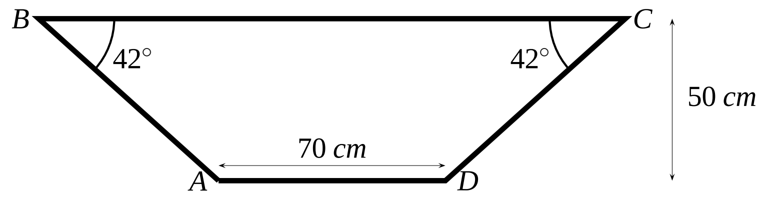
Université de Liège

Mai 2010

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
SIMULATION D'EXAMEN

Répondez aux ***questions I et II*** *(trigonométrie).*
Résolvez ***deux questions au choix parmi les questions III, IV et V*** *(géométrie).*
Justifiez votre démarche.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chaque feuille votre nom (en caractères d'imprimerie) et votre prénom ainsi que le numéro de la question.
L'épreuve se termine à 18 heures.

QUESTION I : La section d'un fossé est un trapèze isocèle dont la hauteur mesure 50 cm et la petite base 70 cm ; les angles aigus sont égaux à 42° (Cf. schéma de la section ci-dessous). Calculer le volume de terre à déblayer pour creuser un tel fossé sur une longueur de 100 m.
Le résultat numérique final sera exprimé avec trois chiffres significatifs.



QUESTION II : Résoudre l'équation

$$\sin x + \sin 3x = \cos x$$

en exprimant les solutions en radians et représenter celles-ci sur le cercle trigonométrique.

QUESTION III : Sur les côtés OA et OB d'un triangle OAB rectangle en O, on construit les carrés $OACD$ et $OBEF$ à l'extérieur du triangle OAB.

i. Démontrer que la hauteur du triangle issue de O et les droites EF et CD sont concourantes.
ii. Démontrer que cette hauteur est également concourante avec les droites AE et BC.

QUESTION IV : Soient deux droites perpendiculaires x et y, sécantes en O. Sur x, on fixe les points A et B, différents de O, de telle sorte que l'on ait $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB}$. Pour tout point $P \in y$, on définit le point Q tel que $3\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP}$.
Déterminer le lieu des points communs aux droites AP et BQ lorsque P parcourt y.

QUESTION V : Soient A, B, C et D quatre points de l'espace distincts et non coplanaires tels que :

- il existe un plan parallèle aux droites AB et CD qui coupe BC en un point E et AD en un point F, et
- il existe un plan parallèle aux droites BC et AD qui coupe AB en un point G et CD en un point H.

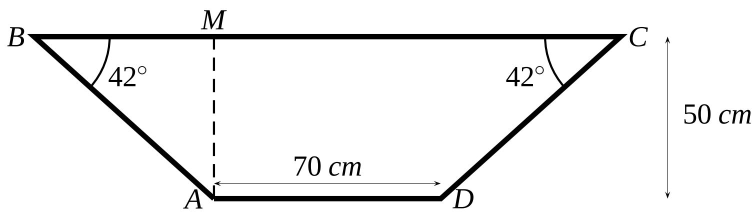
i. Choisir un repère permettant d'exprimer les données de ce problème le plus simplement possible.
ii. Dans ce repère, déterminer les équations des droites AB, CD, AD et BC.
iii. Déterminer les coordonnées des points E, F, G et H.
iv. Démontrer que ces points sont coplanaires.

Solutions

Différentes approches peuvent généralement être adoptées pour répondre aux questions posées. La solution type ne présente qu'un nombre limité d'entre-elles. Toutes les méthodes de résolution sont cependant acceptées.

Question I

Appelons M le pied de la hauteur abaissée de A :



On a

$$BM = \frac{AM}{\operatorname{tg} 42^\circ} = 55,53 \ cm$$
$$BC = AD + 2BM = 70 + 2 \cdot 55,53 = 181,1 \ cm$$

et la surface S du trapèze est donc donnée par

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot AM = \frac{181,1 + 70}{2} \cdot 50 = 6277,5 \ cm^2$$
$$= 0,62775 \ m^2$$

Il vient donc,

$$\text{Volume = Surface} \cdot \text{longueur} = 0,62775 \cdot 100 = 62,775 \ m^3 \approx 62,8 \ m^3$$

où le résultat final est exprimé avec trois chiffres significatifs.

