UNIVERSITE DE LIEGE

Faculté des Sciences Appliquées

QUESTIONS POSEES AUX EXAMENS D'ADMISSION

2013 - 2017

EXAMENS DE 2013

JUILLET 2013

ALGEBRE

1. Soit un polynôme à coefficients réels $P(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $c < 0 < a$.
   a) Prouver que le discriminant $\Delta_P = b^2 - 4ac$ est strictement positif et que le polynôme admet deux racines réelles u et v telles que $u < 0 < v$.
   b) Soit $e = \frac{v}{2}$ et $Q(x) = -x^2 P(e + \frac{1}{x}) = a'x^2 + b'x + c'$.
   Etablir que $c' < 0 < a'$ et $\Delta_Q = \Delta_P$.
   c) Pour quelles valeurs de $e \in \{0, \frac{u}{3}, \frac{u+v}{4}, -\frac{b}{10a}, \sqrt{-u}, \sqrt{v}, \sqrt{-uv}\}$ le point b) reste-t-il vrai ?

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante, dans laquelle a est un paramètre réel :

$$a + \sqrt{x-a} \leq \frac{x}{a - \sqrt{x-a}}$$

   Quand a-t-on l'égalité ?

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant, dans lequel m est un paramètre complexe :

$$\begin{cases} mx + y = -i \\ ix + (im+2)y = -m \end{cases}$$

   Pour quelles valeurs de m le système admet-il au moins une solution (x, y) telle que $x, y \in \mathbb{R}$?

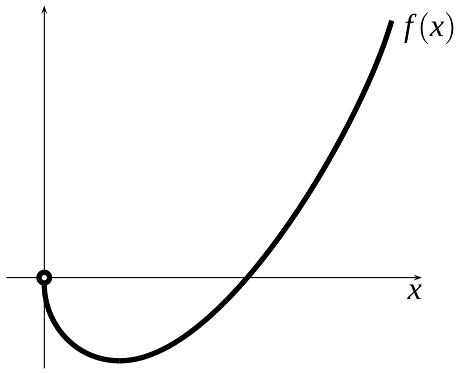
ANALYSE

1. Soit la fonction

$$f(x) = x^{\alpha} \ln x$$

   a) En considérant d'abord le cas $\alpha = 2$,
      i. déterminer le domaine de définition de f ;
      ii. déterminer les éventuelles asymptotes du graphe de f ;
      iii. étudier la croissance/décroissance de f et caractériser les éventuels extrema ;
      iv. étudier la concavité du graphe et situer les éventuels points d'inflexion ;
      v. esquisser le graphe de f.

   b) Dans un cas plus général, déterminer toutes les valeurs entières du paramètre α pour lesquelles le graphe de f présente l'allure ci-dessous. Justifier.



2. Déterminer les dimensions (rayon de la base R et hauteur h) d'une canette, assimilée à un cylindre parfait, devant contenir un volume V donné et pouvant être réalisée en utilisant le minimum d'aluminium, c'est-à-dire présentant l'aire totale minimale. Justifier.
   Que vaut l'aire minimale ?

3. a) Calculer les trois intégrales suivantes :

$$\text{i)} \quad \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \qquad \text{ii)} \quad \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \qquad \text{iii)} \quad \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x\,dx$$

b) Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{\sin x + \cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1}$$

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Vérifier l'identité suivante :

$$\frac{\sin 2a + \sin 5a - \sin a}{\cos 2a + \cos 5a + \cos a} = \operatorname{tg} 2a$$

2. Résoudre l'équation suivante *sans calculatrice* :

$$\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0$$

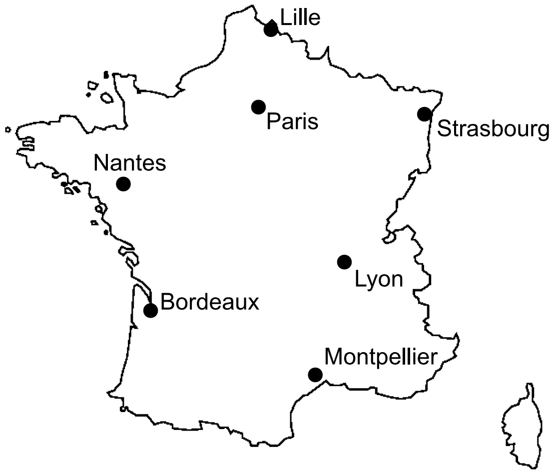
3. Démontrer que, si dans un triangle l'identité suivante est vérifiée,

$$\frac{1}{\sin\beta} + \operatorname{cotg}\beta = \frac{a+c}{b}$$

alors ce triangle est rectangle (a, b et c désignent les longueurs des côtés opposés aux angles α, β et γ respectivement).

4. On connaît les distances ci-dessous entre les villes ainsi que leur situation géographique. On suppose une Terre plane.

Calculer la longueur à vol d'oiseau du parcours du tour de France partant de Paris et passant successivement par les villes de Lille, Strasbourg, Lyon, Montpellier, Bordeaux, Nantes et Paris. Utiliser 4 chiffres après la virgule dans les calculs.



Paris - Lille	200 km
Nantes - Lille	505 km
Montpellier - Lille	780 km
Paris - Strasbourg	400 km
Strasbourg - Nantes	713 km
Paris - Lyon	394 km
Nantes - Lyon	518 km
Paris - Montpellier	596 km
Paris - Bordeaux	500 km
Strasbourg - Bordeaux	761 km
Paris - Nantes	343 km

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

Résoudre trois des cinq questions suivantes.

1. Par un point P intérieur à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, on trace deux droites perpendiculaires. Les intersections de ces droites avec $\mathcal{C}$ forment les sommets d'un quadrilatère convexe $ABCD$.

   a) Démontrer que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont supplémentaires.

   b) Par les points A, B, C et D, on mène quatre tangentes à $\mathcal{C}$, qui forment les côtés d'un nouveau quadrilatère convexe. Démontrer que ce quadrilatère est inscriptible.

2. On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et on considère trois points A, B et C de ce cercle tels que A et B sont fixés et diamétralement opposés. On construit alors le point D de telle sorte que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CB}$ soient égaux. On demande de

   a) trouver le lieu du point D lorsque C parcourt $\mathcal{C}$;

   b) trouver le lieu du point M, défini comme l'intersection des droites AC et OD, lorsque C parcourt $\mathcal{C}$.

   (Dans les deux cas, on demande de décrire avec précision la nature du lieu.)

3. Dans un triangle ABC, on note respectivement A', B' et C' les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Démontrer que, si les droites AA' et BB' sont perpendiculaires, alors on a

$$|AA'|^2+|BB'|^2=|CC'|^2,$$

où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.

