Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Juillet 2019

Question 1 *Montrer que, si la relation suivante liant les mesures des trois angles A, B et C d'un triangle est vérifiée*

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$$

alors, A, B ou C vaut $120°$.

Solution

En notant que $\pi = A+B+C$ et en faisant usage de la formule de factorisation :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

l'identité initiale peut être mise sous la forme :

$$2\cos\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2} + \cos\left[3\pi - 3(A+B)\right] = 1.$$

En utilisant la formule de duplication des arcs $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, il vient :

$$2\cos\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2} + 2\cos^2\left[\frac{3\pi}{2} - \frac{3(A+B)}{2}\right] - 1 = 1$$

Ensuite, il suffit de noter que $\cos^2\left[\frac{3\pi}{2} - \frac{3(A+B)}{2}\right] = \sin^2\frac{3(A+B)}{2} = 1 - \cos^2\frac{3(A+B)}{2}$ et nous obtenons la relation suivante qui peut être factorisée aisément :

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2} - \cos^2\frac{3(A+B)}{2} = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos\frac{3(A+B)}{2}\left[\cos\frac{3(A-B)}{2} - \cos\frac{3(A+B)}{2}\right] = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos\frac{3(A+B)}{2}\sin\frac{3A-3B+3A+3B}{4}\sin\frac{3A-3B-3A-3B}{4} = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos\frac{3(A+B)}{2}\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2} = 0
\end{aligned}$$

Cette équation est satisfaite pour les conditions suivantes :

— $\cos\dfrac{3(A+B)}{2}=0$, ce qui entraine $\dfrac{3(A+B)}{2}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow A+B=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow C=\pi-(A+B)=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}=120°$.

— $\sin\dfrac{3A}{2}=0\ \Rightarrow\ \dfrac{3A}{2}=0\ \Rightarrow\ A=0$ (à rejeter) ou $\dfrac{3A}{2}=\pi\ \Rightarrow\ A=120°$ et

— $\sin\dfrac{3B}{2}=0\ \Rightarrow\ \dfrac{3B}{2}=0\ \Rightarrow\ B=0$ (à rejeter) ou $\dfrac{3B}{2}=\pi\ \Rightarrow\ B=120°$.

Question 2 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation*

$$4\left(\sin x+\cos x\right)-8\sin x\cos x=5$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique. Noter que bien que les solutions trouvées ne soient pas exprimables sous la forme d'angles remarquables, il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique.
Suggestion pour résoudre l'équation : *poser* $y=\sin x+\cos x$

Solution

Méthode 1

Posons

$$y=\sin x+\cos x$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad y^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+2\sin x\cos x\\
&\Rightarrow\quad 2\sin x\cos x=y^2-1. \qquad\qquad [1pt]
\end{aligned}$$

L'équation à résoudre se réécrit

$$\begin{aligned}
4y-4(y^2-1)=5\quad&\Leftrightarrow\quad y^2-y+\frac{1}{4}=0 \qquad\qquad [2pt]\\
&\Leftrightarrow\quad \left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Par définition de y, on obtient donc comme nouvelle équation à résoudre

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{2}.\quad [1pt] \tag{1}$$

Tenant compte de l'égalité $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, on a

$$\begin{array}{lll}
\sin x + \cos x = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow & \sin x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{1}{2} \qquad [1pt] \\
& \Leftrightarrow & \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} \\
& \Leftrightarrow & \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad [1pt] \\
& \Leftrightarrow & x + \frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \\
& \text{ou} & x + \frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\
& \Leftrightarrow & x = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\
& \text{ou} & x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad [1pt].
\end{array}$$

Les solutions de l'équation trigonométrique sont donc

$$S = \left\{\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi\right\},\ k \in \mathbb{Z}. \qquad [1pt]$$

Remarques

- Pour obtenir un segment de droite de longueur $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (en unité arbitraire), on peut utiliser le fait que la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont la longueur des côtés adjacents à l'angle droit vaut $\frac{1}{4}$ ou l'approximation $\frac{\sqrt{2}}{4} \approx \frac{1,4}{4} = 0,35$.
- Les solutions de l'équation sont notées

$$\begin{aligned}
x_1 &= \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + k\pi \\
x_2 &= \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + k\pi = \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + k\pi
\end{aligned}$$

oÃ¹ $k \in \mathbb{Z}$.

