Avril 2020

Admission aux études d'ingénieur civil

Simulation d'examen

Ce test vous est proposé pour vous permettre de vous confronter à des questions semblables à celles auxquelles vous serez confronté·e lors des épreuves d'analyse et de géométrie de l'examen d'admission.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'un examen normal : répondez aux questions seul·e, sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de trois heures.

- ***Rédigez vos réponses aux deux questions sur des feuilles séparées.***
- ***Indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre Prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque face et numérotez-la.***
- ***Soumettez votre solution par e-mail à l'adresse fsa@uliege.be pour le mercredi 29 avril à 19h.***
- ***Vos copies doivent impérativement être transmises au format pdf, en deux fichiers distincts correspondant aux deux questions de ce test et dont les noms sont construits sur le modèle NOM_Prenom_Q1.pdf et NOM_Prenom_Q2.pdf.***
- ***Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche avec votre NOM et votre Prénom.***

Question I

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x - 4}$$

où a désigne un paramètre réel strictement positif.

i. En considérant dans un premier temps uniquement les valeurs de $a > 4$, on demande
   (a) de déterminer le domaine de définition de f ;
   (b) de déterminer la parité éventuelle de f ;
   (c) de déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe ;
   (d) d'étudier la croissance/décroissance de f et de caractériser ses éventuels extrema ;
   (e) d'esquisser le graphique de f.

ii. Déterminer les changements à apporter aux réponses aux questions ci-dessus si $a \in]0, 4[$.

Question II

Sur les côtés OA et OB d'un triangle OAB rectangle en O, on construit les carrés $OACD$ et $OBEF$ à l'extérieur du triangle OAB.

i. Démontrer que la hauteur du triangle issue de O et les droites EF et CD sont concourantes.

ii. Démontrer que cette hauteur est également concourante avec les droites AE et BC.

SOLUTION TYPE

Avertissement : Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Le choix de la méthode est libre pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.

Question I

i. Considérons d'abord la cas où $a > 4$.

(a) La fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x - 4}$$

est définie pour toutes les valeurs de x qui vérifient les deux conditions

- $x^2 - a^2 \geq 0$, c'est-à-dire (puisque $a > 0$) $x \leq -a$ ou $x \geq a$, *$x^2 - a^2 \geq 0$: 1 pt*
- $x \neq 4$. *$x \neq 4$: 1 pt*

Sous l'hypothèse $a > 4$, le point $x = 4$ est déjà rejeté par la première condition de sorte que *Domaine : 1 pt*

$$\mathrm{dom} f =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$$

Total i.(a) : 3 pts

(b) Le domaine est symétrique par rapport à $x = 0$ mais *Pas de point pour la symétrie du domaine.*

$$f(-x) = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x + 4}$$

n'est égal ni à $f(x)$, ni à $-f(x)$. La fonction n'est donc ni paire ni impaire. *Total i.(b) : 1 pt*

(c) Quelle que soit la valeur du paramètre a, on

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x} = +1$$

de sorte que la fonction possède l'asymptote horizontale $y = 1$ en $+\infty$. De même, de *Limite en $+\infty$ et AH : 2 pts*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x - 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$$

on déduit que f possède l'asymptote horizontale $y = -1$ en $-\infty$. *Limite en $-\infty$ et AH : 2 pts*

Puisque la fonction possède des asymptotes horizontales en $+\infty$ et en $-\infty$, elle ne possède pas d'asymptote oblique.

Compte tenu de la forme du domaine de définition, la fonction ne possède pas d'asymptote verticale si $a > 4$. *Pas d'AV : 1 pt*

Total i.(c) : 5 pts

(d) La fonction f est dérivable sur son domaine de définition sauf aux points $x = \pm a$. On calcule

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)'(x-4) - \sqrt{x^2 - a^2}\,(x-4)'}{(x-4)^2} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}}(x-4) - \sqrt{x^2 - a^2} \cdot 1}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{x(x-4) - (x^2 - a^2)}{(x-4)^2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a^2 - 4x}{(x-4)^2\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Expression de $f'(x)$: 3 pts

Cette expression s'annule au seul point $x_\star = a^2/4$. *Zéro de $f'(x)$: 1 pt*