4. On se place dans un repère orthonormé de l'espace. On donne les droites $d_1,\ d_2,\ d_3$ par les équations cartésiennes suivantes, a et b étant des réels non simultanément nuls :

$$d_1 \left\{ \begin{array}{l} y=0 \\ z=x \end{array} \right. \qquad d_2 \left\{ \begin{array}{l} y=2 \\ z=1-x \end{array} \right. \qquad d_3 \left\{ \begin{array}{l} y=1 \\ ax+bz=1 \end{array} \right.$$

On considère alors une droite d incluse dans un plan d'équation $z=\lambda$, où λ est un paramètre réel, telle que d s'appuie à la fois sur d_1 et sur d_2. On demande de

a) donner des équations cartésiennes de d, en fonction des données et du paramètre λ;

b) déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles d s'appuie sur la droite d_3.

5. a) Démontrer que, si un point P de l'espace est équidistant de deux droites sécantes en un point A, alors les projections orthogonales de P sur ces deux droites sont équidistantes de A.

b) En déduire que si les six arêtes d'un tétraèdre $ABCD$ sont tangentes à une même sphère, alors on a

$$|AB|+|CD|=|AC|+|BD|=|AD|+|BC|$$

où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.

SEPTEMBRE 2013

ALGEBRE

1. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} (a-1)x+(a-2)y+az=2a+1 \\ ax+2az=6a-2 \\ x+(2-a)y+az=4a-3 \end{cases}$$

2. Soit P le polynôme

$$P(x) \ = \ x^4-6x^3+14x^2+\alpha x+\beta$$

   Calculer les nombres α et β ainsi que les quatre racines de P, sachant que la somme de deux des racines vaut 2 et que le produit des deux autres racines vaut 3.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

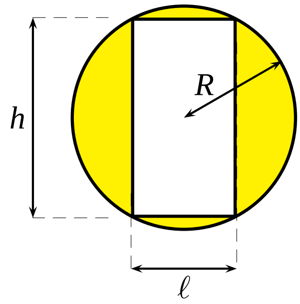
$$\log_2(x+1)+4\log_4(x)<1$$

ANALYSE

1. On considère la famille de fonctions

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x^{2\beta}}{1-x}$$

   où β désigne un paramètre entier strictement positif.
   En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de β,
   a) déterminer le domaine de définition de f ;
   b) déterminer les éventuelles asymptotes du graphe de f ;
   c) étudier la croissance/décroissance de f, déterminer et caractériser les éventuels extrema ;
   d) esquisser le graphe de f.



2. La résistance en flexion r d'une poutre de section rectangulaire est proportionnelle au produit de la largeur ℓ de la poutre et du carré de sa hauteur h, *i.e.*
$$r = \gamma\, \ell\, h^2$$
où γ est une constante strictement positive.
Déterminer les dimensions (ℓ et h) de la section de la poutre pouvant être découpée dans un tronc d'arbre (parfaitement circulaire) de rayon R et présentant la résistance la plus grande.

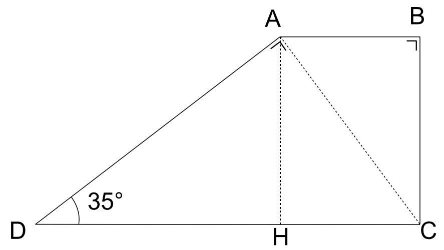
3. a) Calculer les deux intégrales suivantes :
$$\text{i)} \quad \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \qquad\qquad \text{ii)} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$$
b) Calculer les trois primitives suivantes :
$$\text{i)} \quad \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx \qquad\qquad \text{ii)} \quad \int x \sin x \, dx \qquad\qquad \text{iii)} \quad \int \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}}\, dx$$

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Vérifier l'identité et préciser les conditions d'existence :
$$\frac{\operatorname{tg}(a+b)+\operatorname{tg}(a-b)}{\operatorname{tg}(a+b)-\operatorname{tg}(a-b)} = \frac{\operatorname{tg} a\left(1+\operatorname{tg}^2 b\right)}{\operatorname{tg} b\left(1+\operatorname{tg}^2 a\right)}$$

2. Vérifier l'identité et préciser les conditions d'existence :
$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a \cos a - \sin b \cos b}$$

3. Un des angles d'un trapèze rectangle $ABCD$ vaut $35°$. La plus petite diagonale vaut 7 centimètres et est perpendiculaire au côté oblique. Calculer le périmètre et l'aire du trapèze. Utiliser 4 chiffres derrière la virgule dans les calculs.



4. Soit l'équation suivante

$$\sqrt{2\operatorname{tg} x+1}=\frac{2}{\cos^2 x}-2\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x$$

   a) Donner les conditions d'existence.
   b) Résoudre l'équation.
   c) Tracer les solutions entre $[0,2\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

Résoudre trois des cinq questions suivantes.

1. On considère un triangle PQR non isocèle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$. Démontrer que la bissectrice de l'angle $\widehat{P}$ et la médiatrice du côté $[QR]$ se coupent en un point appartenant à $\mathcal{C}$.

2. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $y=ax^2$ (où a est un réel non nul donné). On donne aussi le point $P_0(x_0,y_0)$, différent de l'origine des axes. On note alors $\mathcal{P}_0$ la parabole obtenue en translatant $\mathcal{P}$ de telle sorte que le sommet de $\mathcal{P}_0$ coïncide avec le point P_0.

   a) Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{P}_0$.
   b) On considère les droites d passant par l'origine $(0,0)$. On demande de trouver le lieu des milieux des segments dont les extrémités sont les intersections de d et de $\mathcal{P}_0$.

3. On considère deux points A et B appartenant à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et un point P situé sur la droite AB. Démontrer l'égalité

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \ell^2 - r^2,$$

   où ℓ et r désignent respectivement la longueur du segment $[PO]$ et le rayon de $\mathcal{C}$.

4. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne le plan Π d'équation cartésienne $ax+by+cz=2$, où a,b,c sont des réels non simultanément nuls, et on donne également les points

$$A(2,0,0), \quad B(0,2,0), \quad C(1,1,0), \quad D(0,0,1).$$

   Déterminer les valeurs possibles de a,b,c pour que Π passe par C et D et qu'il soit équidistant de A et B.