Répartition des points

- 8 points pour la résolution de l'équation dont
  - 4 pour l'obtention de l'équation (1) [détails voir supra]
  - 4 pour la résolution de l'équation (1) [détails voir supra]
- 2 points pour le dessin

Méthode 2

L'équation est inchangé quand on remplace $\sin x$ par $\cos x$ et réciproquement. Cela suggère le changement de variable

$$y = \frac{\pi}{4} - x. \qquad [1pt]$$

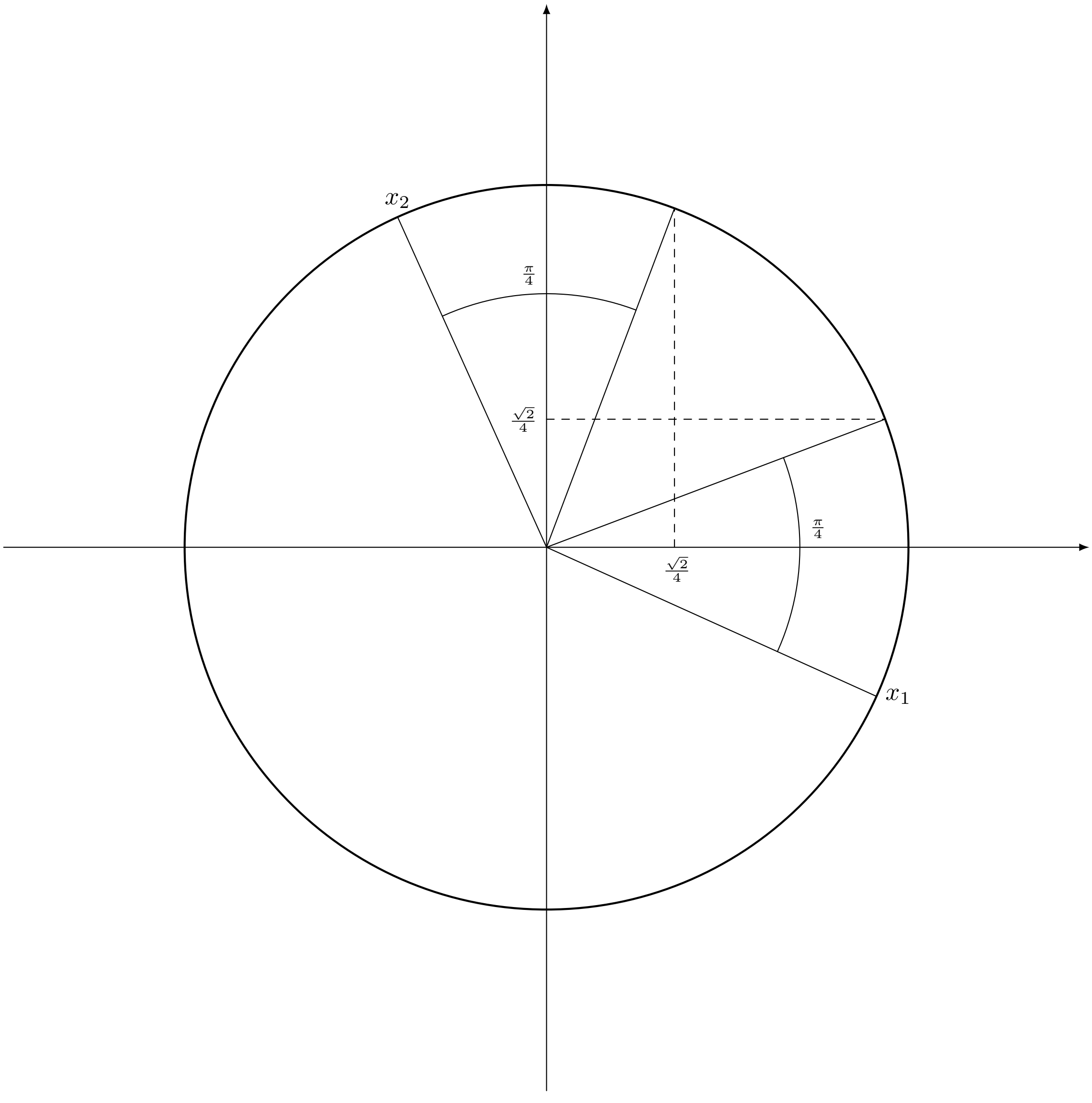


FIGURE 1 – Les solutions x_1 et x_2 de l'équation sur le cercle trigonométrique.

