ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL

SIMULATION D'EXAMEN

Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.

Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.

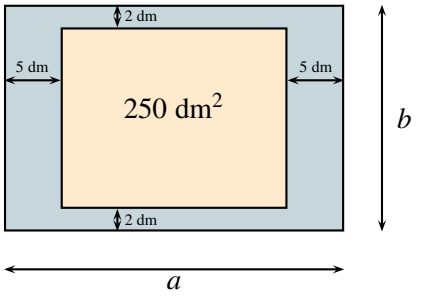
Indiquez sur chaque feuille votre numéro d'ordre, votre NOM en caractères d'imprimerie, votre prénom et le numéro de la question.

Justifiez toutes vos démarches.

L'épreuve se termine à 18 heures.

Question I

On désire placer un panneau photovoltaïque rectangulaire sur le toit, rectangulaire lui aussi, d'un nouvel abri de jardin à construire.
Le panneau doit avoir une taille de $250\,\text{dm}^2$ pour couvrir les besoins en électricité. Le système de fixation demande de prévoir une bande libre de $2\,\text{dm}$ de part et d'autre du panneau dans une direction et de $5\,\text{dm}$ dans la direction perpendiculaire (voir figure).

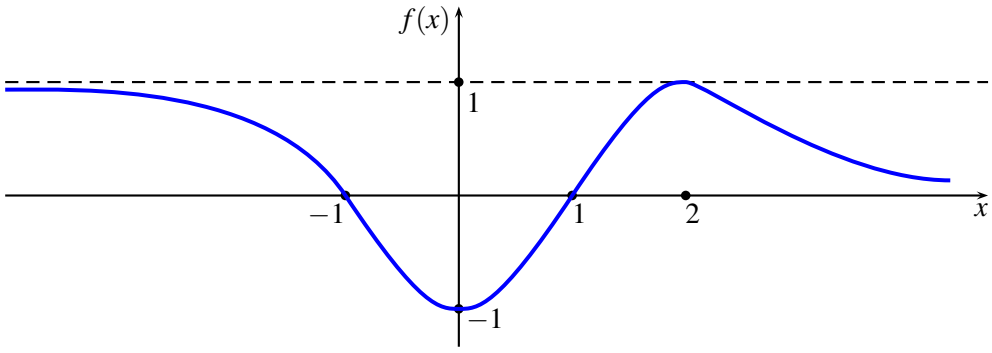


N.B. Le dessin n'est pas réalisé à l'échelle.

Quelles sont les dimensions a et b à prévoir pour le toit de l'abri si on souhaite que l'aire de la toiture soit minimale ? Que vaut cette aire minimale ?

Question II

On donne le graphique d'une fonction f. On s'intéresse à la primitive F de cette fonction telle que $F(-1) = 0$.



i. Donnez l'expression de F en fonction de f.

ii. Déterminez le domaine de la fonction F.

iii. Déterminez les caractéristiques de croissance/décroissance et les éventuels extrema de la fonction F.

iv. Étudiez la concavité du graphique de F et la présence d'éventuels points d'inflexion.

v. Résumez vos observations dans un tableau de variations et esquissez le graphique de F.

Tournez la page.

Question III

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d_1, passant par les points A et B respectivement de coordonnées $(3,4,4)$ et $(-1,0,2)$, et la droite d_2, passant par les points C et D respectivement de coordonnées $(0,1,7)$ et $(4,-1,3)$.

i. Déterminer une équation cartésienne du plan Π parallèle à la droite d_1 et contenant la droite d_2.

ii. Déterminer des équations paramétriques et des équations cartésiennes de la droite d_3 passant par C et orthogonale à d_1 et d_2.

Question IV

On reprend les éléments de la question III. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère donc la droite d_1, passant par les points A et B respectivement de coordonnées $(3,4,4)$ et $(-1,0,2)$, et la droite d_2, passant par les points C et D respectivement de coordonnées $(0,1,7)$ et $(4,-1,3)$.

i. Déterminer un point P_1 de d_1 et un point P_2 de d_2 tels que le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ soit orthogonal à d_1 et à d_2.

ii. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le milieu du segment $[P_1P_2]$ et orthogonal à celui-ci.

