Avril 2017

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL

SIMULATION D'EXAMEN

Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chaque feuille votre nom (en caractères d'imprimerie)
et votre prénom ainsi que le numéro de la question.
Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
L'usage de la calculatrice est interdit.
L'épreuve se termine à 18 heures.

Question I

Résolvez l'équation (en nombres complexes)

$$(6z^2-1)^3 = (3z^2+1)^3\,.$$

Question II

Résolvez l'équation (dans $\mathbb{R}$)

$$\sin(3x) - \cos(2x) + \cos x = 0.$$

Présentez sur le cercle trigonométrique les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

Question III

Si α, β, γ désignent les angles d'un triangle, montrez que

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1.$$

SOLUTION TYPE ET COMMENTAIRES

Question I

On pose $Z = 3z^2$. L'équation devient :

$$(2Z-1)^3 = (Z+1)^3 .$$

On sait que $A^3 = B^3$ si et seulement si

$$\begin{cases} A = B \\ \text{ou } A = jB \\ \text{ou } A = j^2 B \end{cases}$$

avec

$$j = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \qquad \text{et} \qquad j^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

puisque 1, j et j^2 sont les trois racines cubiques de l'unité. Les trois solutions sont donc données par

i. $2Z-1 = Z+1$, d'où $Z = 2$.

ii. $2(2Z-1) = (-1+\sqrt{3}i)(Z+1)$, d'où $(5-\sqrt{3}i)Z = 1+\sqrt{3}i$.

iii. $2(2Z-1) = (-1-\sqrt{3}i)(Z+1)$, d'où $(5+\sqrt{3}i)Z = 1-\sqrt{3}i$.

En utilisant les égalités

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2},$$

on récrit le triplet de solutions en :

$$Z \in \left\{2,\ \frac{1+3\sqrt{3}i}{14},\ \frac{1-3\sqrt{3}i}{14}\right\},\ \text{ d'où } z^2 \in \left\{\frac{2}{3},\ \frac{1+3\sqrt{3}i}{42},\ \frac{1-3\sqrt{3}i}{42}\right\}.$$

Si b est positif, les solutions (x,y) de $\ a \pm bi = (x \pm yi)^2\ $ sont

$$\left(\sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}+a]/2}, \sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}-a]/2}\right) \quad \text{et} \quad \left(-\sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}+a]/2}, -\sqrt{[\sqrt{a^2+b^2}-a]/2}\right);$$

cela permet d'énumérer les six solutions de l'équation initiale comme suit :

i. $z = \sqrt{6}/3$ et $z = -\sqrt{6}/3$,

ii. $z = \dfrac{\sqrt{42\sqrt{7}+21}}{42} + \dfrac{\sqrt{42\sqrt{7}-21}}{42}i$ et $z = -\dfrac{\sqrt{42\sqrt{7}+21}}{42} - \dfrac{\sqrt{42\sqrt{7}-21}}{42}i$,

iii. $z = \dfrac{\sqrt{42\sqrt{7}+21}}{42} - \dfrac{\sqrt{42\sqrt{7}-21}}{42}i$ et $z = -\dfrac{\sqrt{42\sqrt{7}+21}}{42} + \dfrac{\sqrt{42\sqrt{7}-21}}{42}i$.

Remarques.

- L'approche ci-dessus ramène le calcul de Z à la résolution de trois équations du premier degré. On pouvait aussi utiliser l'identité $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$ pour factoriser le polynôme $(2Z-1)^3 - (Z+1)^3$ en le produit $(Z-2)(7Z^2-Z+1)$; il reste alors à résoudre l'équation du second degré $7Z^2 - Z + 1 = 0$.
- Nous avons respecté une ancienne habitude consistant à éviter les radicaux au dénominateur, ce qui amène à écrire, par exemple, $\sqrt{6}/3$ au lieu de $\sqrt{2}/\sqrt{3}$. Avant les calculatrices modernes, la première forme était plus facile à évaluer numériquement que la seconde. Actuellement, cet usage n'est plus guère justifié.

Commentaires et erreurs à éviter.

i. Certains étudiants ont d'emblée simplifié l'équation proposée en

$$6z^2 - 1 \;=\; 3z^2 + 1$$

Ceci est autorisé et opportun dans l'ensemble des réels mais pas dans celui des complexes.

ii. Beaucoup d'étudiants se sont lancés dans des calculs fastidieux et inutiles. Il convient de se fixer une stratégie de résolution du problème posé avant d'effectuer le moindre calcul.

iii. Les erreurs de calcul sont trop fréquentes. S'il est peu réaliste de prétendre toujours les éviter, il faut quand même observer que leur repérage est souvent facile. Par exemple, des calculs erronés ont fréquemment conduit à proposer 0 comme solution de l'équation, alors que, pour $z = 0$, l'équation proposée se réduit à l'égalité fausse $-1 = 1$. De même, la décomposition

$$(2Z-1)^3 - (Z+1)^3 \;=\; (Z-2)(7Z^2 - Z + 1)$$

a fréquemment donné lieu à des erreurs dans le trinôme du second degré, alors que des tests pour des valeurs simples de Z (par exemple, $-1, 0, 1, 2$) permettent de détecter quasi à coup sûr ce type d'erreur.

