UNIVERSITÉ de Liège

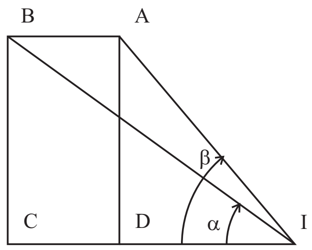
ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
SIMULATION D'EXAMEN

Avril 2008

Question I

On considère le rectangle ABCD et le point I situé sur la droite CD comme représenté ci-contre. Le point I est relié aux points A et B. On donne : $|AB| = 1,5\,m$, $|BC| = 3,2\,m$, $\alpha = 20°$ (la figure n'est pas à l'échelle).

On demande de calculer les valeurs de $|IA|$, $|IB|$, $|IC|$, $|ID|$ et β.



Question II

Résoudre

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Question III

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x-a}$$

où a est un paramètre réel. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur prise par le paramètre a,

i. (a) déterminez le domaine de définition de f ;
   (b) déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f ;
   (c) déterminez et caractérisez les éventuels extrema ;
   (d) étudiez la concavité et identifiez les éventuels points d'inflexion ;
   (e) esquissez le graphe de f.

ii. (a) Déterminez les valeurs de a pour lesquelles l'équation $f(x) = -1$ a au moins une solution.
   (b) Dans le cas $a = 0$, déterminez la valeur de b pour que la droite d'équation $y = bx$ soit tangente au graphe de f.

Consignes pour l'examen :

- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.*
- *Ne recopiez pas les énoncés mais indiquez clairement le numéro de chaque question et de chaque sous-question.*
- *Inscrivez vos NOM et prénom sur chaque feuille.*
- *L'examen se termine à 18h.*

SOLUTION

Les questions I et II comptent respectivement pour 1/3 et 2/3 des points de la trigonométrie.

Solution I

Considérons le triangle rectangle BCI, il vient

$$|BC| = |IC| \ \mathrm{tg}\,\alpha \quad \Rightarrow \quad |IC| = |BC|/\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

La question est évaluée sur 10 points. Le procédé (notamment par l'utilisation de formules correctes) vaut la moitié des points. (NB : Certaines copies sont notées sur 20 points avec une répartition proportionnelle des points.)

soit

$$|IC| = 3.2/\,\mathrm{tg}\,20^\circ = 8,7919\ m$$

Valeur de $|IC|$: 2 points

De même on a

$$|BC| = |IB| \ \sin\alpha$$

et donc

$$|IB| = |BC|/\sin\alpha = 3,2/\sin 20^\circ = 9,3562\ m$$

Valeur de $|IB|$: 2 points

On en déduit :

$$|ID| = |IC| - |CD| = |IC| - |AB| = 8,7919 - 1,5 = 7,2919\ m$$

Valeur de $|ID|$: 2 points

Considérons le triangle rectangle ADI, il vient

$$|AD| = |ID| \ \mathrm{tg}\,\beta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\beta = |AD|/|ID| = |BC|/|ID|$$

soit

$$\mathrm{tg}\,\beta = 3,2/7,2919 = 0,4388 \quad \Rightarrow \quad \beta = 23,6939^\circ$$

Valeur de β : 2 points

Par la relation de Pythagore dans le triangle rectangle ADI, il vient :

$$\begin{aligned} |IA| &= \sqrt{|AD|^2 + |ID|^2} = \sqrt{|BC|^2 + |ID|^2} \\ &= \sqrt{3,2^2 + 7,2919^2} = 7,9632\,m \end{aligned}$$

Valeur de $|IA|$: 2 points

Solution II

La question est évaluée sur 20 points. Le procédé (notamment par l'utilisation de formules correctes) vaut la moitié des points.

On remarque d'abord qu'il n'y a pas de condition d'existence pour l'expression. Groupant les termes selon

$$\begin{aligned} 0 &= \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x \\ &= (\sin x + \sin 4x) + (\sin 2x + \sin 3x) \end{aligned}$$

et utilisant la formule de Simpson :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Il vient

*Deux factorisations : 2 * 4 points = 8 points*

$$\begin{aligned} 0 &= \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x \\ &= 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= 2 \sin \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

Utilisons une autre formule de Simpson :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

Il vient

Troisième factorisation : 4 points

$$\begin{aligned}0 &= \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x\\ &= 2\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)\\ &= 2\sin\frac{5x}{2}\left(2\cos\frac{4x}{4}\cos\frac{2x}{4}\right)\\ &= 4\sin\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}\end{aligned}$$

L'établissement de la factorisation de l'équation par n'importe quel autre procédé vaut aussi 12 points sur 20.