Avertissement. **Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Chaque candidat(e) est libre d'adopter la méthode qu'il/elle souhaite, pour autant que celle-ci soit correctement justifiée.**

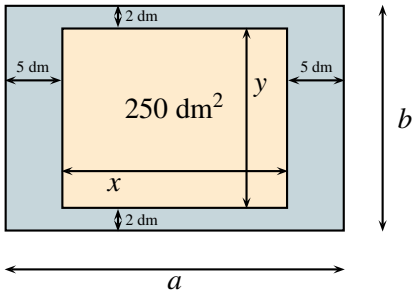
Question I

Notant x et y les dimensions du panneau exprimées en dm, la contrainte sur l'aire de celui-ci s'exprime par

$$xy = 250$$

ce qui permet d'éliminer la variable y au profit de la variable x selon

$$y = \frac{250}{x}$$



Les dimensions du toit sont liées à celle du panneau par les relations

$$a = x + 10, \qquad b = y + 4$$

de sorte que l'aire du toit à minimiser s'écrit

$$A(x) = a\,b = (x+10)(y+4) = (x+10)\left(\frac{250}{x}+4\right) = 4x + 290 + \frac{2500}{x}$$

Pour étudier les variations de A et identifier les éventuels extrema, on calcule

$$A'(x) = 4 - \frac{2500}{x^2} = \frac{4x^2 - 2500}{x^2}$$

Les points stationnaires sont les solutions de

$$4x^2 = 2500$$

soit $x = \pm 25$. Le seul point stationnaire qui a un sens dans ce problème est donc $x_\star = 25$.

L'étude du signe de A' peut être menée à partir du tableau suivant :

x	0		$x_\star$		$+\infty$
A'		$-$	0	$+$	
A		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Ceci montre que l'aire est décroissante à gauche de $x_\star$ et croissante à droite. La fonction A présente donc un minimum global pour $x = x_\star$. L'aire correspondante est de 490 dm^2.

En conclusion, les dimensions optimales du panneau photovoltaïque sont $x = 25$ dm et $y = 10$ dm, ce qui correspond à un toit de dimensions

$$a = x + 10 = 35 \text{ dm} \quad \text{et} \quad b = y + 4 = 14 \text{ dm}$$

Commentaires :

Pour répondre à un problème d'optimisation (avec les outils disponibles en sortant de l'enseignement secondaire), il convient d'exprimer la grandeur à minimiser (ou à maximiser) en fonction d'une seule variable. Ici, l'aire devait donc être exprimée en fonction de la largeur du toit, de sa longueur ou d'une des dimensions du panneau photovoltaïque en exploitant les contraintes du problème pour éliminer les autres variables. Ce n'est qu'à partir de ce moment qu'on peut rechercher les extrema parmi les points qui annulent la dérivée de la fonction correspondante.
Ce faisant, il convient d'être attentif aux différents éléments ci-dessous qui expliquent la plus grande partie des erreurs relevées dans la correction.

- *Il ne faut pas confondre la fonction à minimiser et celle qui exprime la contrainte entre les variables du problème.*
- *Quand on étudie les variations d'une fonction comme $A(x)$ ou qu'on tente d'en identifier les points stationnaires, on ne peut ignorer le dénominateur de cette fonction, même si celui est supérieur ou égal à 0. Enlever le dénominateur d'une fonction revient à en modifier totalement le comportement.*
- *Lors de l'étude du signe de la dérivée, on ne peut pas exclure du tableau de signe le pôle de la dérivée : sa présence est nécessaire pour exprimer que la fonction n'est pas définie en ce point et pour en comprendre les variations. Il est également conseillé de factoriser la dérivée avant d'en étudier le signe.*
- *Trouver un zéro de la dérivée d'une fonction ne permet pas d'affirmer que cette fonction admet un minimum en ce point. Il faut montrer que la fonction est décroissante avant et croissante après (ou que la dérivée seconde en ce point est strictement positive).*
- *Au-delà des développements mathématiques utilisés pour faire apparaître les variations de la grandeur étudiée, il faut tenir compte de la nature des variables utilisées et, le cas échéant, exclure les solutions mathématiques qui n'ont pas de sens physique. Par exemple, on doit rejeter les valeurs négatives d'une variable si celle-ci désigne une longueur.*
- *Un nombre significatif d'étudiants résolvent sans difficulté le problème mais ne calculent pas l'aire minimale du toit ou ne citent pas toutes les dimensions demandées. Quand on termine la rédaction d'une réponse, il est utile de relire la(les) question(s) pour s'assurer qu'on a bien fourni tous les éléments attendus.*

Question II

i. Puisque la fonction F recherchée est une primitive de la fonction f dont le graphique est présenté dans l'énoncé, on a

$$F' = f$$

ou

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C$$

où C désigne une constante.

