Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Septembre 2018

Question 1 *Résoudre l'équation trigonométrique suivante :*

$$\sin x - 2\sin 3x + \sin 5x = -\cos 2x + \cos 4x$$

et représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, +\pi[$ *sur le cercle trigonométrique.*

Solution

En appliquant les formules de Simpson à $\sin(x)+\sin(5x)$ dans le membre de gauche et à tout le membre de droite, l'équation devient

$$2\sin(3x)\cos(2x) - 2\sin(3x) = -2\sin(3x)\sin x. \quad \boxed{\text{A}} \tag{1}$$

En ramenant le membre de droite à gauche et en mettant $2\sin(3x)$ en évidence, (1) se réécrit

$$2\sin(3x)(\cos(2x) - 1 + \sin x) = 0. \quad \boxed{\text{B}} \tag{2}$$

En utilisant la formule de Carnot $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, l'équation devient

$$\begin{aligned} 2\sin(3x)(1 - 2\sin^2 x - 1 + \sin x) &= 0 \\ 2\sin(3x)\sin(x)(1 - 2\sin x) &= 0. \quad \boxed{\text{C}} \end{aligned} \tag{3}$$

Chaque facteur de (3) nous donne un ensemble de solutions. Nous avons donc

- $\sin(3x) = 0$ donnant $3x = k\pi$ soit $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\text{D}}$
- $\sin x = 0$ donnant $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\text{E}}$
- $1 - \sin(2x) = 0$ soit $\sin x = \frac{1}{2}$ donnant $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{\text{F}}$

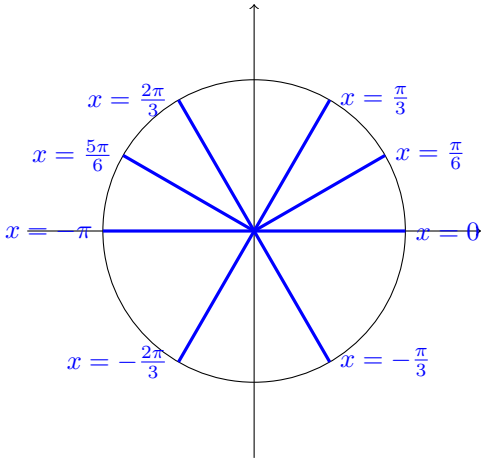


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

Question 2 *Montrer que si A, B, C sont trois angles strictement positifs tels que $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ alors*

$$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan A \tan C = 1.$$

Solution

On commence par remplacer les fonctions $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. On observe que, comme les angles sont strictement positifs, aucun de ceux-ci n'est égal à $\frac{\pi}{2}$ radians et, dès lors, toutes les fonctions tangentes sont définies. On peut donc réécrire l'équation comme

$$\frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} + \frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} + \frac{\sin A \sin C}{\cos A \cos C} = 1. \tag{4}$$

En mettant tout au même dénominateur, (4) peut s'écrire de manière équivalente comme

$$\frac{\sin A \sin B \cos C + \cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C}{\cos A \cos B \cos C} = 1. \tag{5}$$

Comme tous les $\cos x \neq 0$ (x représentant A, B ou C) par hypothèse, on peut réécrire (5) de manière équivalente comme

$$\sin A \sin B \cos C + \cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C - \cos A \cos B \cos C = 0. \tag{6}$$

Comme $A + B + C = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que $\cos C = \sin(A + B)$ et $\sin C = \cos(A + B)$. En remplaçant dans (6), on obtient donc les formes équivalentes

$$\sin A \sin B \sin(A + B) + \cos A \sin B \cos(A + B) + \\ \sin A \cos B \cos(A + B) - \cos A \cos B \sin(A + B) = 0$$

et

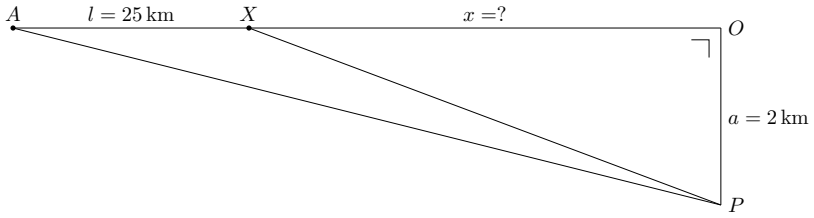
$$\cos(A + B)(\cos A \sin B + \sin A \cos B) + \sin(A + B)(\sin A \sin B - \cos A \cos B) = 0. \tag{7}$$