5. On note d_1, d_2 et d_3 trois droites parallèles de l'espace distinctes et non coplanaires, et π, π' et π'' trois plans sécants à ces droites. Les points de percée de d_1 dans π, π' et π'' sont respectivement notés A, A' et A''. De même, les points de percée de d_2 et d_3 dans ces plans sont respectivement notés B, B', B'' et C, C', C''. Démontrer que les centres de gravité des triangles ABC, $A'B'C'$ et $A''B''C''$ sont alignés.

EXAMENS DE 2014

Avertissement

Les modalités de l'examen sont modifiées : chaque épreuve écrite se trouve réduite à une durée de 2h30.

JUILLET 2014

ALGEBRE

1. Pour quelles valeurs du paramètre réel m le polynôme

$$X^2 + (2m-1)X + m^2$$

admet-il deux racines positives dont l'une est le triple de l'autre ? Quelles sont les racines ?

2. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(x-1)\sqrt{x+4} < 2-4x$$

ANALYSE

1. La fonction th, appelée tangente hyperbolique, est définie par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

Déterminer le domaine de définition de la fonction th, ses éventuelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema et points d'inflexion de son graphe. Sur base des résultats obtenus, esquisser le graphe de $\mathrm{th}(x)$.

2. On considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

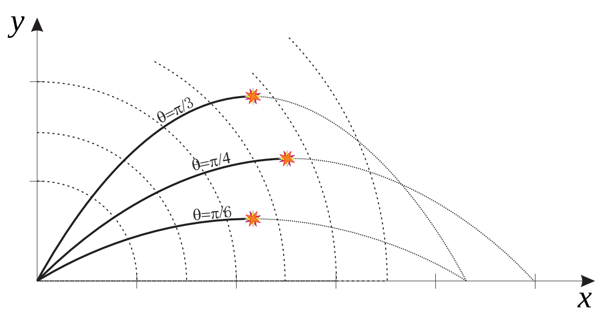
   a) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_4.
   b) Montrer que

$$I_n = f(n) - I_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

   où $f(n)$ est une fonction de n à déterminer.

3. Une base de tir se trouve à l'origine du plan (x, y). Un missile est lancé au temps $t = 0$ avec une vitesse initiale v_0 et une inclinaison d'angle θ par rapport à l'horizontale. La trajectoire du missile est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\theta \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases}$$



   Ce missile a la particularité d'exploser lorsqu'il atteint sa hauteur maximale dans le ciel.

   a) Déterminer (en fonction de v_0, g et θ) le moment $t^\star$ auquel le missile explose.
   b) Déterminer (en fonction de v_0 et g) l'angle $\theta^\star$ qui permet de maximiser la distance entre la base de tir et l'endroit de l'explosion. Que vaut la distance maximale ?

   Justifier chacun des résultats obtenus. Les constantes v_0 et g sont strictement positives et $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

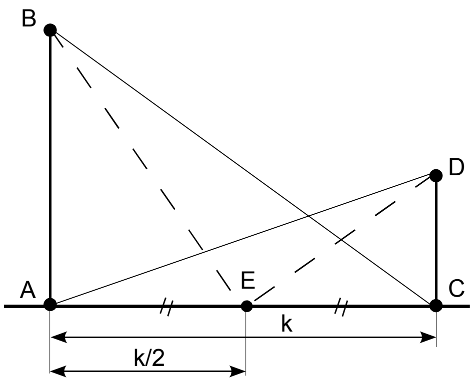
TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Montrer que

$$\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$$

2. Résoudre l'équation
$$\cos 3x + \cos 7x = 1 + \cos 10x$$
Représenter les solutions entre 0 et 2π sur le cercle trigonométrique.

3. Deux églises sont situées de part et d'autre d'une place horizontale. Les clochers de ces deux églises sont représentés respectivement par les segments AB et CD. Les bases de ces clochers sont séparées d'une distance k. Un observateur placé au point C voit le sommet B du clocher opposé sous un angle BCA. De même, un observateur situé au point A voit le sommet D du clocher opposé sous un angle DAC valant la moitié de l'angle BCA. La somme des angles BEA et DEC sous lesquels un observateur placé au point E voit respectivement les sommets B et D est égale à 90°. Si la distance k vaut 60 m, déterminer la hauteur des deux clochers AB et CD.



Suggestion : exprimer d'abord DC et AB en fonction de k.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Par un point P extérieur à $\mathcal{C}$, on mène deux tangentes à ce cercle, qui le rencontrent aux points de tangence Q et R.
   a) Démontrer que, dans le triangle PQR, la bissectrice issue de Q rencontre la droite OP en un point qui appartient à $\mathcal{C}$.
   b) On considère un cercle $\mathcal{C}'$ de centre extérieur à $\mathcal{C}$, et ne possédant aucun point commun avec $\mathcal{C}$.
   Si le point P parcourt le cercle $\mathcal{C}'$, le cercle $\mathcal{C}$ restant fixe, déterminer le lieu du centre du cercle inscrit au triangle PQR.

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les droites d_a et d_b par leurs équations cartésiennes

$$d_a : \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad d_b : \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels.

   a) Montrer que ces droites ne sont pas parallèles, quels que soient a et b.
   b) Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les droites soient concourantes.
   c) Sous la condition déterminée au point précédent, déterminer alors une équation du plan contenant ces droites.

SEPTEMBRE 2014

ALGEBRE

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(1+z^2)^3 = (1-z^2)^3 .$$

2. Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2})$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre réel.

a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Identifier les éventuels extrema locaux de f.
c) Identifier les éventuels points d'inflexion du graphe de f.
d) Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles f est une fonction impaire.

2. Compte tenu de la résistance de l'air, la vitesse de chute d'un corps de masse m initialement abandonné sans vitesse est donnée par

$$v = \frac{mg}{c}\left[1 - \exp\left(-\frac{ct}{m}\right)\right]$$

où g désigne l'accélération de pesanteur, t est le temps et c est le coefficient de frottement fluide. Tous les paramètres sont strictement positifs.

a) Calculer la vitesse limite de chute, soit $v_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} v$ (en considérant m, g et c fixés).
b) Calculer la vitesse de chute lorsque la résistance de l'air devient négligeable, soit $v_0 = \lim\limits_{c\to 0} v$ (en considérant m, g et t fixés).
c) Calculer la vitesse de chute d'un corps très lourd, soit $v_m = \lim\limits_{m\to+\infty} v$ (en considérant c, g et t fixés).

