
UNIVERSITÉ DE LIÈGE
EXAMEN D'ADMISSION AUX ÉTUDES
D'INGÉNIEUR CIVIL
Géométrie et géométrie analytique
Seconde session 2019

CONSIGNES A RESPECTER OBLIGATOIREMENT :

- ▷ L'examen dure **2h30**
 - ▷ Sur **chacune de vos feuilles**, indiquer votre **nom en lettres majuscules** et votre **prénom en lettres minuscules** (sauf la première, en majuscule)
 - ▷ Utiliser des **feuilles séparées pour chaque question** et **indiquer le numéro de la question sur la(les) feuille(s)**
 - ▷ **Justifier** toutes vos démarches.
-

Question 1

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole $\mathcal{P}$ par son équation cartésienne

$$x^2 = 4y.$$

1. Représenter la parabole.
2. Déterminer l'équation cartésienne d'une tangente quelconque à la courbe $\mathcal{P}$. (Attention, l'équation doit être valable pour n'importe quelle tangente à $\mathcal{P}$.)
3. Déterminer le lieu des points qui sont l'intersection de deux tangentes à $\mathcal{P}$ orthogonales entre elles.

Question 2

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d_1 , passant par les points A et B respectivement de coordonnées $(1, 2, 3)$ et $(-1, 0, 2)$, et la droite d_2 , passant par les points C, D respectivement de coordonnées $(0, 1, 7)$ et $(2, 0, 5)$.

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan Π parallèle à la droite d_1 et contenant la droite d_2 .
2. Déterminer des équations paramétriques et des équations cartésiennes de la droite d_3 passant par C et orthogonale à d_1 et d_2 .

Examen de géométrie du 1er juillet 2019
Corrigé de la question 2

Question 2

Soit G le centre de gravité du triangle ABC . Démontrer que l'on a

$$\frac{\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2}{\|GA\|^2 + \|GB\|^2 + \|GC\|^2} = 3$$

où $\|XY\|$ désigne la longueur du segment joignant le point X au point Y .

Réponse

L'hypothèse est la donnée d'un triangle ABC dont on désigne par G le centre de gravité.

La thèse est de montrer que l'on a

$$\frac{\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2}{\|GA\|^2 + \|GB\|^2 + \|GC\|^2} = 3.$$

Voici une manière de procéder pour démontrer la thèse.

Tout d'abord, on peut noter que la longueur du segment joignant deux points est aussi la norme (longueur) des vecteurs joignant les deux points (l'ordre des points n'a pas d'importance).

Cela étant, puisque G est le centre de gravité du triangle ABC , pour tout point X on a

$$3\overrightarrow{XG} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}.$$

Dans le cas particulier où $X = G$, cette relation donne

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

qui fournit

$$\left\| \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \right\|^2 = 0.$$

Cette expression se développe comme suit

$$\left\| \overrightarrow{GA} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$$

ou, de manière équivalente (*)

$$\left\| \overrightarrow{GA} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 = 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC}.$$

Exprimons maintenant la valeur de $\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2$ (numérateur apparaissant dans la thèse) en fonction de vecteurs faisant intervenir le centre de gravité G . On a

$$\begin{aligned} & \|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2 \\ &= \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BC} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{CA} \right\|^2 \\ &= \left\| \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GA} \right\|^2 \\ &= \left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{CG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GA} \right\|^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GA} \\ &= 2\left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + 2\left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + 2\left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GA}. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité obtenue en (*), on obtient

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2 &= 2\left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + 2\left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + 2\left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 \\ &= 3 \left(\left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 \right) \\ &= 3 \left(\|GA\|^2 + \|GB\|^2 + \|GC\|^2 \right) \end{aligned}$$

et donc on a l'égalité que l'on devait démontrer.