On observe que $\cos A \sin B + \sin A \cos B = \sin(A+B)$ et que $\sin A \sin B - \cos A \cos B = -\cos(A+B)$. Dès lors, (7) s'écrit de manière équivalente comme

$$\cos(A+B)\sin(A+B) - \sin(A+B)\cos(A+B) = 0. \tag{8}$$

L'équation (8) étant toujours vérifiée et comme toutes les opérations effectuées ont maintenu les équivalences entre les expressions, on en déduit que l'égalité à prouver est bien toujours vérifiée.

Question 3 *Un observateur situé en O dans un désert parfaitement plan est aligné avec deux éléments remarquables A et X séparés entre eux par une distance $l = 25\,\text{km}$. Cet observateur cherche à déterminer la distance qui le sépare du point X en se déplaçant en P d'une distance $a = 2\,\text{km}$ dans une direction perpendiculaire à l'axe AXO. De ce nouveau point de vue, il mesure l'angle $\widehat{XPA} = 1°6'0''$. Les angles seront calculés à la seconde près et les distances avec 5 chiffres significatifs.*



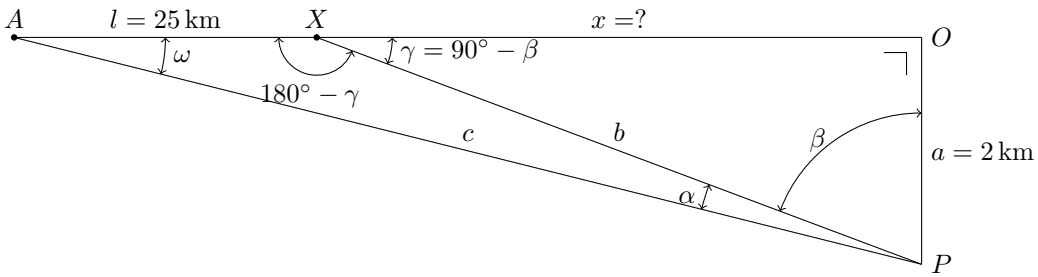
a *Déterminer l'angle $\widehat{PAO}$.*

b *Calculer la distance x entre les points O et X.*

c *Calculer la distance $\overline{PA}$.*

Solution

a Pour des raisons de facilité, définissons les angles α, β, γ et ω comme sur la figure ci-dessous :



Dans le triangle AXP quelconque, la règle des sinus nous donne :

$$\frac{l}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\omega} = \frac{c}{\sin(180° - \gamma)} \;\rightarrow\; \sin\omega = \frac{b\sin\alpha}{l} \quad \boxed{\text{A}}$$

Ensuite, dans le triangle rectangle XOP :

$$\sin\gamma = \frac{a}{b} \;\rightarrow\; b = \frac{a}{\sin\gamma} \quad \boxed{\text{B}}$$

En substituant cette valeur de b dans l'expression précédente, il vient :

$$\sin\omega = \frac{a\sin\alpha}{l\sin\gamma} \quad \boxed{\text{C}}$$

En notant que la somme des angles intérieurs du triangle AXP vaut 180°, il vient $\omega + 180° - \gamma + \alpha = 180° \;\rightarrow\; \gamma = \omega + \alpha$, nous obtenons l'équation suivante où seule la valeur de l'angle ω est inconnue :

$$\sin\omega = \frac{a\sin\alpha}{l\sin(\omega+\alpha)} \;\Leftrightarrow\; \sin\omega\sin(\omega+\alpha) = \frac{a\sin\alpha}{l} \quad \boxed{\text{D}}$$

Cette équation est résolue en utilisant la relation $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\left(\cos(\omega+\alpha-\omega) - \cos(\omega+\alpha+\omega)\right) = \frac{a\sin\alpha}{l} \;\Leftrightarrow\; \cos(2\omega+\alpha) = \cos\alpha - \frac{2a\sin\alpha}{l} \quad \boxed{\text{E}}$$

Ce qui donne :

$$2\omega + \alpha = \pm 4.6248° + k360°$$

Ne retenant que la solution positive inférieure à 360°, nous obtenons $\omega = 1.7624° = 1°45'44''$ $\boxed{\text{F}}$.