3. Calculer les expressions suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$
b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,dx$
c) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$
d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Montrer que

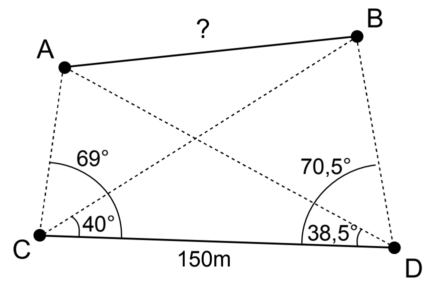
$$\sin\frac{\pi}{12}\,\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1}{4}$$

2. Montrer que, si la relation suivante liant les trois angles A, B et C d'un triangle est vérifiée :

$$\sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$$

alors, le triangle est rectangle en A.

3. Pour déterminer la distance entre 2 points inaccessibles A et B, on choisit une base d'opération CD longue de 150m et on mesure les angles $\widehat{BCD}=40^\circ$, $\widehat{ACD}=69^\circ$, $\widehat{ADC}=38.5^\circ$ et $\widehat{BDC}=70.5^\circ$. Calculer la distance AB (le dessin ci-dessous n'est pas à l'échelle !).



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On considère deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tangents en un point A, tels que $\mathcal{C}_1$ est intérieur à $\mathcal{C}_2$. Une droite issue de A rencontre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en deux points (distincts de A) notés respectivement P et Q. La tangente à $\mathcal{C}_1$ issue de P rencontre $\mathcal{C}_2$ en deux points notés R et S.

   a) Démontrer que la droite RS est parallèle à la tangente à $\mathcal{C}_2$ issue de Q.

   b) En déduire que la droite AQ est bissectrice de l'angle $\widehat{RAS}$.

2. Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole d'équation cartésienne

$$y = (x+1)^2.$$

Déterminer le lieu des milieux des cordes découpées par la parabole sur les droites comprenant l'origine des axes.

EXAMENS DE 2015

Rappel
Les modalités de l'examen sont modifiées depuis 2014 : chaque épreuve écrite se trouve réduite à une durée de 2h30.

JUILLET 2015

ALGEBRE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante
$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-1} \ \leq \ x\,.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^8-2z^4\cos a+1=0$$
dans laquelle a est un paramètre réel.

ANALYSE

1. La fonction arcth, appelée arctangente hyperbolique, peut être définie par
$$\operatorname{arcth}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$
Déterminer le domaine de définition de la fonction arcth, ses éventuelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema et points d'inflexion de son graphe. Le cas échéant, déterminer l'équation de la tangente au(x) point(s) d'inflexion.
Sur base des résultats obtenus, esquisser le graphe de $\operatorname{arcth}(x)$.

2. Calculer

   a) $\int \operatorname{tg} x \, dx$

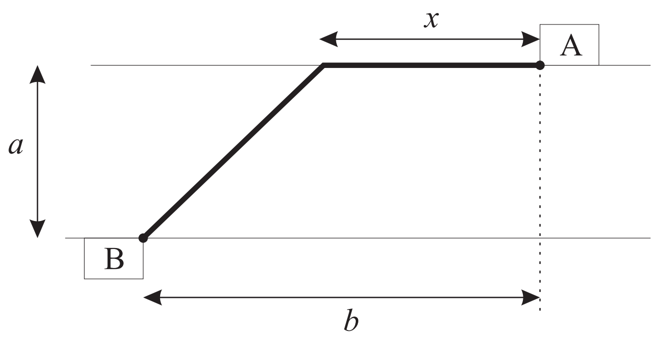
   b) $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \, dx$

   c) $\int \sin^4 x \, dx$

   d) $\int_0^1 (1-x^3) dx$

   e) $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$

3. Une entreprise installée sur les deux rives d'un fleuve (voir dessin) souhaite relier par fibre optique ses deux bâtiments A et B. Le tracé prévu est composé de deux segments rectilignes. La première partie du câble traverse le fleuve et la seconde est posée sur la berge. La pose du câble sur la berge coûte α Euros par mètre. Le coût par mètre est double, soit 2α Euros par mètre, lorsque le câble est posé dans le fleuve.



On souhaite minimiser le coût de l'installation.

   a) Déterminer la longueur x du câble à poser sur la berge pour minimiser le coût dans le cas où $a = 30$ m et $b = 240$ m.

   b) Montrer que le câble doit relier les deux implantations en ligne droite lorsque $a \geq \sqrt{3}b$.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Vérifier l'identité suivante

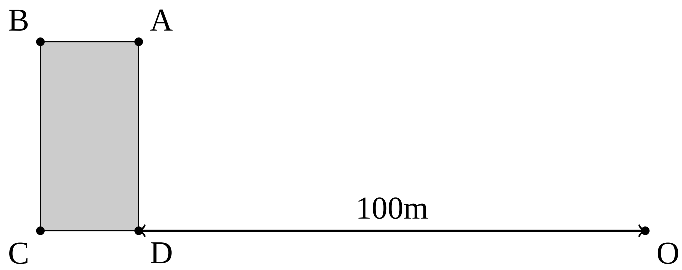
$$\frac{2}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{cotg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

2. Résoudre l'équation suivante et représenter les solutions entre 0 et 2π sur le cercle trigonométrique

$$4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 2\sin x = 1$$

3. Un observateur situé en O se trouve à une distance de 100 m d'un bâtiment $ABCD$ de forme rectangulaire dont la base CD mesure 20 m. Il mesure l'angle $\widehat{AOB}$ qui vaut 2°. Calculer la hauteur AD du bâtiment ainsi que l'aire du triangle AOB sachant que la hauteur du bâtiment ne peut dépasser 300 m.

   Les calculs seront effectués avec 4 chiffres significatifs.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Un point P appartient à la diagonale BD d'un carré $ABCD$. On note c la longueur de chacun des côtés de ce carré. Démontrer l'égalité

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP} = ||\overrightarrow{AP}||^2 - c^2.$$

2. Soient ABC un triangle rectangle en A, et d une droite passant par A. On note G la projection orthogonale de B sur d, et E la projection orthogonale de C sur d. On note également d_1 la parallèle à AC menée par G, et d_2 la parallèle à AB menée par E.

   a) Démontrer que les droites d_1, d_2 et BC sont concourantes.

   b) Déterminer le lieu géométrique du point d'intersection de d_1 et de d_2 lorsque d varie.