Les solutions de l'équation sont donc données par

– les solutions de $\cos x = 0$, c'est-à-dire

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2 points

– les solutions de $\cos\frac{x}{2} = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2 points

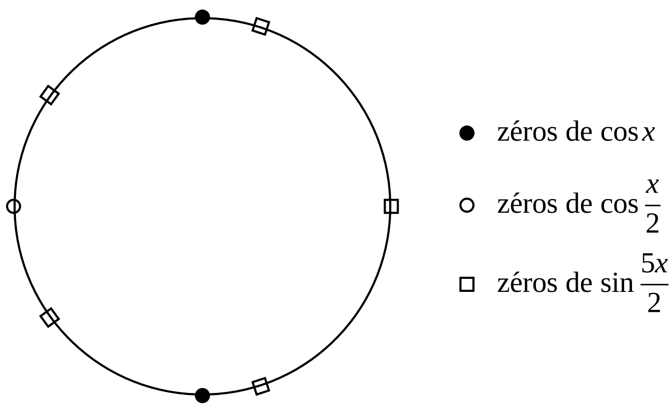
– les solutions de $\sin\frac{5x}{2} = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{5x}{2} = 0 + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{5}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2 points

Voici la représentation des solutions sur le cercle trigonométrique.

La représentation correcte sur le cercle trigonométrique vaut 2 points.



Remarquons que la factorisation de l'équation pouvait également être opérée en procédant dans un ordre différent. Par exemple, par application de la première formule de Simpson citée plus haut, on a

$$\begin{aligned}0 &= (\sin x + \sin 2x) + (\sin 3x + \sin 4x)\\ &= 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}\\ &= 2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{7x}{2}\right)\\ &= 4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}\cos x\end{aligned}$$

Solution III

i. (a) La fonction f est le quotient de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Son dénominateur s'annule en $x = a$. Son domaine de définition est donc $\mathbb{R}\backslash\{a\} =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

Domaine de définition : 1 pt.

(b) <u>Asymptote verticale ?</u>

Le graphe de f présente une asymptote verticale, $x = a$, avec

Existence et équation de l'A.V. : 2 pts

Identification du comportement à gauche et à droite : 1 pt

$$\lim_{x\to a^-} \frac{e^{-x}}{x-a} = \frac{e^{-a}}{0^-} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a^+} \frac{e^{-x}}{x-a} = \frac{e^{-a}}{0^+} = +\infty$$

<u>Asymptote horizontale ?</u>

De

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x-a} = 0^+$$

nous déduisons l'existence de l'asymptote horizontale $y = 0$ au voisinage de $+\infty$, approchée par le dessus.

Existence et équation de l'A.H. en $+\infty$: 2 pts

Identification du comportement par rapport à l'asymptote : 1 pt

D'autre part,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x-a} = \frac{\infty}{\infty}$$

Appliquant le théorème de l'Hospital, nous obtenons

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x-a} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

Pas d'A.H. en $-\infty$: 1 pt

<u>Asymptote oblique ?</u>

Il n'y a pas non plus d'asymptote oblique au voisinage de $-\infty$. On a en effet

Pas d'A.O. en $-\infty$: 1 pt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x(x-a)} = \frac{\infty}{\infty}$$

et, par deux applications successives du théorème de l'Hospital,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x(x-a)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{2x-a} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty$$

Total i(b) : 8 pts

En conclusion, le graphe de f possède une asymptote verticale, $x = a$, et une asymptote horizontale, $y = 0$, en $+\infty$.

(c) En vue de déterminer les éventuels extrema, calculons f' sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ (notons que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$) :

Utilisation de f' pour identifier les extrema : 1 pt

Calcul / valeur de f' : 2 pts

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x-a) - e^{-x}}{(x-a)^2} = e^{-x}\,\frac{a-1-x}{(x-a)^2}$$

Cette dérivée s'annule en $x = a-1$ et change de signe de part et d'autre de $x = a-1$. On a aussi

Localisation d'un éventuel extremum en $a-1$: 1 pt

$$f(a-1) = \frac{e^{-(a-1)}}{a-1-a} = -e^{1-a}$$

Plus précisément

		$a-1$		a	
f'	$+$	0	$-$		$-$
f	$\nearrow$	$-\mathrm{e}^{1-a}$	$\searrow$		$\searrow$

donc f a un maximum local en $x = a-1$ dont la valeur est $-\mathrm{e}^{1-a}$.
Remarquons que la nature de l'extremum en $a-1$ peut également se déduire du signe de la dérivée seconde en ce point. En anticipant sur (d), on trouve $f'(a-1) = 0$ et $f''(a-1) < 0$. La fonction présente donc un maximum local en ce point.