iv. Dans l'ensemble des réels, si a est un nombre non nul, la notation $\sqrt[p]{a}$ est toujours autorisée si l'entier positif p est impair ; elle désigne un seul nombre, du même signe que a. Si p est pair, la notation est autorisée si a est positif ; elle désigne alors l'unique solution positive de l'équation $x^p = a$. Dans l'ensemble des complexes, en algèbre, la notation $\sqrt[p]{a+bi}$ n'est pas autorisée car l'équation $z^p = a + bi$ admet p solutions et il n'existe pas de convention permettant de déterminer laquelle serait représentée par cette notation. En bref, le symbole i ne doit jamais apparaître sous le signe radical ; si a est un réel négatif, la notation $\sqrt[p]{a}$ est autorisée pour p impair seulement.

v. Certaines copies sont quasi illisibles ! Le temps prévu doit largement suffire et être mis à profit pour produire une copie claire, complète, vérifiée et bien lisible.

Question II

Il n'y a pas de conditions d'existence à préciser puisque toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. A

En utilisant la formule de factorisation de la différence de cosinus, on peut réécrire l'équation en factorisant les deux derniers termes , comme B

$$\sin(3x) - 2\sin(\frac{3x}{2})\sin(-\frac{x}{2}) = 0.$$

En posant $u = \frac{3}{2}x$ et en utilisant le fait que $\sin(2u) = 2\sin u \cos u$, il vient C

$$2\sin(\frac{3x}{2})\cos(\frac{3x}{2}) - 2\sin(\frac{3x}{2})\sin(-\frac{x}{2}) = 0,$$

ce qui, en mettant $\sin(\frac{3x}{2})$ en évidence et en divisant par 2, devient D

$$\sin(\frac{3x}{2})\left(\cos(\frac{3x}{2}) + \sin(\frac{x}{2})\right) = 0.$$

En annulant chacun des facteurs, on trouve des solutions potentielles. On a donc soit $\sin(\frac{3x}{2}) = 0$ qui admet comme solutions $\frac{3x}{2} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire $x = \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ soit E

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{3x}{2}) + \sin(\frac{x}{2}) &= 0 \\
\cos(\frac{3x}{2}) &= \sin(-\frac{x}{2}) \\
\cos(\frac{3x}{2}) &= \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}),
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{F}}$

ce qui admet comme solutions

$$\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad &\text{ou} \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad &\text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{G}}$ $\boxed{\text{H}}$

L'ensemble des solutions s'écrit donc

$$\left\{\frac{2}{3}k_1\pi, \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi, -\frac{\pi}{4} + k_3\pi \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Les solutions appartenant à $[-\pi, \pi[$ sont $\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\}$ et sont représentées à la Figure 1. $\boxed{\text{I}}$

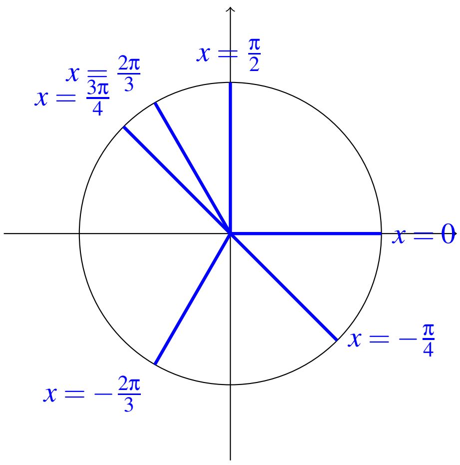

FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

Remarque.

Pour la correction, $\boxed{\text{A}}$ vaut 1 point, les items $\boxed{\text{B}}$ à $\boxed{\text{H}}$ valent chacun 2 points.

Le cercle trigonométrique $\boxed{\text{I}}$ est évalué sur 5 points.

Commentaires et erreurs à éviter.

i. Pour toute équation, il faut toujours poser les conditions d'existence.
Dans le cas de la question 2, les conditions d'existence sont triviales. Il ne faut néanmoins pas omettre de les préciser ($x \in \mathbb{R}$).

ii. Quelques étudiants obtiennent la forme

$$\sin(\frac{3x}{2})\cos(\frac{3x}{2}) = \sin(\frac{3x}{2})\sin(-\frac{x}{2}).$$

On ne peut pas simplifier $\sin(\frac{3x}{2})$ des deux côtés. Au contraire, $\sin(\frac{3x}{2}) = 0$ fournit une famille de solutions.

iii. Quand on résout $\cos(\frac{3x}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2})$, une erreur fréquente est d'oublier une famille de solutions.
Pour rappel, si on cherche à identifier $\cos x = \cos y$, on a $x = y + 2k\pi$ ou $x = -y + 2k\pi$.
Si on cherche à identifier $\sin x = \sin y$, on a $x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$.
Dans le même ordre d'idée, un conseil est d'éviter d'écrire $x = \pm y + 2k\pi$ qui tend à ne pas écrire correctement les deux familles de solutions. Dans le cas de l'exercice présent, comme on obtient une équation, les deux familles doivent bien être distinctes.

iv. Par contre, lorsque l'on résout $\sin(\frac{3x}{2}) = 0$, les deux familles peuvent s'écrire en une seule ligne, ce qui tend à simplifier la notation.
On aura donc, $\frac{3x}{2} = k\pi$, ce qui se réécrit comme $x = \frac{2}{3}k\pi$.