On a, en utilisant les formules d'addition,

$$\begin{aligned}\sin y &= \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x-\sin x),\\ \cos y &= \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x+\sin x) \qquad [1pt]\end{aligned}$$

dont on déduit

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin x+\cos x),\\ \cos x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x). \qquad [1pt]\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}(\cos^2 y-\sin^2 y)=\frac{1}{2}(2\cos^2 y-1)$$

et

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos y. \qquad [1pt]$$

En injectant ces résultats dans l'équation trigonométrique initiale, on obtient l'équation

$$8\cos^2 y-4\sqrt{2}\cos y+1=0$$

ou de manière équivalente, en posant $z=\cos y$,

$$8z^2-4\sqrt{2}z+1=0. \qquad [1pt]$$

Cette équation admet pour unique solution

$$z=\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad [1pt]$$

dont on déduit

$$\begin{aligned}&\cos y=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow y=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\\ &\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \qquad [1pt].\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation trigonométrique sont donc

$$S=\left\{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi\right\},\ k\in\mathbb{Z}. \qquad [1pt]$$

La représentation des solutions sur le cercle trigonométrique faite précédemment reste bien entendu valable et vaut toujours [2pt].

Méthode 3

On a

$$4(\sin x + \cos x) - 8 \sin x \cos x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4(\sin x + \cos x) = 5 + 8 \sin x \cos x.$$

Elevons les deux membres au carré (attention, cela peut engendrer des solutions parasites), on en déduit

$$\begin{aligned} & 16(\sin x + \cos x)^2 = (5 + 8 \sin x \cos x)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 16(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x + \cos x) = 25 + 64 \sin^2 x \cos^2 x + 80 \sin x \cos x \\ \Leftrightarrow \quad & 64 \sin^2 x \cos^2 x + 48 \sin x \cos x + 9 = 0 \qquad [1pt]. \end{aligned} \tag{2}$$

Posons

$$y = 2 \sin x \cos x = \sin 2x. \qquad [1pt]$$

L'équation (2) se réécrit

$$16y^2 + 24y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4} \qquad [1pt].$$

On en déduit

$$\sin 2x = -\frac{3}{4} \tag{3}$$

L'équation originale peut alors se réécrire

$$\begin{aligned} & 4(\sin x + \cos x) = 5 + 4 \sin 2x \\ & \Rightarrow 4(\sin x + \cos x) = 2 \\ & \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{1}{2} \qquad [1pt] \end{aligned}$$

Cette dernière équation est précisément l'équation (1) obtenue à la méthode 1. A partir d'ici, la résolution est donc la même qu'à la méthode 1.
Une autre option consiste à résoudre directement l'équation (3) ([2pt] pour ne pas accorder trop de points à l'élimination des solutions parasites) et à éliminer les solutions parasites ([2pt]). Dans ce cas, les solutions de l'équation trigonométrique s'écrivent

$$S = \left\{ -\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{4} + 2k\pi \right\} \bigcup \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{4} + 2k\pi \right\}, \; k \in \mathbb{Z}. \qquad [1pt]$$

La construction de la représentation des solutions de l'équation sur le cercle trigonométrique est différente mais peut encore valoir [2pt].

Question 3 *Deux poulies de rayons respectifs* 5 cm *et* 8 cm *sont disposées à* 15 cm *de distance centre à centre. Calculer la longueur L de la courroie autour de ces poulies. La courroie est représentée en gras sur la figure fournie au verso de cette feuille et les points A, B, C et D représentent les points de tangence de cette courroie avec les poulies.*