Question II

En utilisant la formule de Simpson, l'équation proposée peut être transformé selon

$$\cos x = \sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$$

et est donc équivalente à

$$(2 \sin 2x - 1) \cos x = 0$$

Les solutions correspondent à

i. $\cos x = 0$, soit

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

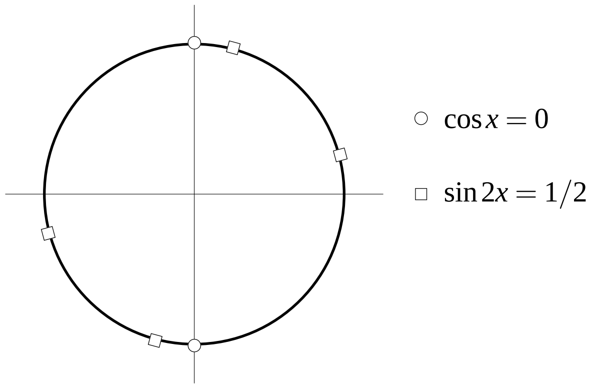
ii. $\sin 2x = 1/2$, soit

$$2x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

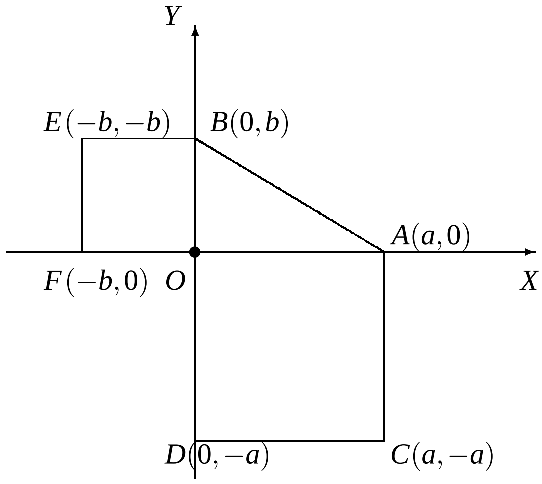
ou

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Sur le cercle trigonométrique, on a



Question III



Choisissons le point O comme origine d'un repère orthonormé dont l'axe des abscisses est la droite OA et l'axe des ordonnées la droite OB.
Dans ce repère, les différents points ont pour coordonnées $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(a,-a)$, $D(0,-a)$, $E(-b,b)$ et $F(-b,0)$ avec $a,b \in \mathbb{R}_0$ puisque $OACD$ et $OBEF$ sont des carrés et que OAB est un triangle rectangle en O.

Démontrons les points i) et ii) en utilisant le repère défini ci-dessus.

i) Les droites EF et CD ont respectivement pour équation cartésienne

$$x = -b \quad \text{et} \quad y = -a.$$

Leur intersection est un point P, de coordonnées $(-b,-a)$.

La hauteur issue de O est orthogonale à la droite AB, dont un vecteur directeur est le vecteur $\overrightarrow{AB}(-a,b)$. Cette hauteur a donc pour équation cartésienne

$$ax - by = 0.$$

Comme les coordonnées de P vérifient cette équation, la hauteur issue de O et les droites EF et CD sont bien concourantes.

ii) Les droites AE et BC ont respectivement pour équation cartésienne

$$bx + (a+b)y - ab = 0 \quad \text{et} \quad (a+b)x + ay - ab = 0.$$

L'intersection de ces deux droites est donnée par les solutions du système

$$\begin{cases} bx + (a+b)y - ab = 0 \\ (a+b)x + ay - ab = 0. \end{cases}$$

Comme $-(a^2+b^2+ab) = det \begin{pmatrix} b & a+b \\ a+b & a \end{pmatrix} \neq 0$ (ce nombre est même toujours strictement négatif), ce système admet une seule solution, à savoir le couple

$$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2+ab}, \frac{a^2b}{a^2+b^2+ab} \right).$$

Ce couple vérifiant l'équation cartésienne de la hauteur issue de O, on conclut donc que cette hauteur et les droites AE et BC sont bien concourantes.

Question IV

Choisissons le point O comme origine du repère et les droites X et Y comme axes du repère, l'orientation étant choisie de telle sorte que le vecteur unité de l'axe X soit $\overrightarrow{OB}$. Ainsi, le point B a pour coordonnées $(1,0)$ et le point A a pour coordonnées $(2,0)$.