b Sachant que dans le triangle rectangle XOP :

$$\tan\gamma = \tan(\omega+\alpha) = \frac{a}{x} \;\rightarrow\; x = \frac{a}{\tan(\omega+\alpha)} = 40.000\,\text{km} \quad \boxed{\text{G}}$$

c En repartant de la relation des sinus dans le triangle AXP, nous avons :

$$c = \frac{l\sin(180° - \gamma)}{\sin\alpha} = \frac{l\sin(\omega+\alpha)}{\sin\alpha} = 65.031\,\text{km} \quad \boxed{\text{H}}$$

ATTENTION

- NOM (en MAJUSCULES), prénom (en minuscules) sur chaque feuille.
- Rendre une feuille par question même s'il n'y a pas de réponse.
- Spécifier les conditions d'existence.
- GSM et PC interdits.
- Il est permis d'utiliser une calculette.
- Préparer une pièce d'identité sur la table.
- Fin de l'examen à 12 heures.

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Juillet 2018

Question 1 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation homogène*

$$\sin^3 x + 2\cos^3 x = 3\sin^2 x \cos x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique. Les solutions trouvées ne sont pas toutes exprimables sous la forme d'angles remarquables. Il n'empêche qu'il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique sachant que $\sqrt{3} \simeq 1.732$.

Solution A

Nous sommes en présence d'une équation trigonométrique homogène d'ordre 3. La technique la plus efficace pour résoudre ce genre d'équation est de diviser les deux membres de l'équation par $\cos^3 x$. On vérifie évidemment que $\cos x = 0$ n'est pas solution de l'équation On a donc :

$$\tan^3 x - 3\tan^2 x + 2 = 0.$$

On transforme l'équation trigonométrique en une équation algébrique. On pose $y = \tan x$ et on écrit :

$$y^3 - 3y^2 + 2 = 0.$$

On trouve finalement :

$$(y-1)(y^2 - 2y - 2) = 0.$$

dont les solutions sont

$$y_{1,2,3} = \begin{cases} 1 \\ 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{cases}.$$

Les solutions de l'équation trigonométrique sont donc :

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{\arctan(1+\sqrt{3}) + k\pi\right\} \cup \left\{\arctan(1-\sqrt{3}) + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

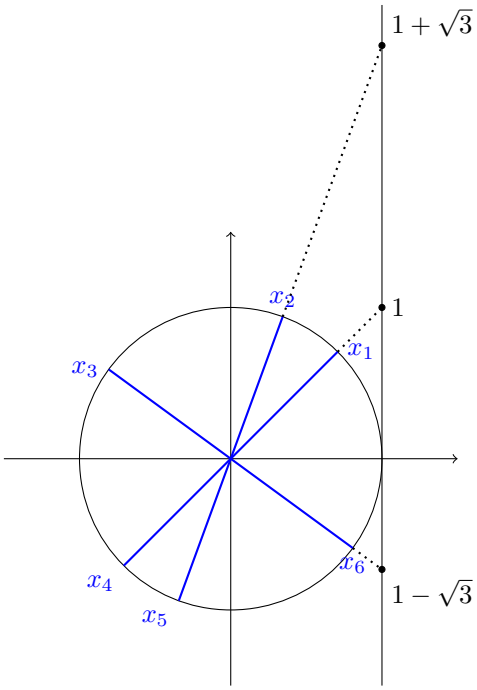


FIGURE 1 – Les 6 solutions $x_1, \ldots, x_6$ de l'équation sur le cercle trigonométrique

Solution B

On peut aussi diviser l'équation de départ par $\sin^3 x$ et vérifier que $\sin x = 0$ n'est pas solution. On obtient

$$2\cot^3 x - 3\cot^2 x + 1 = 0.$$

En posant $y = \cot x$, on a

$$2y^3 - 3y + 1 = 0$$

qui a comme solutions

$$y_{1,2,3} = \begin{cases} 1 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}.$$

qui sont les inverses des solutions en tangente ($1/(1+\sqrt{3}) = 1/2(\sqrt{3}-1)$).

Solution C

Si on pose

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

on trouve

$$(2t)^3 + 2(1-t^2)^3 = 3(2t)^2(1-t^2)$$

ou encore

$$-2t^6 + 18t^4 + 8t^3 - 18t^2 + 2 = 0.$$

qui donne les 6 solutions sur le cercle.

