de ce triangle.

Question IV

Remarquons tout d'abord que la parabole $y = (x+2)^2$ ne découpe pas de segment de droite sur l'axe des ordonnées. La droite variable peut donc être décrite par l'équation cartésienne $y = mx$ où m est un paramètre réel. Les points d'intersection de cette droite avec la parabole sont donc donnés par les solutions du système

$$\begin{cases} y = mx \\ y = (x+2)^2 \end{cases}$$



Les abscisses (x) des points d'intersection sont les solutions de l'équation

$$(x+2)^2 - mx = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation

$$x^2 + (4-m)x + 4 = 0.$$

Le discriminant Δ de cette équation polynomiale du second degré est égal à

$$\Delta = (4-m)^2 - 16 = m(m-8)$$

qui est positif si et seulement si $m \leq 0$ ou $m \geq 8$. Dans le cas où Δ est positif, la droite et la parabole possèdent deux points d'intersection de coordonnées

$$\left(\frac{m-4+\sqrt{\Delta}}{2}, m\frac{m-4+\sqrt{\Delta}}{2}\right), \qquad \left(\frac{m-4-\sqrt{\Delta}}{2}, m\frac{m-4-\sqrt{\Delta}}{2}\right).$$

Le milieu du segment défini par ces deux points possède donc les coordonnées

$$\left(\frac{m-4}{2}, \frac{m(m-4)}{2}\right).$$

L'élimination du paramètre m donne la relation $y = 2x(x+2)$ qui est l'équation cartésienne d'une parabole. Le lieu cherché est donc composé de l'union de deux parties de cette parabole : l'une correspondant à $m \in]-\infty, 0]$, c'est-à-dire à $x \in]-\infty, -2]$ (car $m = 2x+4$), et l'autre à $m \in [8, +\infty[$, c'est-à-dire à $x \in [2, +\infty[$ (car $m = 2x+4$).

En résumé, le lieu est l'ensemble des points de la parabole d'équation

$$y = 2x(x+2)$$

dont les abscisses x appartiennent à l'ensemble $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, c'est-à-dire les points dont les abscisses x sont telles que $|x| \geq 2$.

Commentaires

Question I

- Il était clairement indiqué dans l'énoncé que le paramètre a est réel et strictement positif. Toute discussion des cas $a = 0$ et $a < 0$ était donc inappropriée.

- Le domaine de définition étant $]-\infty, 1/a]$, les limites en $+\infty$ ne peuvent être définies. On ne peut non plus considérer d'éventuelles asymptotes horizontales ou obliques au voisinage de $+\infty$.

- Comme indiqué dans la solution type, le calcul de

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1-a^3x^3}}{x}$$

pour déterminer l'existence d'une éventuelle asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ demande de lever l'indétermination. On ne peut conclure en l'absence d'asymptote oblique sur le constat d'une simple indétermination.
L'application de l'Hospital conduit, par dérivation du numérateur et du dénominateur, à

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-3a^3x^2}{2\sqrt{1-a^3x^3}}}{1} = -\frac{3}{2}a^3 \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1-a^3x^3}}$$

qui présente le même type d'indétermination et de difficulté que l'expression initiale.
Pour lever l'indétermination, on peut procéder comme dans la solution type ou écrire

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1-a^3x^3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}-a^3x}}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}-a^3x} = -\infty$$

On notera que, puisque $x < 0$ au voisinage de $-\infty$, on a $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

- L'annulation de la dérivée première en un point x_0 n'est pas une condition suffisante de l'existence d'un extremum (maximum ou minimum) de cette fonction en x_0. Ici, le résultat $f'(0) = 0$ entraîne seulement l'existence d'une tangente horizontale en $x = 0$. On serait assuré de l'existence d'un extremum si f' changeait de signe de part et d'autre de $x = 0$, ce qui n'est pas le cas en l'espèce.

- La fonction présente un minimum en $x = 1/a$ où $f(1/a) = 0$. Partout ailleurs sur le domaine de définition de f, on a $f(x) > 0$.
On notera que les extrema locaux d'une fonction f se trouvent
  (a) parmi les points où la dérivée de f existe et s'annule ;
  (b) parmi les points où f n'est pas dérivable ;
  (c) parmi les points frontières du domaine de définition de f.

  Ici, le minimum est réalisé au point $x = 1/a$ qui est un point frontière du domaine de définition $]-\infty, 1/a]$ de f.

- Lorsqu'on demande d'esquisser le graphe d'une fonction qui dépend d'un paramètre, il ne s'agit pas de tracer le graphique pour une ou plusieurs valeurs particulières de ce paramètre mais d'esquisser un ou plusieurs graphes génériques mettant en évidence les propriétés de tous les graphiques quelles que soient les valeurs admissibles du paramètre. Les positions des points caractéristiques du graphe peuvent être reportées sur le graphique en fonction de ce paramètre.

Question II

- L'intégrale d'une fonction positive est positive (si les bornes d'intégration sont indiquées dans l'ordre habituel). Cette propriété simple devrait permettre de détecter d'éventuelles fautes de signe dans le calcul des intégrales.

- Le calcul de l'intégrale sur un domaine non borné doit être compris de la façon suivante :

$$I_0 = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left[-\mathrm{e}^{-b}+1\right] = 1$$

- L'application de la technique d'intégration par parties pour l'évaluation de l'intégrale

$$I_1 = \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$$

doit viser à profiter de la dérivation pour faire diminuer l'exposant de x. On pose donc

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

et non

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ g'(x) = x \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \\ g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

qui conduit à complexifier l'expression.

- Pour le calcul de

$$\lim_{x\to+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}$$

on peut utiliser le fait que la fonction e^{-x} décroît au voisinage de $+\infty$ plus vite que n'importe quelle puissance de x. Ce résultat, qui peut être démontré par application répétée de la règle de l'Hospital, permet de conclure rapidement que, quel que soit n,

$$\lim_{x\to+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x} = 0$$