Pour rappel,quand on résout $\sin x = 0$, on a $x = k\pi$ et pour $\cos y = 0$, on a $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

v. Il faut soigner la représentation du cercle trigonométrique. On demande les solutions comprises dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$. Il est donc important de
- préciser les **valeurs** reportées sur le cercle trigonométrique,
- préciser des valeurs comprises dans l'intervalle $[\pi, \pi[$ et non pas dans $[0, 2\pi[$ ou un autre intervalle comme certains le font,
- préciser des valeurs en **radians** (et non en degrés),
- ne pas oublier de valeurs (comme 0 par exemple).

Représenter un cercle trigonométrique cohérent par rapport aux solutions trouvées (même si celles-ci ne sont pas correctes) est également important.

Question III

Solution a

Les conditions d'existence impliquent que $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$.. A

Pour simplifier la notation, on pose $a = \frac{\alpha}{2}$, $b = \frac{\beta}{2}$, $c = \frac{\gamma}{2}$. Le membre de gauche de l'équation s'écrit donc

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + 2\sin a \sin b \sin c.$$

Au vu des hypothèses, nous savons que $a + b + c = \frac{\pi}{2}$. Dès lors, nous pouvons remplacer dans le membre de gauche de l'équation $c = \frac{\pi}{2} - a - b$. B
De plus, en utilisant le fait que $\sin(\frac{\pi}{2} - a - b) = \cos(a + b)$, le membre de gauche s'écrit

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \cos^2(a + b) + 2\sin a \sin b \cos(a + b).$$

Nous utilisons à présent la formule additive du cosinus, à savoir $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. C
Le membre de gauche s'écrit maintenant

$$\begin{aligned}\sin^2 a + \sin^2 b + \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b - 2\cos a \cos b \sin a \sin b \\ + 2\sin a \sin b \cos a \cos b - 2\sin a \sin b \sin a \sin b,\end{aligned}$$

ce qui se simplifie, en observant que le dernier terme vaut $-2\sin^2 a \sin^2 b$, en

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b.$$

Nous utilisons à présent le fait que $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ et $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b$. Nous obtenons donc D

$$\sin^2 a + \sin^2 b + (1 - \sin^2 a)(1 - \sin^2 b) - \sin^2 a \sin^2 b$$

E

En développant, on obtient

$$\sin^2 a + \sin^2 b + 1 - \sin^2 a - \sin^2 b + \sin^2 a \sin^2 b - \sin^2 a \sin^2 b$$
$$= 1,$$

ce qui démontre le résultat. $\square$

F

Solution b

Alternativement, on peut utiliser la relation $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$, tout en notant que $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ et en utilisant le fait que $\cos(\pi - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta)$. Le membre de gauche devient alors :

$$\frac{3}{2} - \frac{\cos\alpha}{2} - \frac{\cos\beta}{2} + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{2} + 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Suivant une logique similaire, le dernier terme du membre de gauche est transformé en utilisant le relation $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, tout en notant que $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}$ et en utilisant le fait que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Le membre de gauche devient finalement :

$$\frac{3}{2} - \frac{\cos\alpha}{2} - \frac{\cos\beta}{2} + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{2} + \left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Nous utilisons ensuite la formule de factorisation $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ qui donne, après distribution sur le dernier terme :

$$\frac{3}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Après simplification et en utilisant la relation $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, il vient :

$$\frac{3}{2} + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{3}{2} + \frac{2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

Ce qui démontre le résultat.

Commentaires et erreurs à éviter.

i. Pour toute identité, veillez à énoncer les conditions d'existence si il y en a. Dans le cas où vous multipliez ou divisez les deux membres de l'identité par une même expression, n'oubliez pas d'énoncer les conditions d'existence correspondantes.

ii. Beaucoup d'étudiants se trompent en simplifiant l'expression $\sin\left(\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}\right)$ et obtiennent l'expression $\sin\left(\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ qui est différente de la réponse correcte $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

iii. Montrer que l'identité est vérifiée pour des valeurs particulières des angles α, β et γ ne permet pas d'affirmer que cette identité est vérifiée pour l'ensemble des valeurs possibles de ces angles !

iv. Le manque de soin dans l'écriture des différents développements génère de nombreuses erreurs. Plus précisément, il faut prendre soin d'aligner les barres de fraction correctement et de bien recopier les développements d'une ligne à l'autre.

v. N'oubliez pas de mentionner les relations trigonométriques de base utilisées qui, en cas d'erreur(s) dans vos développements, nous permettent de mieux comprendre votre raisonnement.