Question 2 *Si A, B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré, montrer que :*

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C$$

Solution

Utilisons tout d'abord la formule de Carnot $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ sur les deux premiers termes du membre de gauche :

$$\begin{aligned}
&\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C \\
&\quad \Leftrightarrow \ \frac{1}{2} - \frac{\cos 2A}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2B}{2} + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C \\
&\quad\quad \Leftrightarrow \ 1 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C
\end{aligned}$$

En faisant usage de la formule de factorisation $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ et en notant que $\pi = A + B + C$, il vient :

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C \\
&\quad \Leftrightarrow \ 1 - \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2(A+B) = 1 + 2\sin A \sin B \cos C \\
&\quad\quad \Leftrightarrow \ -\cos(A+B)\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right] = 2\sin A \sin B \cos C \\
&\Leftrightarrow \ -\cos(A+B)\left[-2\sin\frac{A-B+A+B}{2}\ \sin\frac{A-B-A-B}{2}\right] = 2\sin A \sin B \cos C \\
&\quad\quad \Leftrightarrow \ -\cos(\pi - C)\left[-2\sin\frac{2A}{2}\ \sin\frac{-2B}{2}\right] = 2\sin A \sin B \cos C \\
&\quad\quad\quad \Leftrightarrow \ 2\cos C \sin A\ \sin B = 2\sin A \sin B \cos C
\end{aligned}$$

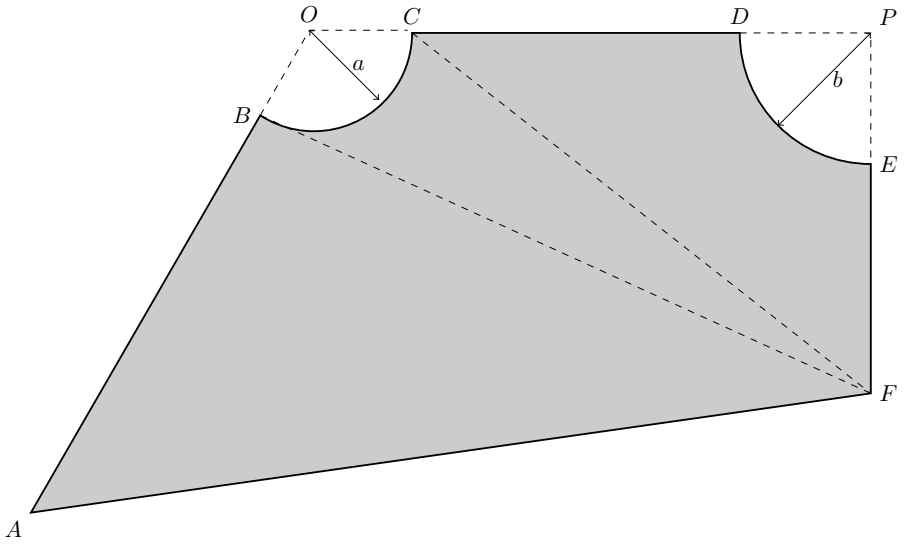
Ce qui démontre l'identité.

Question 3 *Dans le cas d'un quadrilatère quelconque plan, la connaissance de la longueur des quatre côtés et d'une diagonale suffit pour déterminer sa surface. Cependant, on désire ici carreler une pièce $ABCDEF$ dont la forme est celle représentée par la zone grisée de la figure ci-dessous. Les courbes BC et DE sont des arcs de cercle de centre O et P et de rayon a et b respectivement. Les segments rectilignes AB, CD, EF et AF mesurent respectivement* 7 m, 5 m, 3.5 m *et* 12.64 m. *Les deux segments BF et CF mesurent* 10.11 m *et* 8.90 m. *De plus, l'angle $\widehat{CPF}$ est droit. On demande de*

a Déterminer le rayon b de l'arc DE

b Déterminer le rayon a de l'arc BC.

c *Calculer l'aire intérieure de la pièce représentée par la surface grisée* $ABCDEF$.