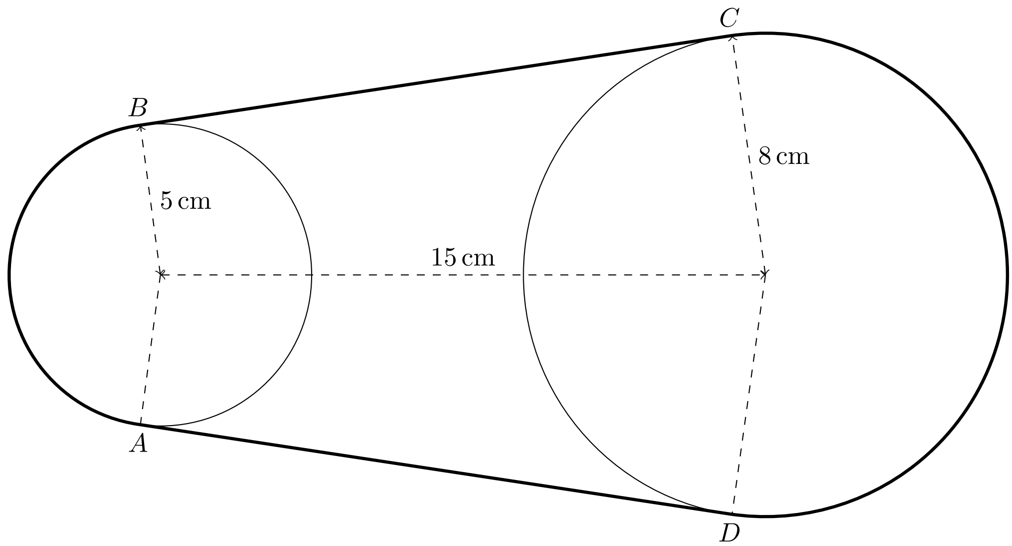


FIGURE 2 – Le système à deux poulies

Solution

On appelle O le centre de la poulie de rayon 5 cm. On appelle P le centre de la poulie de rayon 8 cm. Observons que, par définition de la tangence, les angles $\widehat{OBC}$ et $\widehat{PCB}$ sont de 90°.

Partant de O, on trace la parallèle à BC, qui intersecte le segment de droite PC en E (voir Figure). Observons que $OBCE$ est donc un rectangle et le triangle OEP un triangle rectangle. On en déduit que $\overline{CE}$ vaut 5 cm et $\overline{EP}$ vaut 3 cm. Dans le triangle rectangle OEP, on peut donc calculer

$$\begin{aligned}\overline{OE} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{EP}^2} \\ &= \sqrt{15^2 - 3^2} \approx 14.7 \text{ cm.}\end{aligned}$$

On remarque que la figure est parfaitement symétrique selon l'axe OP. Dès lors, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{OE} \approx 14.7$ cm.

Il nous reste à calculer les longueurs des arcs $\widehat{BA}$ et $\widehat{CD}$. Pour ce faire, on doit calculer les angles $\widehat{BOA}$ et $\widehat{DPC}$. L'angle $\widehat{EOP}$ peut se calculer dans le triangle rectangle. On a $\sin(\widehat{EOP}) = \frac{\overline{EP}}{\overline{OP}} = \frac{3}{15}$. Donc $\widehat{EOP} \approx 11.54°$. Par symétrie de la figure, l'angle permettant de déterminer l'arc de cercle vaut

$$\widehat{BOA} = 360° - 2 \cdot (90° + \widehat{EOP}) \approx 156.93°.$$

On peut donc calculer

$$\widehat{BA} = 2\pi r \frac{\widehat{BOA}}{360} = 10\pi \frac{156.93}{360} \approx 13.7 \text{ cm.}$$

Pour l'autre arc, on calcule l'angle $\widehat{EPO}$ qui est le complémentaire de $\widehat{EOP}$ donc $\widehat{EPO} = 90° - 11.54° \approx 78.46°$. L'angle qui intercepte l'arc de cercle vaut donc $360° - 2 \cdot 78.46° \approx 203.08°$ L'arc de cercle recherché vaut donc

$$\widehat{CD} = 2\pi \cdot 8 \cdot \frac{203.08}{360} \approx 28.4\text{cm}.$$

Le périmètre total s'obtient donc comme la somme des deux arcs de cercle, de $\overline{BC}$ et de $\overline{AD}$, c'est-à-dire $14.7 + 14.7 + 13.7 + 28.4 \approx 71.5$ cm.