Cela étant, un point P appartient à l'axe Y si et seulement si ses coordonnées s'écrivent $(0,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans ces conditions,

– le point Q a pour coordonnées $\left(0, \dfrac{\lambda}{3}\right)$

– la droite AP a pour équation cartésienne $y = -\dfrac{\lambda}{2}(x-2)$

– la droite BQ a pour équation cartésienne $y = -\dfrac{\lambda}{3}(x-1)$

Il s'ensuit que le lieu cherché est l'ensemble des points L de coordonnées cartésiennes (x,y) pour lesquels il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\lambda}{2}(x-2) \\ \\ y = -\dfrac{\lambda}{3}(x-1) \end{cases}$$

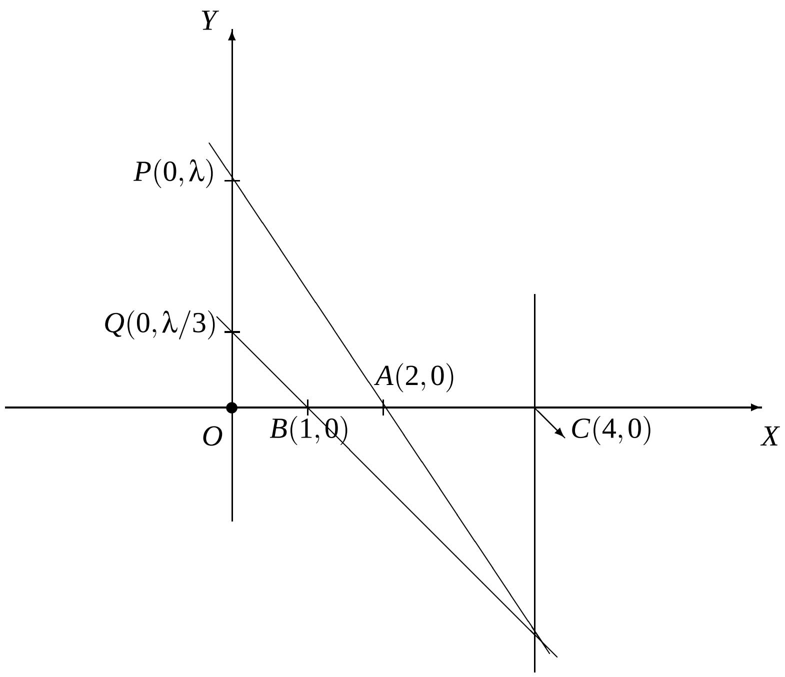
Cela étant, si $L(x,y)$ est un point du lieu, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\lambda}{2}(x-2) \\ \\ 0 = \lambda(x-4) \end{cases}$$

On en déduit que si $\lambda = 0$ alors $y = 0$ et si $\lambda \neq 0$ alors $x = 4$.

Réciproquement, si $y = 0$ alors le point de coordonnées $(x,0)$ est un point du lieu quel que soit le réel x (il suffit de prendre $\lambda = 0$) et si $x = 4$ alors $(4,y)$ est aussi un point du lieu quel que soit le réel y (il suffit de prendre $\lambda = -y$).

En conclusion, le lieu demandé est l'ensemble des points de l'axe X et de la droite verticale d'équation cartésienne $x = 4$.



Question V

i. Etant donné que le problème n'implique pas de mesurer des distances ou des angles, il est permis de choisir un repère non orthonormé.

Une solution simple consiste à placer l'origine du repère au point A, et à définir les axes sur base des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Dans ce repère, les points A, B, C et D possèdent les coordonnées suivantes :

$$\begin{array}{rl} A: & (0,0,0) \\ B: & (1,0,0) \\ C: & (0,1,0) \\ D: & (0,0,1) \end{array}$$

ii. On obtient directement les équations

$$AB: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \qquad CD: \begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \end{cases}$$

$$AD: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad BC: \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

iii. Notons π_1 et π_2 les plans mentionnés dans l'énoncé, respectivement parallèles à AB, CD et à BC, AD. Le plan π_1 possède les vecteurs directeurs $(1,0,0)$ et $(0,1,-1)$, et ses points satisfont donc l'équation

$$\pi_1 : y+z=a,$$

où a est un paramètre réel. De même, le plan π_2 possède les vecteurs directeurs $(1,-1,0)$ et $(0,0,1)$, ce qui conduit à l'équation

$$\pi_2 : x+y=b,$$

où b est un paramètre réel.

Les coordonnées des points E, F, G et H satisfont les systèmes d'équations

$$E: \begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \\ y+z=a \end{cases} \qquad F: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ y+z=a \end{cases}$$

$$G: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x+y=b \end{cases} \qquad H: \begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \\ x+y=b, \end{cases}$$

ce qui donne les coordonnées

$$\begin{array}{rl} E: & (1-a,a,0) \\ F: & (0,0,a) \\ G: & (b,0,0) \\ H: & (0,b,1-b). \end{array}$$

iv. Il y a plusieurs façons de prouver que les points E, F, G et H sont coplanaires. Une solution algébrique simple consiste notamment à démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont linéairement dépendants.