Solution

(a) On travaille dans le triangle rectangle CPF. Si on y exprime le théorème de Pythagore , il vient

$$(|CD| + b)^2 + (|EF| + b)^2 = |CF|^2. \boxed{\text{A}}$$

En développant l'équation et en remplaçant par les valeurs connues, on a

$$b^2 + 10b + 25 + b^2 + 7b + 12.25 = 79.21$$
$$2b^2 + 17b - 41.96 = 0. \boxed{\text{B}}$$

On calcule le discriminant $\Delta = 17^2 + 8 \cdot 41.96 = 624.68$.
On a donc les deux solutions

$$b = \frac{-17 \pm \sqrt{624.68}}{4} \approx 1.9984 \ m, \boxed{\text{C}}$$

la solution négative étant à rejeter. $\boxed{\text{D}}$

(b) On calcule d'abord l'angle $\alpha := \widehat{BAF}$ en utilisant Pythagore généralisé (Al-Kashi). On a

$$|BF|^2 = |AB|^2 + |AF|^2 - 2 \cdot |AB||AF| \cos\alpha \boxed{\text{E}}$$

On a donc

$$\cos\alpha = \frac{|AB|^2 + |AF|^2 - |BF|^2}{2 \cdot |AB||AF|} \approx 0.6022,$$

ce qui nous donne une valeur de l'angle $\widehat{BAF}$ de 0.9246 radians ou 52.98 degrés.

Pour trouver a, on calcule la diagonale $|OF|$ de deux façons, à savoir, d'une part dans le triangle rectangle OPF, et d'autre part dans le triangle OAF. Dans le triangle OPF, on a

$$|OF|^2 = (a + |CP|)^2 + |PF|^2. \tag{1}$$

Dans le triangle OAF, on a

$$|OF|^2 = (|AB| + a)^2 + |AF|^2 - 2 \cdot (|AB| + a)|AF| \cos\alpha \tag{2}$$

. En égalisant (1) et (2), on obtient

$$(a + |CP|)^2 + |PF|^2 = (|AB| + a)^2 + |AF|^2 - 2 \cdot (|AB| + a)|AF| \cos\alpha \boxed{\text{F}}$$

qui, en développant (les a^2 se simplifient), devient

$$a(2 \cdot |AB| - 2 \cdot |AF| \cos\alpha - 2 \cdot |CP|) = |PF|^2 - |AF|^2 + 2 \cdot |AB||AF| \cos\alpha.$$

En remplaçant par les valeurs connues, on trouve

$$a \approx 1.5099\ m. \boxed{\text{G}}$$

(c) Il nous reste à calculer les aires des triangles OAF et OPF, les additionner et soustraire les aires des sections circulaires COB et DPE.

Nous calculons tout d'abord l'aire du triangle rectangle OPF qui vaut

$$\frac{1}{2}(a + b + |CD|)(b + |EF|) \approx 23.391\ m^2.$$

Le triangle OAF est quelconque et son aire se calcule comme

$$\frac{1}{2}(|AB| + a)|AF| \sin\alpha \approx 42.939\ m^2$$

Pour les sections circulaires, il convient de calculer leurs angles. On sait que $\widehat{DPE}$ vaut 90 degrés. L'aire de la section circulaire vaut donc

$$\frac{\pi b^2}{4} \approx 3.137\ m^2.$$

La valeur de l'angle $\widehat{BOC}$ peut être décomposé en la somme de l'angle $\widehat{BOF}$ et $\widehat{DOF}$. L'angle $\widehat{BOF}$ peut être calculé en appliquant la règle des sinus dans le triangle AOF. On a

$$\sin\widehat{BOF} = |AF|\frac{\sin\alpha}{|OF|},$$

où $|OF|$ peut être calculé grâce à Pythagore,

$$|OF| = \sqrt{(a + b + |CD|)^2 + (b + |EF|)^2} \approx 10.13\ m.$$

Dès lors $\sin \widehat{BOF} \approx 0.9962$ c'est-à-dire que $\widehat{BOF}$ mesure 84.98 degrés.
Par ailleurs, l'angle $\widehat{DOF}$ se trouve grâce au triangle rectangle POF,

$$\sin \widehat{POF} = \frac{b + |EF|}{|OF|} \approx 0.5428,$$

soit 32.87 degrés. L'aire de la section circulaire vaut donc

$$\pi a^2 \frac{84.98 + 32.87}{360} \approx 2.344 \ m^2.$$

Nous obtenons donc finalement que l'aire de la pièce vaut approximativement

$$23.391 + 42.939 - 2.344 - 3.137 \approx 60.85 \ m^2.$$