Puisque $a > 4$, on a

$$x_\star = \frac{a^2}{4} > a$$

Position de $x_\star$ par rapport à a (explicite ou dans un tableau) : 1 pt

Dès lors, les variations de f peuvent être décrites par le tableau suivant :

x		$-a$		4		$+a$		$x_\star$	
a^2-4x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x-4)^2\sqrt{x^2-a^2}$	$+$	0	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$

Signe de f', croissance/décrois. : 2 pts

La fonction est strictement croissante à gauche de $-a$ et entre $+a$ et $x_\star$. Elle est strictement décroissante pour $x > x_\star$. Dès lors, elle présente un maximum local en $x_\star$ où

$$f(x_\star) = \frac{\sqrt{\frac{a^4}{16}-a^2}}{\frac{a^2}{4}-4} = a\frac{\sqrt{a^2-16}}{a^2-16} = \frac{a}{\sqrt{a^2-16}} > 1$$

Max. local en $x_\star$: 1 pt

Valeur de $f(x_\star)$ (pas de point pour $f(x_\star) > 1$) : 1 pt

Total i.(d) : 9 pts

(e) Avant d'esquisser le graphique, on remarque que $f(\pm a) = 0$ et que

$f(\pm a) = 0$ par calcul ou sur les graphiques : 1 pt

$$\lim_{x\to -a^-} f'(x) = \lim_{x\to -a^-} \frac{a^2-4x}{(x-4)^2\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty$$

et, tenant compte du fait que $a > 4$,

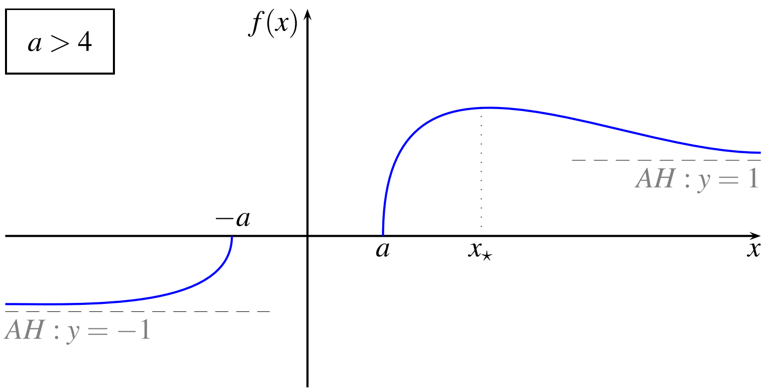
Valeurs de $\lim_{x\to a} f'(x)$ et $\lim_{x\to -a} f'(x)$: 1 pt

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^+} \frac{a^2-4x}{(x-4)^2\sqrt{x^2-a^2}} = +\infty$$

Le graphique présente donc des tangentes verticales en $-a$ et en $+a$.

Il vient finalement :

Graphique cohérent : 2 pts



Commentaire sur le P.I. pas attendu.

Remarquons que le graphique fait nécessairement apparaître un point d'inflexion à droite de $x_\star$.

Total i.(e) : 4 pt

TOTAL i. : 22 pts

ii. Dans le cas où $a \in]0,4[$, on doit introduire les modifications suivantes.

(a) Le domaine de définition de f doit être ajusté en excluant le point $x = 4$. On a donc

$$\text{dom} f =]-\infty, -a] \cup [a, 4[\cup]4, +\infty[$$

Nouveau dom$f$: 1 pt

(b) Pas de modification de la conclusion quant à la parité.

(c) Les asymptotes déterminées précédemment existent également si $a \in]0,4[$. En plus, on peut étudier l'existence d'une éventuelle asymptote verticale en $x = 4$ en calculant

Limites en $x = 4$ et AV si $a < 4$: 2 pts

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x-4} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x-4} = +\infty$$

Ceci traduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 4$.

(d) L'expression de la dérivée est inchangée.

Le point $x_\star$ n'appartient pas au domaine de définition de la fonction puisque

$$0 < x_\star = \frac{a^2}{4} < a \qquad \text{si} \qquad a \in]0,4[$$

Le tableau des variations peut alors être établi de la façon suivante :

x		$-a$		$x_\star$		$+a$		4	
a^2-4x	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x-4)^2\sqrt{x^2-a^2}$	$+$	0	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	0	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	0	$\searrow$	AV	$\searrow$

Variations f' : 2 pts

La fonction ne présente pas d'extremum local.