SEPTEMBRE 2015

ALGEBRE

1. Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel

$$\begin{cases} \quad ax+y-z=-1 \\ -x+ay+z=-1 \\ \ ax+ay+z=a \end{cases}$$

2. On donne les matrices réelles

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 3d \end{pmatrix},$$

où a,b,c et d sont des nombres réels, avec $d>c>0$.
On demande de déterminer $a,\ b,\ c$ et d sachant que

$$BA^{-1}X=C\,,\ 9a^2d^2+b^2c^2-6abcd=36 \text{ et } 2\log_2 c+\log_2 d=4\,.$$

ANALYSE

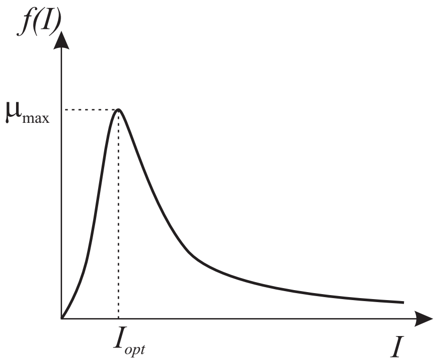
1. La fonction arch, appelée arccosinus hyperbolique, peut être définie par

$$\operatorname{arch}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Déterminer le domaine de définition de la fonction arch, ses éventuelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema, points d'inflexion et points à tangente verticale de son graphe.

Sur base des résultats obtenus, esquisser le graphe de $\operatorname{arch}(x)$, en illustrant bien la concordance avec les résultats préalables.

2. Par une série d'expériences réalisées dans des conditions d'éclairement contrôlées, on détermine que le taux de croissance d'une variété de légumineuse peut être décrit par la fonction $f(I)$ de l'éclairement I dont l'allure est représentée graphiquement ci-dessous.



Le taux de croissance

i. est positif,
ii. est nul sous un éclairement nul,
iii. est maximum et vaut μ_{max} (connu) pour un éclairement optimum I_{opt} (connu),
iv. tend vers zéro si l'éclairement tend vers l'infini.

Déterminer toutes les fonctions de la forme

$$f(I) = \frac{\alpha + \beta I}{1 + \delta I + \varepsilon I^2}$$

permettant de traduire la dépendance du taux de croissance en l'éclairement I en exprimant les constantes apparaissant dans cette expression en fonction des paramètres μ_{max}, I_{opt} positifs mesurés expérimentalement.
Veiller à simplifier le résultat au maximum.

3. On considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n} \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Q}.$$

a) Calculer I_0, $I_{1/2}$, I_1, I_2 et I_4.
b) Montrer que

$$I_n \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Si A, B et C désignent les sommets d'un triangle quelconque, vérifier l'identité suivante

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\,\sin A\,\sin B\,\sin C$$

2. Résoudre l'équation suivante

$$\cos nx + \cos(n-2)\,x = \cos x$$

   Tracer les solutions entre 0 et 2π sur le cercle trigonométrique dans le cas particulier où $n = 5$.

3. Soit la surface S (surface grisée sur la figure 1 ci-dessous) délimitée par la corde AB et l'arc de cercle qu'elle intercepte.

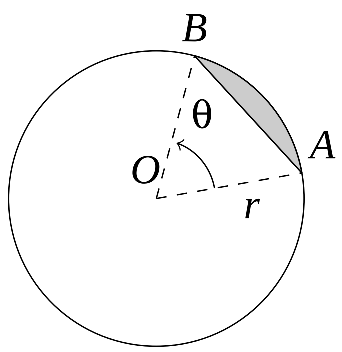


FIGURE 1 - r désigne le rayon du cercle et θ représente l'angle d'ouverture de l'arc intercepté exprimé en radians.

   a) Démontrer que l'aire de cette surface vaut $S = \frac{1}{2}r^2\,(\theta - \sin\theta)$
   b) Sur base de la formule donnée au point précédent, calculer la surface de l'intersection de deux cercles respectivement de rayons 10 cm et 7 cm dont les centres A et B sont distants de 12 cm (cf. figure 2).

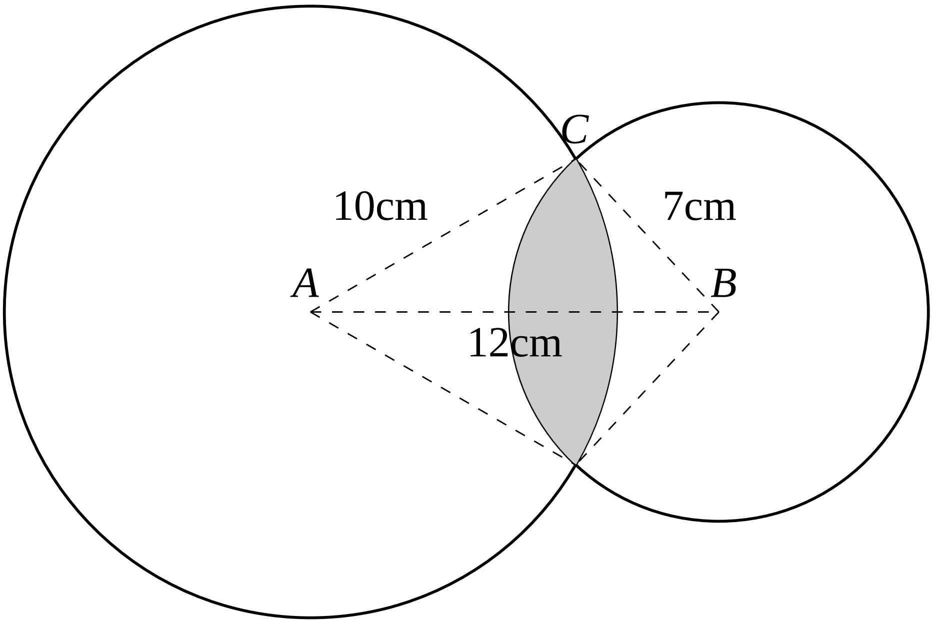


FIGURE 2 - L'intersection des deux cercles est représentée par la surface grisée.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupant en deux points distincts A et B. On note P le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$, et P' le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}'$.
   Démontrer que les points P, B et P' sont alignés.

2. Dans un repère orthonormé (O, X, Y), on considère une parabole $\mathcal{P}_1$ d'axe Y dont le sommet est l'origine O et dont tous les points ont une ordonnée positive ou nulle. On considère aussi la parabole $\mathcal{P}_2$, translatée de $\mathcal{P}_1$, de sommet au point de coordonnées $(4, 0)$. Les paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont telles que leurs tangentes respectives à leur point d'intersection sont orthogonales. On demande de déterminer les équations cartésiennes de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

EXAMENS DE 2016

Rappel

Les modalités de l'examen sont modifiées depuis 2014 : chaque épreuve écrite se trouve réduite à une durée de 2h30.

JUILLET 2016

ALGEBRE

1. Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $x^8 + 4$.

2. Résoudre le système suivant, dans lequel m est un paramètre réel :

$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ m^3 x + (2m-1)y = m^3 + 1 \end{cases}$$

ANALYSE

1. Soit la fonction
$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3}$$
où a représente un paramètre réel non nul.