La condition $F(-1) = 0$ permet de préciser la valeur de C. En exprimant cette condition, il

vient

$$F(-1) = \int_{x_0}^{-1} f(t)dt + C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = -\int_{x_0}^{-1} f(t)dt$$

Dès lors,

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{-1} f(t)dt = \int_{-1}^{x} f(t)dt$$

ii. Puisque f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F est également définie sur $\mathbb{R}$.

iii. La croissance/décroissance de F peut être étudiée à partir du signe de sa dérivée $F' = f$. En se basant sur le graphique de f donné dans l'énoncé, on peut établir le tableau des variations suivant :

x		-1		1	
$F' = f$	$+$	0	$-$	0	$+$
F	$\nearrow$	Max.	$\searrow$	min.	$\nearrow$

La fonction F présente donc un maximum en $x = -1$ et un minimum en $x = 1$.

iv. De même, la concavité de F et les éventuels points d'inflexion peuvent être étudiés en considérant le signe de $F'' = f'$. Celui-ci peut être déduit de l'observation de la croissance/décroissance de f dont le graphique est présenté dans l'énoncé. On a

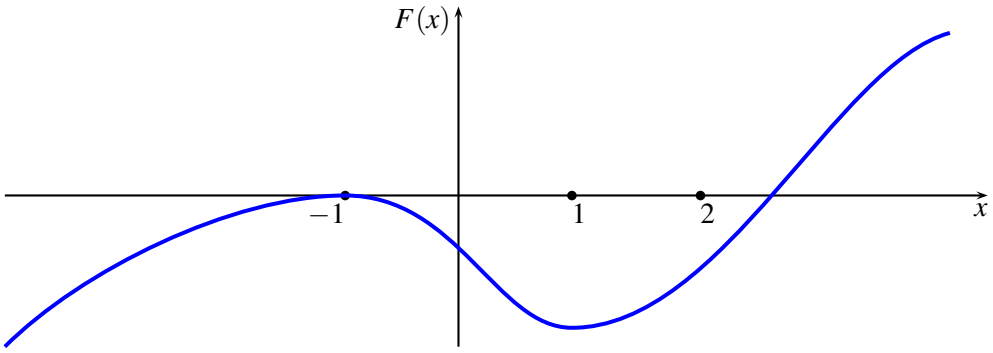
x		0		2	
f	$\searrow$	min.	$\nearrow$	Max.	$\searrow$
$f' = F''$	$-$	0	$+$	0	$-$
F	$\frown$	P.I.	$\smile$	P.I.	$\frown$

La concavité changeant de part et d'autre de $x = 0$ et $x = 2$, la fonction F présente des points d'inflexion en ces abscisses.

v. Les propriétés de la fonction F peuvent être résumées dans le tableau suivant.

x		-1		0		1		2	
F'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
F''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
F	$\nearrow$	Max.	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	min.	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
	$\frown$	$\frown$	$\frown$	P.I.	$\smile$	$\smile$	$\smile$	P.I.	$\frown$

Ces informations permettent d'esquisser le graphe de la fonction F comme suit :



Commentaires : *Cette question n'était certes pas classique mais était tout à fait abordable à condition de bien comprendre le rapport entre une fonction et sa primitive. Il suffisait en effet d'appliquer la procédure habituellement utilisée pour étudier les variations d'une fonction (par l'étude des zéros et du signe des dérivées premières et secondes) en tenant compte du fait que $F' = f$.*

Beaucoup d'étudiants ont essayé de déterminer l'expression d'une fonction f dont le graphique correspond à celui donné dans l'énoncé. Si les résultats obtenus de cette façon pourraient être corrects (à condition d'identifier une fonction dont toutes les caractéristiques correspondent à celles pouvant être identifiées sur le graphique), ils ne sont pas généraux car ils ne permettent pas de montrer que les comportements de F ainsi identifiées sont ceux de toutes les fonctions répondant aux contraintes. Il convenait d'adopter une démarche tout à fait générale.

Au-delà de cette approche particulière, les problèmes et erreurs les plus fréquemment rencontrés sont les suivants.