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Septembre 2019

Question 1 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$

$$\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x} = \cos x$$

en spécifiant les conditions d'existence et représenter les solutions comprises dans $[-\pi, \pi[$ *sur le cercle trigonométrique.*

Solution

C. E. : $\sin x \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{A}$

Les conditions d'existence étant posées, nous pouvons à présent multiplier par $\sin x$ des deux côtés de l'équation et obtenir

$$\cos x - \cos 3x - \cos x \sin x = 0.$$

Nous utilisons ensuite la formule de factorisation de Simpson sur les deux premiers termes de l'équation. Celle-ci peut donc se transformer en

$$-2\sin(2x)\sin(-x) - \cos x \sin x = 0. \quad \boxed{B} \tag{1}$$

On peut alors factoriser en

$$\sin x(2\sin 2x - \cos x) = 0. \quad \boxed{C}$$

Nous pouvons ensuite utiliser l'expression de $\sin 2x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ et obtenir

$$\sin x(4\cos x \sin x - \cos x) = 0$$
$$\sin x \cos x(4\sin x - 1) = 0. \quad \boxed{D}$$

Par la règle du produit nul, on étudie les familles de solutions :

1. $\sin x = 0$ qui sont à rejeter en vertu des conditions d'existence $\boxed{E}$

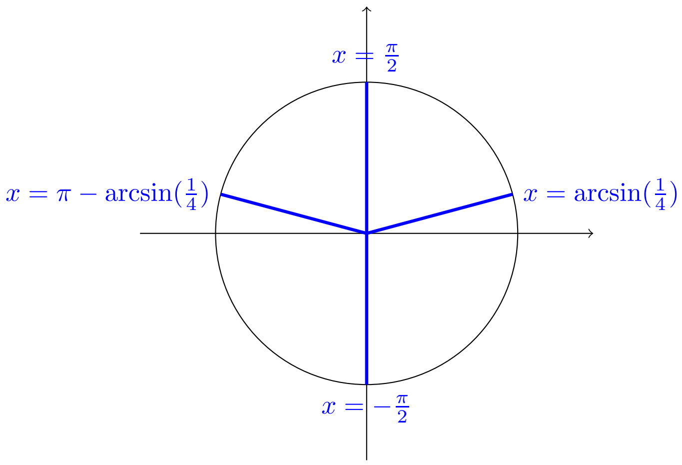


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

2. $\cos x = 0$ qui donne lieu aux solutions $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{\text{F}}$
3. $4 \sin x - 1 = 0$ qui donne lieu à $x = \arcsin(\frac{1}{4}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\boxed{\text{G}}$ et $x = \pi - \arcsin(\frac{1}{4}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{\text{H}}$

Question 2 *Démontrez qu'un triangle est rectangle si la relation*

$$\cos B + \cos C = \sin A$$

reliant la mesure de ses angles A, B, C est vérifiée.

Solution

En factorisant le membre de gauche de l'équation par application de la relation $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ et en utilisant la relation de duplication d'un angle $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ au membre de droite, il vient :

$$2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

La somme des mesures des angles d'un triangle étant égale à π, nous pouvons écrire $A + B + C = \pi \;\Rightarrow\; \cos \frac{B+C}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin \frac{A}{2}$. En remplaçant cette dernière expression dans le membre de gauche de l'égalité, nous obtenons :

$$2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{A}{2}\right) = 0$$

Le second facteur est factorisé par application de la relation $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ et donne :

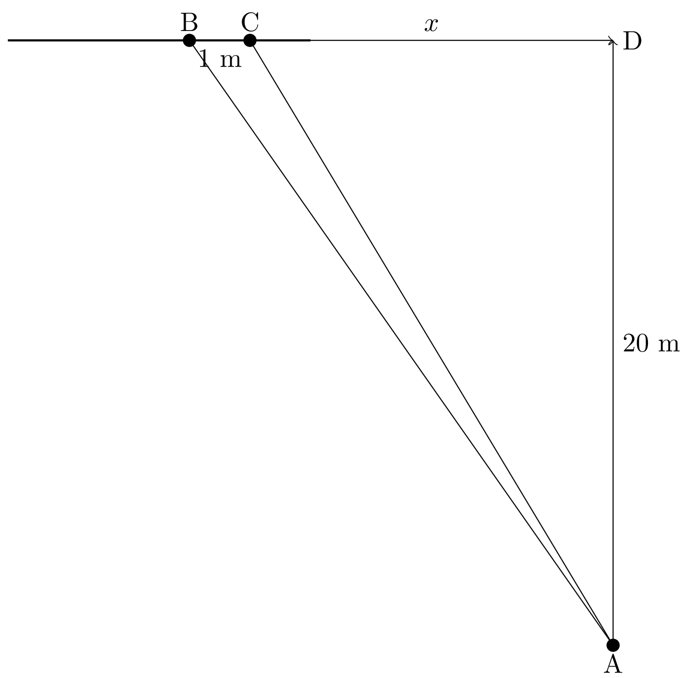
$$-4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B-C+A}{4} \sin \frac{B-C-A}{4} = 0$$