   En discutant s'il y a lieu en fonction de a,

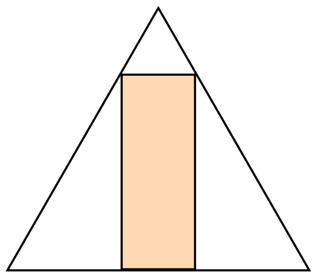
   a) déterminer le domaine de définition de la fonction f et ses éventuelles asymptotes ;

   b) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;

   c) sur base des informations recueillies, esquisser le graphique de f.

2. a) Calculer
$$I_0 = \int \ln x \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int x \ln x \, dx$$
b) Pour tout $\ell \in]0,1[$, on définit
$$J_n(\ell) = \int_\ell^1 x^n \ln x \, dx \qquad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}$$
Calculer
$$\lim_{\ell \to 0^+} J_n(\ell)$$
c) Calculer
$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

3. On inscrit un rectangle dans un triangle équilatéral en faisant en sorte qu'un côté du rectangle s'appuie sur un côté du triangle comme illustré ci-dessous.
Quelle est la fraction maximale de la surface du triangle qui peut être ainsi recouverte ?

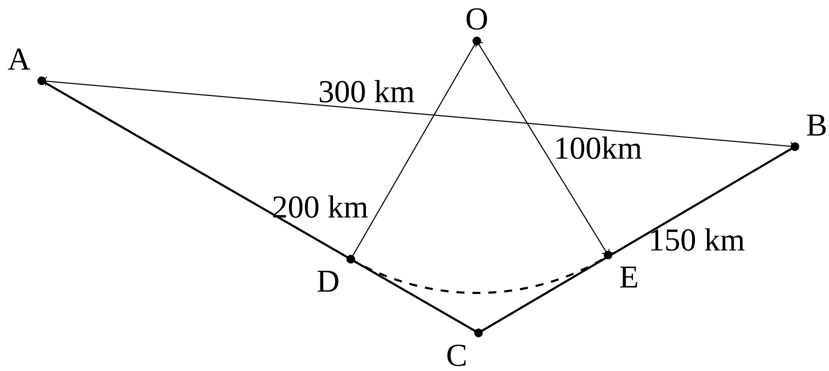


TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :
$$\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$$
Présenter sur le cercle trigonométrique celles appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

2. Si A, B et C désignent les angles d'un triangle et a, b et c les longueurs des côtés opposés à ces angles, montrer que :
$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

3. Deux lignes de chemin de fer relient en ligne droite les villes A et B distantes de 300 km par l'intermédiaire d'une ville C. Les villes A et B se trouvent respectivement à une distance de 200 km et 150 km de la ville C. Pour diminuer le temps de trajet entre les villes A et B, on désire éviter de passer par la ville C et raccorder les deux lignes de chemin de fer par une courbe en arc de cercle de 100 km de rayon tangente aux droites AC et CB aux points D et E comme représenté sur la figure ci-dessous.



Quelle est la longueur de la nouvelle ligne à construire (arc DE) ? Quelle sera la distance ($ADEB$) à parcourir pour rejoindre les villes A et B par cette nouvelle ligne ? Calculer la surface DCE du terrain situé entre l'ancienne ligne et la nouvelle ligne.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Par un point P intérieur à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r, on mène deux droites perpendiculaires d_1 et d_2. On note A_1 un des points d'intersection de d_1 avec $\mathcal{C}$, et A_2 un des points d'intersection de d_2 avec $\mathcal{C}$. Le milieu de la corde $[A_1A_2]$ est noté M. Démontrer l'égalité
$$|OM|^2 + |PM|^2 = r^2,$$
où $|XY|$ dénote la longueur du segment $[XY]$.

2. On donne une droite d tangente à un cercle $\mathcal{C}$, et on considère le lieu des points dont la distance à $\mathcal{C}$ est égale à la distance à d. On demande de caractériser ce lieu à l'aide d'équations cartésiennes, de préciser la nature de celui-ci, et de le représenter graphiquement.

SEPTEMBRE 2016

ALGEBRE

1. Un polynôme réel $f(x)$ et son polynôme dérivé $f'(x)$ s'annulent tous les deux en $x = 2$. Montrer que $f(x)$ est un multiple de $(x-2)^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{4x^2 - 8x + 3} \leq \frac{2}{4x^2 - 8x + 4}.$$

ANALYSE

1. Soit la fonction

$$f(x) = \ln \frac{a^2 + x^2}{ax}$$

   où a représente un paramètre réel strictement positif.

   En discutant s'il y a lieu en fonction de a,

   a) déterminer le domaine de définition de la fonction f et ses éventuelles asymptotes ;

   b) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;

   c) étudier la concavité de f et identifier ses éventuels points d'inflexion ;

   d) sur base des informations recueillies, esquisser le graphique de f.

2. On considère les intégrales du type

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, d\theta \qquad \text{où} \qquad n \in \mathbb{N}$$

   a) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3.

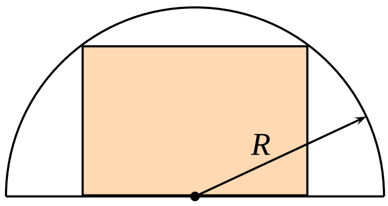
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

c) Utiliser les résultats ci-dessus pour calculer

$$I_7 = \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta \, d\theta$$

3. On inscrit un rectangle dans un demi-cercle de rayon R en faisant en sorte qu'un côté du rectangle s'appuie sur le diamètre du demi-cercle comme illustré ci-contre.
   Quelle est la fraction maximale de la surface du demi-cercle qui peut être ainsi recouverte ?