- *La notation de la primitive est parfois approximative. Une écriture du type*
$$F(x) = \int f$$
n'a pas de sens.
- *Une primitive est définie à une constante additive près. Cependant, la fonction F étant entièrement définie par la donnée de sa primitive f et de la condition auxiliaire $F(-1) = 0$, la valeur de la constante devait être déterminée.*
- *Au point iii., la relation entre le signe de f et la croissance/décroissance de F aurait mérité d'être explicitée, par exemple en rappelant que $F = f'$. De même, au point iv., la relation entre la croissance de f et la concavité de F devrait être explicitée en précisant que $F'' = f'$. Donner les résultats, mêmes corrects, sans explication n'est pas satisfaisant.*
- *On notera que, avec les informations fournies, il n'était pas possible de préciser si F possède des asymptotes en $+\infty$ ou en $-\infty$.*

  En particulier, du résultat
$$\lim_{x\to+\infty} F'(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
observable sur le graphique de f, on ne peut déduire que le graphique de F présente une asymptote horizontale en $+\infty$. Pour s'en convaincre, on peut comparer les comportements au voisinage de $+\infty$ des fonctions $F_1(x) = \sqrt{x}$ et $F_2(x) = 1/x$ dont les dérivées
$$F_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad F_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
tendent toutes deux vers zéro à l'infini alors que seule la fonction F_2 possède une asymptote horizontale en $+\infty$.

  De même, le résultat
$$\lim_{x\to-\infty} F'(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$
ne permet pas d'établir l'existence d'un asymptote oblique en $-\infty$.

Question III

i. L'énoncé permet de dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs directeurs du plan Π ; à un multiple non nul près, ils ont pour composantes $(2,2,1)$ et $(2,-1,-2)$. Ces vecteurs n'étant pas parallèles et le plan contenant la droite d_2 (donc en particulier le point $C(0,1,7)$), l'équation cartésienne du plan Π peut être directement obtenue en exprimant l'annulation du déterminant

$$det\begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z-7 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ceci exprime que $P(x,y,z)$ appartient au plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont linéairement dépendants.

On a successivement

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z-7 & 1 & -2 \end{pmatrix} &= x(-4+1) - (y-1)(-4-2) + (z-7)(-2-4) \\ &= -3x+6y-6z-6+42 \\ &= -3\,(x-2y+2z-12). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'équation demandée est

$$x-2y+2z=12.$$

ii. La droite d_3 doit être orthogonale à d_1 et à d_2 ; par définition du plan Π, un vecteur directeur de d_3 est donc fourni par un vecteur normal au plan, à savoir par exemple $\mathbf{n}(1,-2,2)$. Cela étant, comme d_3 passe par $C(0,1,7)$, des équations paramétriques sont

$$\begin{cases} x = 0+r\cdot(\ \ 1) = r \\ y = 1+r\cdot(-2) = 1-2r, \qquad r\in\mathbb{R} \\ z = 7+r\cdot(\ \ 2) = 7+2r \end{cases}$$

et des équations cartésiennes sont

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-7}{2}.$$

Question IV

i. Un point P_1 appartient à la droite d_1 si et seulement si il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que les coordonnées de P_1 soient

$$P_1(-1+2t,2t,2+t).$$

De même, un point P_2 appartient à la droite d_2 si et seulement si il existe $s\in\mathbb{R}$ tel que les coordonnées de P_2 soient

$$P_2(2s,1-s,7-2s).$$

Cela étant, pour trouver s et t, il reste à exprimer que le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ est parallèle à $\mathbf{n}(1,-2,2)$ (vecteur directeur de d_3).

Avec les notations et les calculs précédents, les composantes du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ sont

$$\Big(2s+1-2t,1-s-2t,7-2s-2-t\Big) = \Big(1+2s-2t,1-s-2t,5-2s-t\Big).$$

Les vecteurs $\overrightarrow{P_1P_2}$ et $\mathbf{n}$ sont donc parallèles si et seulement si s et t vérifient le système

$$\frac{1+2s-2t}{1} = \frac{1-s-2t}{-2} = \frac{5-2s-t}{2}$$

ou encore

$$\begin{cases} -2-4s+4t = 1-s-2t \\ 2+4s-4t = 5-2s-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3s+6t = 3 \\ 6s-3t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 1. \end{cases}$$

Ils s 'ensuit que les points cherchés sont

$$P_1(1,2,3), \quad P_2(2,0,5).$$

ii. Le plan recherché ici est parallèle au plan Π; il a donc une équation cartésienne du type