Justification et caractérisation de l'extremum : 2 pts

Total i(c) : 6 pts

(d) En vue de déterminer la concavité et les éventuels points d'inflexion, calculons f'' :

Utilisation de f'' pour l'étude de la concavité : 1 pt

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\left[-\mathrm{e}^{-x}(a-1-x)-\mathrm{e}^{-x}\right](x-a)^2 - 2\,\mathrm{e}^{-x}(x-a)(a-1-x)}{(x-a)^4} \\
&= \mathrm{e}^{-x}\ \frac{\left[-(x-a)(a-1-x+1)-2(a-1-x)\right]}{(x-a)^3} \\
&= \mathrm{e}^{-x}\ \frac{(x-a)^2-2a+2+2x}{(x-a)^3} \\
&= \mathrm{e}^{-x}\ \frac{x^2-2(a-1)x+a^2-2a+2}{(x-a)^3}
\end{aligned}$$

Calcul / valeur de f'' : 2 pts

Ses zéros sont ceux du trinôme du second degré apparaissant au numérateur. Or le réalisant de ce dernier vaut

$$4(a-1)^2 - 4(a^2-2a+2) = 4\left[a^2-2a+1-a^2+2a-2\right] = -4 < 0$$

Ce trinôme n'a pas de zéro réel, f'' ne s'annule jamais et il n'y a donc pas de point d'inflexion.

Pas de point d'inflexion : 1 pt

D'autre part, le signe du trinôme est celui du coefficient de x^2. On a donc

Variation de la concavité : 2 pts

$$\mathrm{signe}\left[\mathrm{f}''(\mathrm{x})\right] = \mathrm{signe}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\right]\cdot\mathrm{signe}[1]\cdot\mathrm{signe}\left[(\mathrm{x}-\mathrm{a})^3\right] = \mathrm{signe}\left[\mathrm{x}-\mathrm{a}\right]$$

La dérivée seconde est donc négative pour $x < a$ et positive pour $x > a$.
On en conclut que le graphe de la fonction f est concave pour $x < a$ et convexe pour $x > a$.

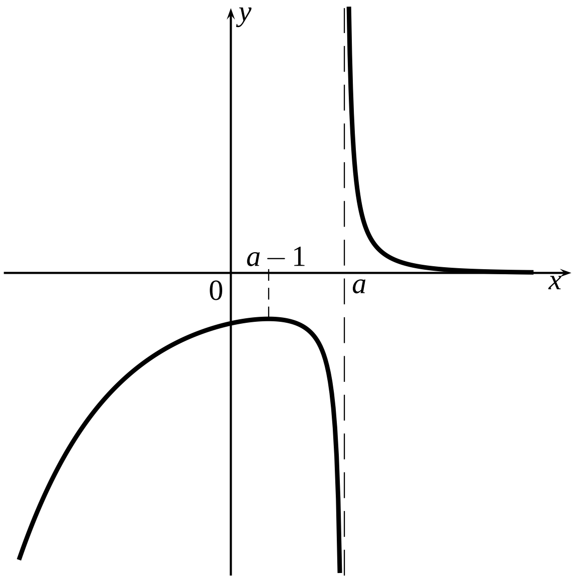
Total i(d) : 6 pts

(e) En vue d'esquisser le graphe de f, établissons le tableau des variations :

	$-\infty$		$a-1$		a		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$-$	
f''		$-$	$-$	$-$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\mathrm{e}^{1-a}$	$\searrow$	$-\infty\,\vert\,+\infty$	$\searrow$	0
		$\cap$	Max.	$\cap$	A.V. $x=a$	$\cup$	A.H. $y=0$

Remarquons que la valeur de la fonction en $x = a-1$ est strictement négative quel que soit $a \in \mathbb{R}$.
Le graphe présente l'allure suivante.

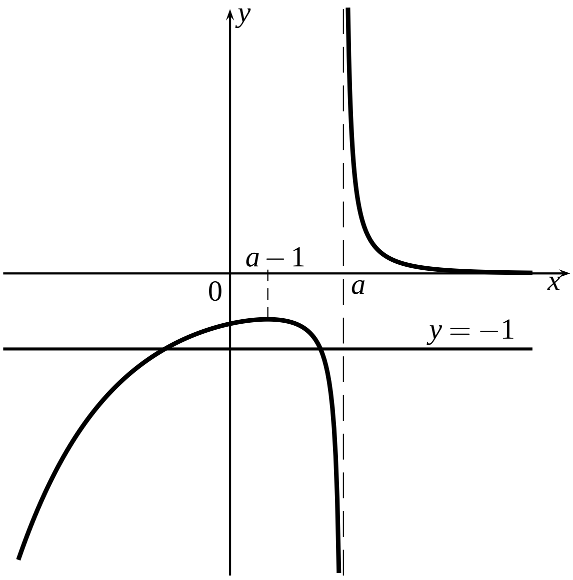
Esquisse du graphe : 3 pts



Le graphe a toujours cette allure quelle que soit la valeur du paramètre a. Signalons seulement que l'asymptote verticale est située à droite de l'axe vertical si $a > 0$ (cas de cette figure), coïncide avec l'axe des ordonnées si $a = 0$ et est située à gauche de celui-ci si $a < 0$.