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
EXAMEN D'ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
Géométrie et géométrie analytique
Seconde session 2019

Corrigé

Question 1

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole $\mathcal{P}$ par son équation cartésienne

$$x^2 = 4y.$$

1. Représenter la parabole.
2. Déterminer l'équation cartésienne d'une tangente quelconque à la courbe $\mathcal{P}$. (Attention, l'équation doit être valable pour n'importe quelle tangente à $\mathcal{P}$.)
3. Déterminer le lieu des points qui sont l'intersection de deux tangentes à $\mathcal{P}$ orthogonales entre elles.

Exemple de résolution

1. La courbe $\mathcal{P}$ est la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2/4$, $x \in \mathbb{R}$. La fonction f étant dérivable dans $\mathbb{R}$, la tangente au graphique de f au point de coordonnées $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^2/4)$ a pour coefficient angulaire $Df(x_0) = x_0/2$; l'équation cartésienne de cette tangente est donc

$$y - \frac{x_0^2}{4} = \frac{x_0}{2}(x - x_0)$$

ou encore

$$y = mx - m^2$$

en posant $m = \frac{x_0}{2}$. Il s'ensuit que les tangentes à $\mathcal{P}$ sont les droites d'équations cartésiennes

$$y = mx - m^2$$

où m est un paramètre réel.

2. En utilisant l'expression précédente pour l'équation d'une tangente, on obtient qu'un point $P(x, y)$ est un point du lieu si et seulement si il existe un réel non nul m tel que

$$\begin{cases} y = mx - m^2 \\ y = -\frac{1}{m}x - \frac{1}{m^2} \end{cases} \quad (*)$$

Cela étant, pour x, y réels et m réel non nul, on a (« élimination » du paramètre m)

$$\begin{cases} y = mx - m^2 \\ y = -\frac{1}{m}x - \frac{1}{m^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx - m^2 \\ m^2 y = -mx - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx - m^2 \\ (1 + m^2)y = -(m^2 + 1) \end{cases} \Rightarrow y = -1$$

On peut donc dire qu'un point P du lieu a des coordonnées cartésiennes (x, y) qui vérifient

$$y = -1$$

Démontrons maintenant que la droite d'équation cartésienne $y = -1$ est bien le lieu : vu ce qui précède, il reste à montrer que tout point $P(x_0, -1)$ de cette droite se trouve à l'intersection de deux tangentes à la courbe $\mathcal{P}$, ces tangentes étant orthogonales. Vu ce qui précède ((*)), cela revient à montrer l'existence d'un réel non nul m tel que

$$\begin{cases} -1 = mx_0 - m^2 \\ -1 = -\frac{1}{m}x_0 - \frac{1}{m^2} \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - x_0 m - 1 = 0$$

Etant donné x_0 , cette équation du second degré en m possède effectivement deux solutions réelles (et le produit de ces deux solutions est égal à -1).

Question 2

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d_1 , passant par les points A et B respectivement de coordonnées $(1, 2, 3)$ et $(-1, 0, 2)$, et la droite d_2 , passant par les points C, D respectivement de coordonnées $(0, 1, 7)$ et $(2, 0, 5)$.

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan Π parallèle à la droite d_1 et contenant la droite d_2 .
2. Déterminer des équations paramétriques et des équations cartésiennes de la droite d_3 passant par C et orthogonale à d_1 et d_2 .

Exemple de résolution

1. L'énoncé permet de dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, respectivement de composantes $(2, 2, 1)$ et $(2, -1, -2)$, sont deux vecteurs directeurs du plan Π . Comme ceux-ci ne sont pas parallèles et que le plan contient la droite d_2 (donc en particulier le point $C(0, 1, 7)$), l'équation cartésienne du plan Π peut être directement obtenue en exprimant l'annulation du déterminant suivant (qui exprime que $P(x, y, z)$ appartient au plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont linéairement dépendants)

$$\det \begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z-7 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z-7 & 1 & -2 \end{pmatrix} &= x(-4+1) - (y-1)(-4-2) \\ &\quad + (z-7)(-2-4) \\ &= -3x + 6y - 6z - 6 + 42 \\ &= -3(x - 2y + 2z - 12). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'équation demandée est

