Avril 2009

Université de Liège

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
SIMULATION D'EXAMEN

Question I

Pour quelles valeurs du paramètre réel p l'équation

$$4px^2 - 4px + 1 = 0$$

n'admet-elle aucune solution réelle dans l'intervalle [0,1] ?

Question II

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^{18} + 3 - 3i = 0$$

Question III

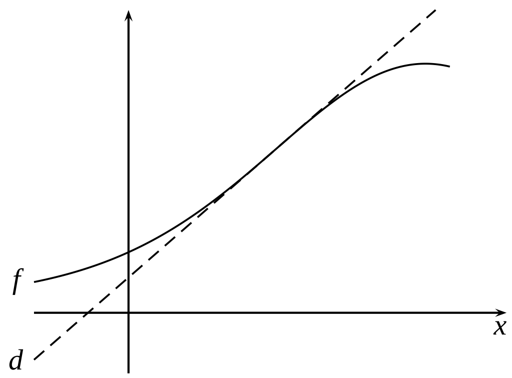
Soit la fonction

$$f(x) = \exp(\alpha \sin x) \qquad \text{(qui se note également } f(x) = e^{\alpha \sin x}\text{)}$$

où α est un paramètre réel non nul.

i. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur prise par le paramètre α,
   (a) déterminez le domaine de définition de f ;
   (b) déterminez si f est paire (ou impaire) ;
   (c) déterminez si f est une fonction périodique (si oui, donnez-en la période) ;
   (d) déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f ;
   (e) déterminez et caractérisez les éventuels extrema ;
   (f) déterminez les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ ne dépend pas de α ;
   (g) esquissez le graphe de f.

ii. Pour $\alpha = \sqrt{2}$, déterminez l'équation de la droite d représentée en pointillé dans le graphe ci-contre et qui est à la fois tangente au graphe de f et sécante au même point.



Consignes pour l'examen :

– *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.*
– *Ne recopiez pas les énoncés mais indiquez clairement le numéro de chaque question et de chaque sous-question.*
– *Inscrivez vos NOM et prénom sur chaque feuille.*
– *L'examen se termine à 18h.*
– LES CALCULATRICES SONT INTERDITES.

SOLUTION TYPE

Différentes approches peuvent généralement être adoptées pour répondre aux questions posées. La solution type ne présente qu'un nombre limité d'entre-elles. Toutes les méthodes de résolution sont cependant acceptées.

Solution I

Le discriminant de l'équation

$$4px^2 - 4px + 1 = 0$$

est donné par

$$\rho = 16p^2 - 16p = 16p(p-1)$$

Le nombre et la nature des solutions peuvent dès lors être discutés en fonction de la valeur de p :

- si $p < 0$ ou $p > 1$, le discriminant est strictement positif et l'équation admet les deux solutions réelles distinctes

$$\frac{p \pm \sqrt{p(p-1)}}{2p} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{p(p-1)}}{2p}$$

- si $p = 1$, le discriminant est nul et l'équation possède la seule solution réelle $1/2$;
- si $p = 0$, l'équation devient $1 = 0$ et n'admet donc aucune solution ;
- si $0 < p < 1$, le discriminant est strictement négatif et l'équation possède les deux solutions complexes conjuguées

$$\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{p(1-p)}}{2p}$$

Les deux derniers cas correspondent à la condition de l'énoncé ; l'équation proposée ne possède aucune solution réelle dans l'intervalle $[0,1]$. Cette condition est également rencontrée dans le premier cas si et seulement si

$$\left|\frac{\sqrt{p(p-1)}}{2p}\right| > \frac{1}{2}$$

soit

$$p(p-1) > p^2$$

c'est-à-dire

$$p < 0$$

En conclusion, l'ensemble des valeurs acceptables pour p est donc $]-\infty, 1[$.