Total i : 24 pts

ii. (a) Vu le graphe,



Condition analytique $f(a-1) \geq -1$ et/ou graphique : 1 pt

l'équation $f(x) = -1$ a au moins une solution si le maximum local de f est supérieur ou égal à -1, c'est-à-dire si

$$-\mathrm{e}^{1-a} \geq -1$$

Cette condition implique

$$\mathrm{e}^{1-a} \leq 1$$

soit

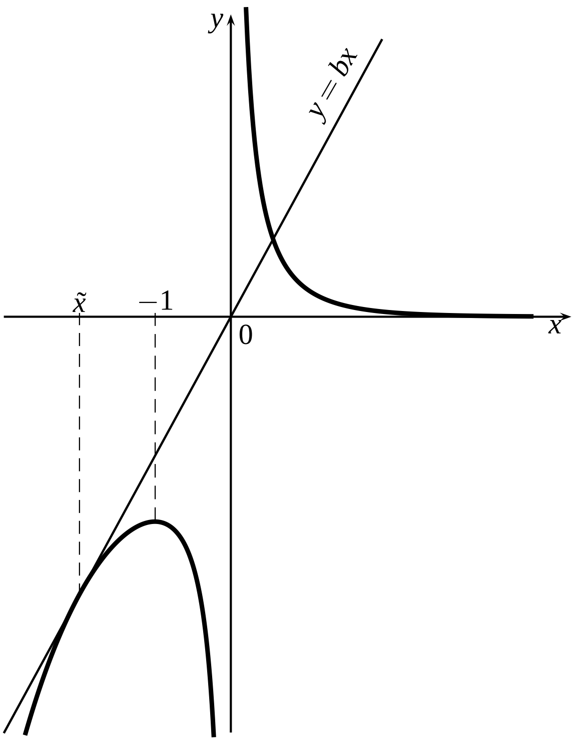
$$a \geq 1$$

Exploitation de la condition et conclusion : 2 pts

En conclusion, l'équation $f(x) = -1$ a au moins une solution si $a \geq 1$ (Elle admet deux solution distinctes si $a > 1$ et une solution unique si $a = 1$).

Total ii(a) : 3 pts

(b) Lorsque $a = 0$, le maximum local de la fonction est situé en $x = -1$ et l'asymptote verticale coïncide avec l'axe des ordonnées. La configuration recherchée est illustrée sur la figure ci-dessous ou on a noté $\tilde{x}$ l'abscisse du point de tangence.



Conditions graphiques et/ou analytiques : 2 pts

Pour que la droite d'équation $y = bx$ soit tangente au graphe de f en $\tilde{x}$, il faut remplir deux conditions. Il faut d'abord que le graphe de f et la droite y aient un point commun, soit

$$b\tilde{x} = f(\tilde{x})$$

Il faut ensuite que la droite soit tangente au graphe en ce point, soit

$$b = f'(\tilde{x})$$

Dans le cas $a = 0$, ces deux conditions s'écrivent respectivement

$$b\tilde{x} = \frac{e^{-\tilde{x}}}{\tilde{x}} \qquad \text{et} \qquad b = e^{-\tilde{x}}\,\frac{-1-\tilde{x}}{\tilde{x}^2}$$

Puisque $\tilde{x}$ ne peut être nul, la première équation ci-dessus donne $e^{-\tilde{x}} = b\tilde{x}^2$ et par substitution de $e^{-\tilde{x}}$ dans la seconde, nous déduisons

$$b = b(-1-\tilde{x})$$

Nous pouvons éliminer le cas $b = 0$ puisque la droite recherchée n'est manifestement pas l'axe des x. On obtient donc

$$1 = -1-\tilde{x} \quad \text{soit} \quad \tilde{x} = -2$$

et de là

$$b = \frac{e^2}{4}$$

Exploitation des conditions et conclusion : 1 pt

Total ii(b) : 3 pts
Total ii : 6 pts

Total Général : 30 pts