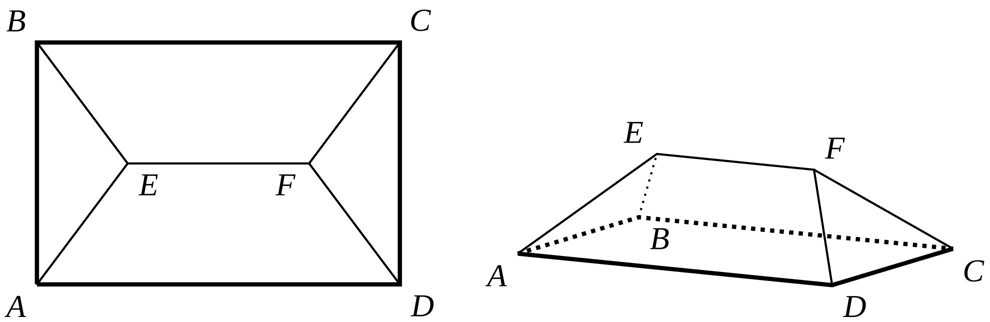
TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre l'équation trigonométrique suivante en précisant les conditions d'existence :

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x + \sin x} = 2 - 2\cos x$$

   Représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. On souhaite couvrir la toiture à quatre pans représentée en vue de haut et en perspective sur la figure suivante. La base de la toiture est rectangulaire, de côtés $AB = 8m$ et $BC = 12m$. La toiture est symétrique, c'est-à-dire que les pans ABE et CDF sont isométriques, de même que les pans $BCFE$ et $ADFE$. En mesurant les arêtes principales de la toiture, on obtient que $AE = 6m$, $EF = 6m$ et $FD = 6m$.



a) Calculer la surface totale de la toiture à couvrir.

b) Calculer la hauteur de l'arête EF par rapport à la base rectangulaire.

c) On souhaite poser des panneaux photovoltaïques sur la toiture. Pour ce faire, une inclinaison entre 30 ° et 40 ° est souhaitée. Déterminer quel pan de la toiture est le plus approprié pour accueillir les panneaux.

3. Si A, B et C désignent les angles d'un triangle et a, b et c les longueurs des côtés opposés à ces angles, montrer que :

$$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{a+b+c}{2a}\sin\frac{A}{2}$$

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On considère un triangle ABC et un point arbitraire P appartenant au côté $[BC]$ et distinct de B et C. Démontrer que l'on a

$$\frac{|AB|^2}{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}} + \frac{|AC|^2}{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CP}} + \frac{|AP|^2}{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}} = 1,$$

où $|XY|$ dénote la longueur du segment $[XY]$.

2. On donne une droite d passant par le centre d'un cercle $\mathcal{C}$, et on considère le lieu des centres des cercles qui sont à la fois tangents à d et tangents extérieurement à $\mathcal{C}$. On demande de caractériser ce lieu à l'aide d'équations cartésiennes, de préciser la nature de celui-ci, et de le représenter graphiquement.

EXAMENS DE 2017

Rappel
Les modalités de l'examen sont modifiées depuis 2014 : chaque épreuve écrite se trouve réduite à une durée de 2h30.

JUILLET 2017

ALGEBRE

1. Calculer la valeur de l'expression

$$E = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha.$$

   Suggestion. On peut voir dans l'expression à évaluer la partie imaginaire d'une autre expression facile à calculer.

2. Déterminer l'ensemble des valeurs (réelles) de *a* pour lesquelles l'énoncé

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, \text{ si } x \geq a \text{ alors } x^2 - ax + 2 - a \geq 0}$$

   est vrai.

ANALYSE

1. La fonction coth, appelée cotangente hyperbolique, peut être définie par

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

   a) Déterminer son domaine de définition.
   b) Déterminer sa parité éventuelle.

c) Déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe.

d) Étudier la croissance/décroissance de coth et caractériser ses éventuels extrema.

e) Étudier la concavité du graphe et déterminer ses éventuels points d'inflexion.

f) Esquisser le graphe de coth.

g) Sans calcul supplémentaire, esquisser le graphe de la fonction réciproque de la fonction coth. Préciser son domaine de définition.

2. Calculer les intégrales et primitives suivantes où R est une constante strictement positive.

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$

   b) $\displaystyle\int x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx$

   c) $\displaystyle\int \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$

3. Une citerne à gaz en tôle a la forme d'un cylindre à base circulaire de rayon r soudé à deux demi-sphères de même rayon.

   Sachant que le prix de la tôle est de γ euros par mètre carré et que le prix de la soudure (aux jonctions entre le cylindre et les demi-sphères) est de $\gamma\,\ell$ euros par mètre, où γ et ℓ sont des constantes strictement positives, montrer qu'il existe un rayon optimum r^* permettant de minimiser le coût de réalisation de cette citerne pour un volume $V = 2\pi\ell^3/3$ donné.

   Exprimer r^* en fonction de ℓ.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$2\sin(2x) + \cos(2x) = 2\sin^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x$$

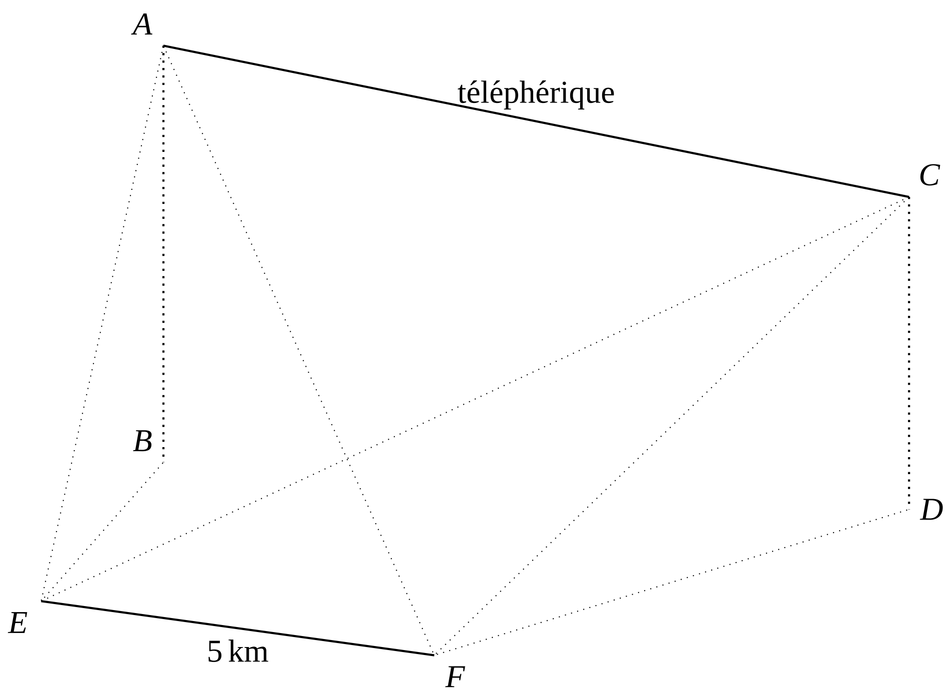
   et représenter les solutions comprises entre $-\pi$ et π sur le cercle trigonométrique.

2. A, B et C désignant les mesures des angles d'un triangle non dégénéré, montrer que, si

$$\mathrm{tg}\, B = \frac{\sin C}{1 - \cos C},$$

alors le triangle est isocèle.