$$x - 2y + 2z = 12.$$

2. La droite d_3 doit être orthogonale à d_1 et à d_2 ; par définition du plan Π , un vecteur directeur de d_3 est donc fourni par un vecteur normal au plan, à savoir par exemple $\vec{n}(1, -2, 2)$. Cela étant, comme d_3 passe par $C(0, 1, 7)$, des équations paramétriques sont

$$\begin{cases} x = 0 + r \cdot 1 = r \\ y = 1 + r \cdot (-2) = 1 - 2r, \\ z = 7 + r \cdot 2 = 7 + 2r \end{cases} \quad r \in \mathbb{R}$$

et des équations cartésiennes sont

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-7}{2}.$$

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
EXAMEN D'ADMISSION AUX ÉTUDES
D'INGÉNIEUR CIVIL

Géométrie et géométrie analytique
Première session 2019

Question1

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé et on donne les points P d'abscisse 1, Q d'ordonnée 1 tels que les droites OP et OQ soient perpendiculaires. Déterminer le lieu de la projection orthogonale M de l'origine O sur la droite PQ .

Résolution:

Si P possède les coordonnées $(1, \lambda)$ et Q les coordonnées $(\mu, 1)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\lambda + \mu = 0$. Sous cette condition, le triangle POQ est isocèle puisque l'on a alors $|PO| = |QO| = \sqrt{1 + \lambda^2}$. On en déduit que le point M est le milieu du côté $[PQ]$, et possède donc les coordonnées

$$\left(\frac{1 - \lambda}{2}, \frac{1 + \lambda}{2} \right).$$

L'élimination de $\lambda \in \mathbb{R}$ fournit la droite d'équation cartésienne

$$x + y = 1,$$

qui est le lieu recherché.

Examen de géométrie du 1er juillet 2019
Corrigé de la question 2

Question 2

Soit G le centre de gravité du triangle ABC . Démontrer que l'on a

$$\frac{\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2}{\|GA\|^2 + \|GB\|^2 + \|GC\|^2} = 3$$

où $\|XY\|$ désigne la longueur du segment joignant le point X au point Y .

Réponse

L'hypothèse est la donnée d'un triangle ABC dont on désigne par G le centre de gravité.

La thèse est de montrer que l'on a

$$\frac{\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2}{\|GA\|^2 + \|GB\|^2 + \|GC\|^2} = 3.$$

Voici une manière de procéder pour démontrer la thèse.

Tout d'abord, on peut noter que la longueur du segment joignant deux points est aussi la norme (longueur) des vecteurs joignant les deux points (l'ordre des points n'a pas d'importance).

Cela étant, puisque G est le centre de gravité du triangle ABC , pour tout point X on a

$$3\overrightarrow{XG} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}.$$

Dans le cas particulier où $X = G$, cette relation donne

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

qui fournit

$$\left\| \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \right\|^2 = 0.$$

Cette expression se développe comme suit

$$\left\| \overrightarrow{GA} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$$

ou, de manière équivalente (*)

$$\left\| \overrightarrow{GA} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 = 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC}.$$

Exprimons maintenant la valeur de $\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2$ (numérateur apparaissant dans la thèse) en fonction de vecteurs faisant intervenir le centre de gravité G . On a

$$\begin{aligned} & \|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2 \\ &= \left\| \overrightarrow{AB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BC} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{CA} \right\|^2 \\ &= \left\| \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GA} \right\|^2 \\ &= \left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{BG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{CG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GA} \right\|^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GA} \\ &= 2\left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + 2\left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + 2\left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{GA}. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité obtenue en (*), on obtient

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2 &= 2\left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + 2\left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + 2\left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 \\ &= 3 \left(\left\| \overrightarrow{AG} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GB} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{GC} \right\|^2 \right) \\ &= 3 \left(\|GA\|^2 + \|GB\|^2 + \|GC\|^2 \right) \end{aligned}$$

et donc on a l'égalité que l'on devait démontrer.