Le problème peut aussi être résolu en suivant une approche plus géométrique. Il suffit de démontrer que les droites EF et GH sont sécantes.

Par hypothèse, on a $EF \subset \pi_1$ et $GH \not\subset \pi_1$. On en déduit que l'intersection des droites EF et de GH, si elle existe, doit nécessairement coïncider avec le point de percée P de la droite GH dans π_1.

De même, on a $GH \subset \pi_2$ et $EF \not\subset \pi_2$. Par conséquent, l'intersection des droites EF et de GH, si elle existe, doit nécessairement coïncider avec le point de percée Q de la droite EF dans π_2.

Les droites EF et GH sont donc sécantes si et seulement si les points P et Q sont confondus. Nous allons donc calculer les coordonnées de ces points afin de les comparer.

Les points de la droite GH satisfont l'équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 1-b \end{pmatrix},$$

où λ est un paramètre réel. L'intersection de cette droite avec le plan $\pi_1 : y+z=a$ correspond donc à $\lambda = a$, ce qui fournit l'intersection $P : (b(1-a), ab, a(1-b))$.
Les points de la droite EF satisfont l'équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1-a \\ a \\ -a \end{pmatrix},$$

où μ est un paramètre réel. L'intersection de cette droite avec le plan $\pi_2 : x+y=b$ correspond donc à $\mu = b$, ce qui fournit l'intersection $Q : (b(1-a), ab, a(1-b))$.
On a donc établi $P = Q$, ce qui conclut la preuve.

Quelques commentaires/erreurs sur les copies

Question 1.

- Utilisation de formules incorrectes ou inappropriées.
- Erreurs de calculs notamment dans l'évaluation de la tangente (angle donné en degrés).

Question 2.

- Formule de Simpson mal connue.
- Identification d'une partie seulement des solutions.

Question 3.

Plusieurs points signalés pour les questions 4 et 5 se retrouvent pour cette question.

- Rendre une feuille sans y avoir indiqué son nom.
- Ne pas répondre à la question posée.
- Résoudre le problème dans un cas particulier (triangle rectangle isocèle).
- Utiliser la propriété à démontrer dans la résolution (très fréquent lors d'une résolution par géométrie synthétique).
- Résoudre le problème par la géométrie analytique sans avoir défini le repère ou considérer un repère orthogonal et non orthonormé ou donner des coordonnées numériques aux éléments (donc envisager un cas particulier).
- En géométrie synthétique, admettre certaines relations des éléments entre eux (visibles sur la figure) sans aucune justification.
- Rédaction vague ou incorrecte en français ce qui rend l'idée exprimée incompréhensible ou incorrecte.
- Notation pas claire, abréviation inhabituelle, utilisation abusive du symbole d'implication.
- Suite de calculs sans indication de lien entre eux ni d'explication de la démarche suivie.
- Résolution d'un système linéaire par la méthode de substitution moins bien adaptée au problème qu'une méthode utilisant les déterminants (Cramer)

Question 4.

Plusieurs points signalés pour la question 5 se retrouvent ici.

- Ne pas répondre à la question posée.
- Enumérer des calculs sans aucun lien entre eux ni explication de la démarche à suivre.
- Texte parfois vraiment indéchiffrable (écriture, soin).

En plus, la correction de cette question (4) permet d'ajouter les remarques suivantes

- Manque de rigueur, de structure, de soin dans la rédaction des calculs (utilisations malheureuses des signes d'implication ou de bi-implication, simplifcations sans dicussions, ...). Cela conduit à des réponses erronées (descriptions erronées et/ou incomplètes).

Question 5.

- Essayer uniquement de résoudre le problème pour un cas particulier. Notamment, supposer que les droites AB, AB et AD sont perpendiculaires deux à deux, que A, B, C et D font partie des sommets d'un même cube, ou que les plans mentionnés dans l'énoncé sont équidistants des droites auxquelles ils sont annoncés être parallèles.
- Résoudre le problème par la géométrie analytique sans avoir défini de repère.
- Confondre les équations de droites, de plans et de points.
- Utiliser dans la résolution du problème la propriété que l'on cherche à démontrer. (Par exemple, exploiter le fait que E, F, G et H sont coplanaires.)
- Donner une résolution formelle (et incorrecte) du problème sans fournir la moindre explication quant à la démarche suivie.
- Ne pas répondre aux questions posées.
- Fournir un texte illisible, rédigé au crayon, et/ou truffé de fautes d'orthographe.
- Rendre une feuille sans y avoir indiqué son nom.