Remarque. Si $p = 0$, l'équation n'admet pas de solution. Sinon, elle se réécrit comme suit

$$4x^2 - 4x + 1/p \;=\; (2x-1)^2 - (1 - 1/p) \;=\; 0\,,$$

c'est-à-dire

$$(2x-1)^2 \;=\; (1 - 1/p)$$

On a $x \in [0,1]$ si et seulement si $2x - 1 \in [-1,1]$ ou encore $(2x-1)^2 \in [0,1]$ ou encore $1 - 1/p \in [0,1]$ c'est-à-dire $p \geq 1$, d'où le résultat sans même résoudre l'équation.

TOTAL Q1 : 15 PTS

Solution II

L'équation proposée peut s'écrire

$$z^{18} = -3+3i$$

et les solutions recherchées sont donc les racines 18-èmes du nombre complexe $-3+3i$.
Le module du nombre complexe $-3+3i$ est $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et son argument est $3\pi/4$ de sorte que

$$z^{18} = \sqrt{18}\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{4}$$

ou encore, pour toute valeur entière de k,

$$z^{18} = \sqrt{18}\,\text{cis}\,\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

Les solutions de l'équation s'écrivent donc

$$z = \sqrt[36]{18}\,\text{cis}\,\left(\frac{3\pi}{4\cdot 18} + \frac{2k\pi}{18}\right) = \sqrt[36]{18}\,\text{cis}\,\left(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{9}\right)$$

où k est un entier quelconque. On identifie cependant seulement 18 solutions distinctes formant l'ensemble

$$\left\{\sqrt[36]{18}\,\text{cis}\,\left(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{9}\right) : k = 0, 1, \ldots, 17\right\}.$$

TOTAL Q2 : 15 PTS

Solution III

i. Déterminons les propriétés de la fonction f dans le cas où α prend une valeur réelle quelconque non nulle.

(a) Les fonctions sinus et exponentielle étant définies sur $\mathbb{R}$, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Domaine de définition : 1 pt

(b) On a

$$f(-x) = \exp[\alpha \sin(-x)] = \exp[-(\alpha \sin x)]$$

La fonction exponentielle n'étant ni paire, ni impaire, on en déduit que la fonction f n'est, elle non plus, ni paire, ni impaire.

b) Absence de parité : 1 pt

(c) Recherchons s'il existe des nombres positifs non nuls T tels que

Connaissance de la notion de période : 1 pt

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

et, si c'est le cas, identifions le plus petit d'entre eux qui sera la période. On doit avoir

$$\exp[\alpha \sin(x+T)] = \exp[\alpha \sin x] \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

soit, en prenant le logarithme des deux membres et en tenant compte du fait que α est non nul,

$$\sin(x+T) = \sin(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction sinus étant périodique de période 2π, nous pouvons donc conclure que f est également périodique de période $T = 2\pi$.

Période de la fonction f : 1 pt

c) Total : 2 pts

(d) *Asymptote verticale ?*

Le graphe de f ne présente pas d'asymptote verticale puisque la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Absence d'asymptote verticale : 1 pt

Asymptote horizontale ?

Il n'y a pas d'asymptote horizontale, ni en $+\infty$, ni en $-\infty$, puisque les limites

$$\lim_{x\to\pm\infty} \exp(\alpha \sin x)$$

n'existent pas. La fontion f oscille indéfiniment entre $\exp\alpha$ et $\exp(-\alpha)$.

Limites en $\pm\infty$ et absence d'asymptote horizontale : 1 pt

Asymptote oblique ?

Il n'y a pas non plus d'asymptote oblique puisque

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\exp(\alpha \sin x)}{x} = 0$$

En effet, le numérateur oscille indéfiniment entre $\exp\alpha$ et $\exp(-\alpha)$ et le dénominateur croît indéfiniment.

Limites en $\pm\infty$ et absence d'asymptote oblique : 1 pt

Notons que l'absence d'asymptote horizontale ou oblique peut aussi se déduire de la périodicité de la fonction sur $\mathbb{R}$.