3. On désire relier les sommets A et C de deux collines par un téléphérique. Afin de déterminer l'ampleur des travaux, des mesures topographiques sont effectuées à partir de deux points E et F distants de 5 km et situés tous deux dans un même plan d'observation horizontal. Les points B et D représentent respectivement les bases des sommets A et C dans le plan d'observation. Les angles $\widehat{AFE}$, $\widehat{AEF}$ et $\widehat{AEB}$ valent respectivement $12.3672°$, $157.1063°$ et $5.8750°$ et les angles $\widehat{CFE}$, $\widehat{CEF}$ et $\widehat{CFD}$ valent respectivement $80.2493°$, $68.9063°$ et $3.1996°$.



   a) Calculer la hauteur des sommets des deux collines par rapport au plan d'observation (longueur des segments $[A,B]$ et $[C,D]$).
   b) Calculer la distance entre les deux sommets (longueur du segment $[A,C]$)

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Sur un diamètre de ce cercle, on fixe deux points distincts P et P' équidistants de O. Un point M mobile parcourt $\mathcal{C}$. Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{P'M}$ reste constant.

2. On donne un trapèze $ABCD$, avec $AB \parallel CD$. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de ce trapèze sont de même longueur et se coupent à angle droit. Leur intersection est notée I.
   a) Démontrer que les segments $[AI]$ et $[BI]$ sont de même longueur.
   b) Calculer $|AD|^2 + |DC|^2 + |CB|^2 + |AB|^2$ en fonction de $|AD|$.
   c) Si l'on note M le milieu de $[AD]$, démontrer que IM est perpendiculaire à BC.

SEPTEMBRE 2017

ALGEBRE

1. Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ (a-1)x + (a+3)y + (a+1)z = a-1 \\ (a+2)x - y + (2a+2)z = 4 \end{cases}$$

2. Décomposer dans $\mathbb{C}$ le polynôme $z^4 + 1$ en un produit du type

$$(z^2 + b_1 z + c_1)(z^2 + b_2 z + c_2)\,.$$

   Si plusieurs possibilités existent, on les donnera toutes.

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 + a)$$

   où a désigne un paramètre réel strictement positif. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,
   a) déterminer le domaine de définition de f ;
   b) déterminer sa parité éventuelle ;

c) déterminer les éventuelles asymptotes du graphe de f ;
d) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;
e) esquisser le graphe de f.

2. On considère les intégrales

$$S_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx \qquad \text{et} \qquad C_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x \, dx$$

a) Calculer C_0.
b) Calculer S_1.
c) Montrer que, pour tout $n > 0$,

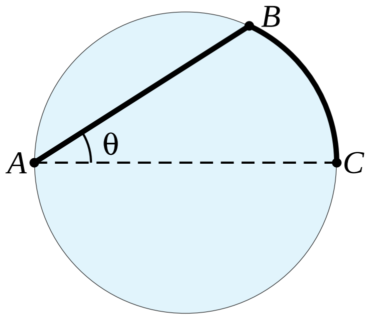
$$C_n = \alpha^n - nS_{n-1}$$

où α désigne une constante à déterminer.

d) De ce qui précède, déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \left(\arcsin x\right)^2 dx$.

3. Un canard se trouvant en A au bord d'un lac circulaire de rayon R souhaite atteindre le point C diamétralement opposé du lac. Pour ce faire, il peut nager en ligne droite de A à C, marcher le long de la berge de A à C ou nager en ligne droite depuis son point de départ jusqu'à un point intermédiaire B situé sur la berge puis marcher le long du bord de B à C (voir figure).

Sachant que ce canard marche deux fois plus vite qu'il ne nage, déterminer la trajectoire la plus rapide pour atteindre le point C. Justifier.

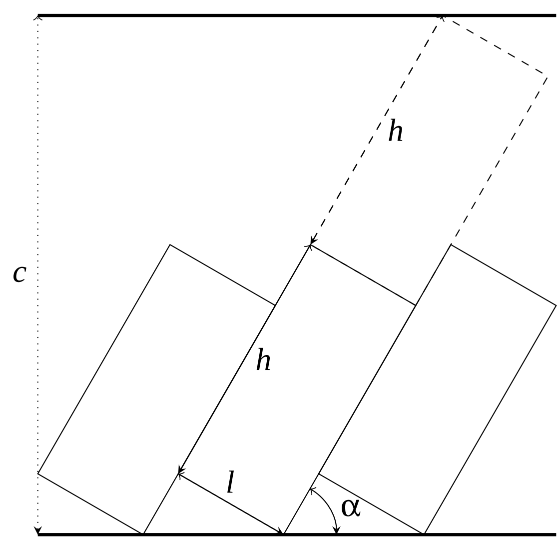


TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$2\sin^2 x \operatorname{cotg} x + \sin(3x) + \sin x = 0$$
en spécifiant les conditions d'existence et représenter les solutions comprises dans $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Soient A, B et C les trois angles d'un triangle non dégénéré. Montrer que, si
$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2,$$
alors le triangle correspondant est rectangle.

3. On désire installer des emplacements de stationnement de voitures dans une rue de largeur c. Chaque emplacement doit posséder une largeur l de 2.3 m, une profondeur h de 5 m et doit comprendre une surface de dégagement au moins égale à la surface de l'emplacement de stationnement pour permettre la sortie du véhicule. La situation est représentée à la figure ci-dessous où l représente la largeur de l'emplacement de stationnement, h sa profondeur et α l'angle d'inclinaison de l'emplacement avec le bord de la route. La surface de dégagement est représentée en pointillé.
   (a) Calculer la largeur minimale c de la route permettant d'installer les emplacements de stationnement si l'angle d'inclinaison α est de 60°.
   (b) Calculer la valeur maximale de l'angle d'inclinaison α permettant l'installation des emplacements de stationnement si la largeur de la route c vaut 8.7 m.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et un parallélogramme $ABCD$ dont l'intersection des diagonales coïncide avec O. Un point M mobile parcourt $\mathcal{C}$. Démontrer que la valeur de
$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2$$
reste constante.

2. Sur les côtés $[OA]$ et $[OB]$ d'un triangle rectangle en O, à l'extérieur de celui-ci, on construit les triangles équilatéraux OAC et OBE. Les milieux des segments $[OA]$ et $[OB]$ sont respectivement notés A' et B'.
Démontrer que la hauteur du triangle OAB issue de O et les droites $A'E$ et $B'C$ sont concourantes.

Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées
Institut de Mathématique - Bât. B37
Quartier Polytech 1
Allée de la Découverte, 12
4000 - LIEGE 1

Tél. : 04/366.94.36. Fax : 04/366.95.75.

http ://www.ulg.ac.be