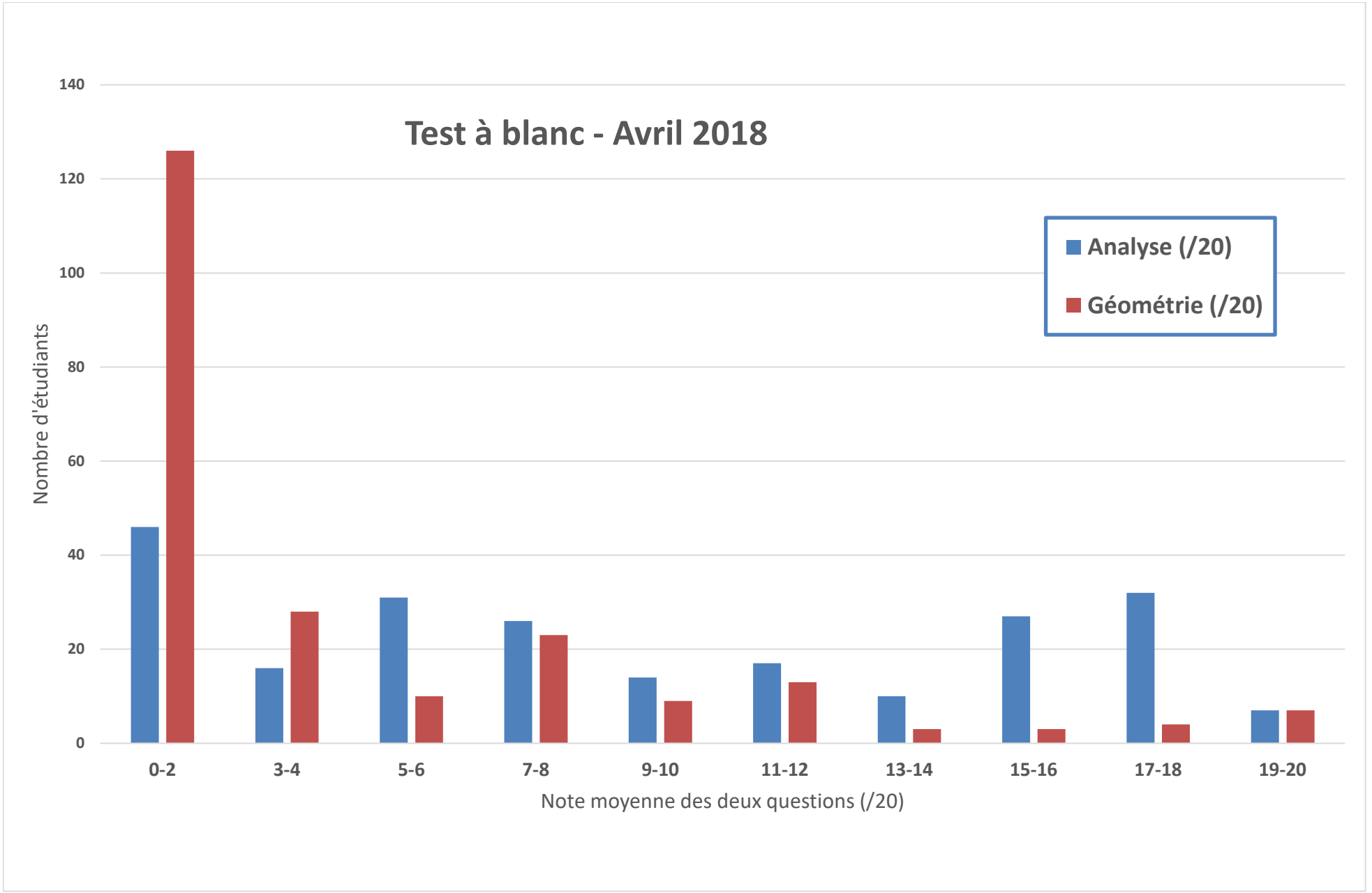
$$x-2y+2z = r$$

où r doit être déterminé. Ce plan passe par le milieu du segment joignant les points P_1 et P_2 c'est-à-dire par le point de coordonnées $(3/2,1,4)$. On a donc

$$r = \frac{3}{2} - 2 + 8 = \frac{15}{2}.$$

Une équation cartésienne du plan recherché ici est donc

$$2x-4y+4z = 15.$$


Test à blanc - Avril 2018
Analyse (/20)
Géométrie (/20)
Nombre d'étudiants
140
120
100
80
60
40
20
0
0-2
3-4
5-6
7-8
9-10
11-12
13-14
15-16
17-18
19-20
Note moyenne des deux questions (/20)