En conclusion, la fonction f ne présente aucune asymptote.

d) Total : 3 pts

(e) En vue de déterminer les éventuels extrema, calculons f' (notons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$) :

$$f'(x) = \alpha \cos x \exp(\alpha \sin x)$$

Utilisation de f' pour identifier les extrema : 1 pt

Calcul/valeur de f' : 1 pt

Cette dérivée s'annule quand $\cos x = 0$, soit en

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Localisation d'éventuels extrema en $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$: 1 pt

et change de signe de part et d'autre de ces points qui sont donc des extrema. On a aussi

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = e^{\alpha}$$

et

$$f\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = e^{-\alpha}$$

Plus précisément, en faisant le tableau des variations sur la période centrale $[-\pi, \pi]$ de la fonction, nous pouvons conclure que

– si $\alpha > 0$,

		$-\pi/2$		$\pi/2$	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$e^{-\alpha}$	$\nearrow$	e^{α}	$\searrow$

Technique de caractérisation des extrema par étude des variations de f' ou calcul de f'' aux points considérés : 2 pts

la fonction f présente des minima locaux en $x = -\pi/2 + 2k\pi$ dont la valeur est $e^{-\alpha}$ et des maxima locaux en $x = \pi/2 + 2k\pi$ dont la valeur est e^{α} ;

Identification de α comme paramètre de discussion : 2 pts

Conclusions : 4 pts

– si $\alpha < 0$,

		$-\pi/2$		$\pi/2$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$e^{-\alpha}$	$\searrow$	e^{α}	$\nearrow$

la fonction f présente des maxima locaux en $x = -\pi/2 + 2k\pi$ dont la valeur est $e^{-\alpha}$ et des minima locaux en $x = \pi/2 + 2k\pi$ dont la valeur est e^{α}.

Remarquons que la nature des extrema peut également se déduire du signe de la dérivée seconde en ces points. On a

$$f''(x) = \alpha \exp(\alpha \sin x)(-\sin x + \alpha \cos^2 x)$$

et donc

$$f''(\pi/2 + 2k\pi) = -\alpha e^{\alpha} \begin{cases} < 0 & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ > 0 & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

On peut donc en déduire l'existence de maxima locaux en $\pi/2 + 2k\pi$ si $\alpha > 0$ et de minima locaux en ces mêmes points si $\alpha < 0$. De même, de

$$f''(-\pi/2 + 2k\pi) = \alpha e^{-\alpha} \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ < 0 & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

on déduit l'existence de minima locaux en $-\pi/2 + 2k\pi$ si $\alpha > 0$ et de maxima locaux en ces mêmes points si $\alpha < 0$.

e) Total : 11 pts

(f) Nous cherchons les x pour lesquels $f(x) = \exp(\alpha \sin x)$ ne dépend pas du paramètre α. Ceci n'est possible que si