Par la règle du produit nul, cette relation est vérifiée lorsque une des conditions suivantes est vérifiée :

- $\sin\frac{A}{2} = 0$ soit $A = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Solution à rejeter puisque $0 < A < \pi$.
- $\sin\frac{B-C+A}{4} = 0$ soit $\frac{B-C+A}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. En tenant compte du fait que $A+B+C=\pi$, cette solution s'exprime $C = \frac{\pi}{2}(1-4k), k \in \mathbb{Z}$. Toutes ces solutions sont à rejeter sauf celle correspondant à $k=0$ pour laquelle $C = \frac{\pi}{2}$.
- $\sin\frac{B-C-A}{4} = 0$ soit $\frac{B-C-A}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. En tenant compte du fait que $A+B+C=\pi$, cette solution s'exprime $B = \frac{\pi}{2}(1+4k), k \in \mathbb{Z}$. Toutes ces solutions sont à rejeter sauf celle correspondant à $k=0$ pour laquelle $B = \frac{\pi}{2}$.

Les seules solutions retenues sont $B = \frac{\pi}{2}$ et $C = \frac{\pi}{2}$ et le triangle est bien rectangle en B ou C.

Question 3 *Lors d'un match de football, un coup franc doit être tiré du point A situé à 10 mètres à droite du poteau du gardien et à 20 mètres dans la profondeur du terrain (voir Figure). On suppose que le gardien occupe une largeur de 1 mètre sur sa ligne de but, entre les points B et C et que le tir s'effectuera en ligne droite en négligeant la présence d'autres joueurs sur le terrain. Déterminer la distance $x = \overline{DC}$ où doit se placer le gardien afin de couper 2 degrés de l'angle de tir de l'attaquant, c'est-à-dire, afin que l'angle $\widehat{BAC}$ vale 2 degrés.*



Solution

On note α l'angle $\widehat{CAD}$ et x la longueur recherchée $\overline{DC}$.
Dans le triangle ACD, on peut exprimer la tangente d'α comme $\tan(\alpha) = \frac{x}{20}$.
Dans le triangle ABD, on peut exprimer la tangente de l'angle $\widehat{BAD}$ comme $\tan(\alpha + 2°) = \frac{x+1}{20}$, en utilisant le fait que l'angle $\widehat{BAC}$ vaut $2°$ et que la distance $\overline{BC} = 1\ m$.
On peut ensuite utiliser la formule d'addition des tangentes sur la dernière expression et écrire

$$\tan(\alpha + 2°) = \frac{\tan\alpha + \tan 2°}{1 - \tan\alpha \tan 2°}. \tag{2}$$

En remplaçant $\tan\alpha = \frac{x}{20}$ dans (2), et, afin de soulager la notation, $\tan 2°$ par t, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x}{20} + t}{1 - t\frac{x}{20}} &= \frac{x+1}{20} \\ \frac{x + 20t}{20 - tx} &= \frac{x+1}{20}. \end{aligned} \tag{3}$$

Remarquons au passage que x doit être différent de $\frac{20}{\tan 2°}$ pour que l'expression ait du sens, ce qui correspond à un angle α de $88°$. En simplifiant (3), on obtient successivement

$$\begin{aligned} 20x + 400t &= (20 - tx)(x + 1) \\ 20x + 400t &= 20x + 20 - tx^2 - tx, \end{aligned}$$

ce qui, après simplification, donne l'équation du second degré

$$tx^2 + tx + 400t - 20 = 0.$$

On calcule le discriminant $\Delta = t^2 - 4t(400t - 20) = -1599t^2 + 80t$, ce qui, en remplaçant $t = \tan 2° \approx 0.0349$ nous donne $\Delta \approx 0.8437$. On obtient donc les deux solutions

$$x = \frac{-t \pm \sqrt{\Delta}}{2t},$$

soit 12.652 et -13.652. La deuxième solution est à rejeter car elle signifierait que le gardien est en dehors de son goal. On obtient donc finalement $x \approx 12.652\ m$.