$$\sin x = 0$$

soit

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

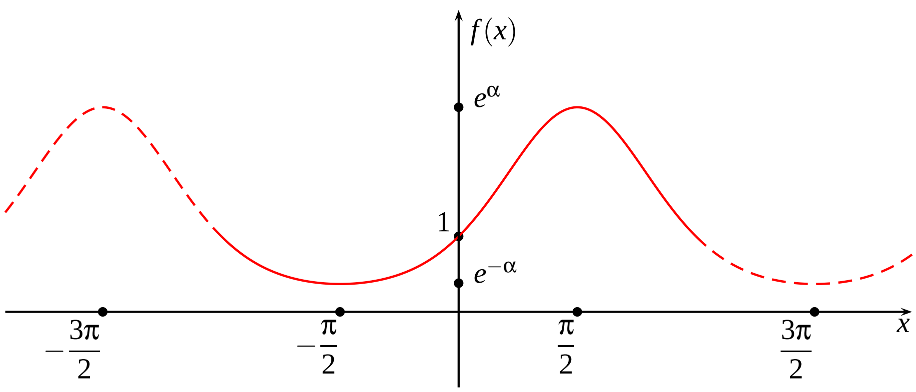
avec

$$f(k\pi) = 1$$

f) Points en lesquels $f(x)$ ne dépend pas de α : 2 pts

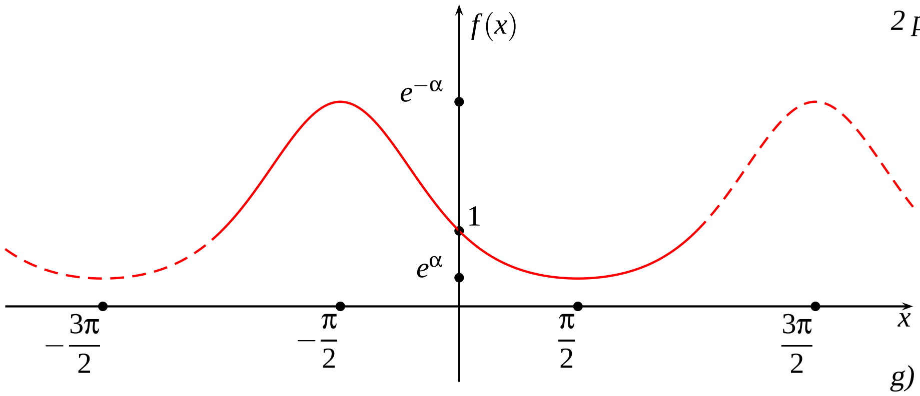
(g) Pour $\alpha > 0$, le graphe présente l'allure suivante dans sa période centrale.

Esquisse du graphe dans le cas $\alpha > 0$ (avec valeurs particulières) : 2 pts



Pour $\alpha < 0$, le graphe présente l'allure suivante dans sa période centrale.

Esquisse du graphe dans le cas $\alpha < 0$ (avec valeurs particulières) : 2 pts



g) Total : 4 pts
i. Total : 24 pts

ii. Dans la cas $\alpha = \sqrt{2}$, la fonction devient $f = \exp(\sqrt{2}\sin x)$.
La droite dont nous cherchons à établir l'équation est tangente au graphe de f en son premier point d'inflexion d'abscisse positive. Les points d'inflexion vérifient

Identification de la droite comme la tangente au point d'inflexion : 2 pts

$$f''(x) = 0$$

On obtient successivement,

$$f'(x) = \sqrt{2}\cos x \, \exp(\sqrt{2}\sin x)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sqrt{2}\exp(\sqrt{2}\sin x)\left(-\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x\right) \\ &= \sqrt{2}\exp(\sqrt{2}\sin x)\left(-\sqrt{2}\sin^2 x - \sin x + \sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Le trinôme du second degré en $\sin x$ admet comme zéros

Valeur de f'' : 1 pt

$$-\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

dont seul le deuxième est acceptable puisqu'on a toujours $-1 \leq \sin x \leq 1$.
Les x qui annulent f'' vérifient donc

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il s'agit de

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Parmi ceux-ci, la plus petite valeur positive est $x = \pi/4$. En ce point,

Localisation du point d'inflexion en $x = \pi/4$: 1 pt

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = e$$

Ainsi, la droite $d \equiv y = ax + b$, que nous cherchons, est la droite dont la pente vaut e et qui passe par le point $(\pi/4, e)$. Ces deux conditions s'écrivent

Caractéristiques de la tangente : 1 pt

$$a = e \quad \text{et} \quad e = \frac{e\pi}{4} + b$$

et donnent finalement

$$d \equiv \frac{y}{e} = x + 1 - \frac{\pi}{4}$$

Equation de la tangente : 1 pt

ii. Total : 6 pts
TOTAL Q3 : 30 PTS