Absence de max : 1 pt

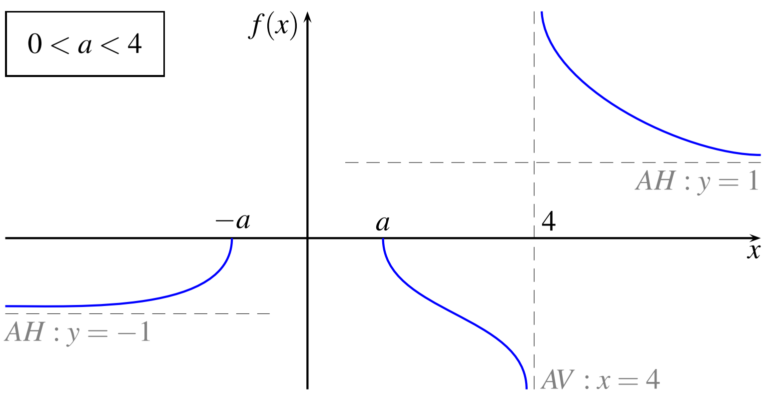
(e) Pour $a \in]0,4[$, on a

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^+} \frac{a^2-4x}{(x-4)^2\sqrt{x^2-a^2}} = -\infty$$

de sorte que le graphique présente toujours une tangente verticale en $x=a$ mais y est décroissante.

Le graphique de la fonction peut être esquissé comme suit :

Nouveau graphique : 2 pts

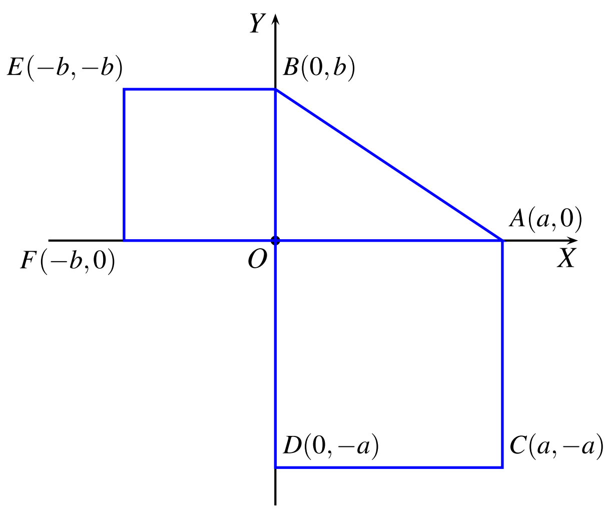


Total *ii.* : 8 pts

Total Q1 : 30 pts

Question II

Pour représenter la configuration proposée, choisissons le point O comme origine d'un repère orthonormé dont l'axe des abscisses est la droite OA et l'axe des ordonnées la droite OB.
Dans ce repère, les différents points ont pour coordonnées $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(a,-a)$, $D(0,-a)$, $E(-b,b)$ et $F(-b,0)$ avec $a>0$ et $b>0$ puisque $OACD$ et $OBEF$ sont des carrés, que OAB est un triangle rectangle en O et que les carrés sont extérieurs au triangle.

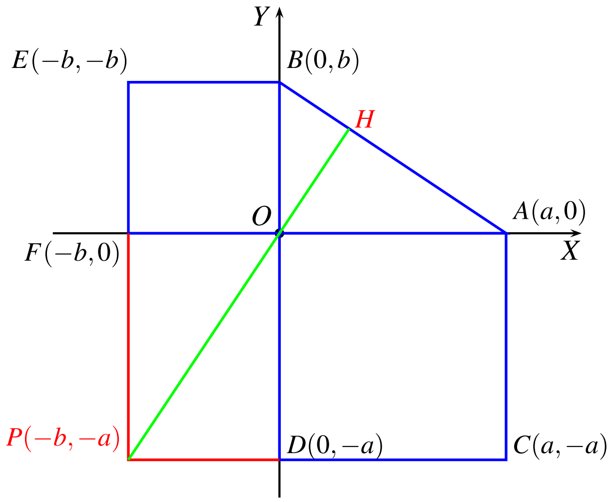


Cela étant, démontrons les points i) et ii) en utilisant le repère défini ci-dessus.

i. Les droites EF et CD ont respectivement pour équation cartésienne

$$x = -b \quad \text{et} \quad y = -a.$$

Leur intersection est un point P, de coordonnées $(-b, -a)$.



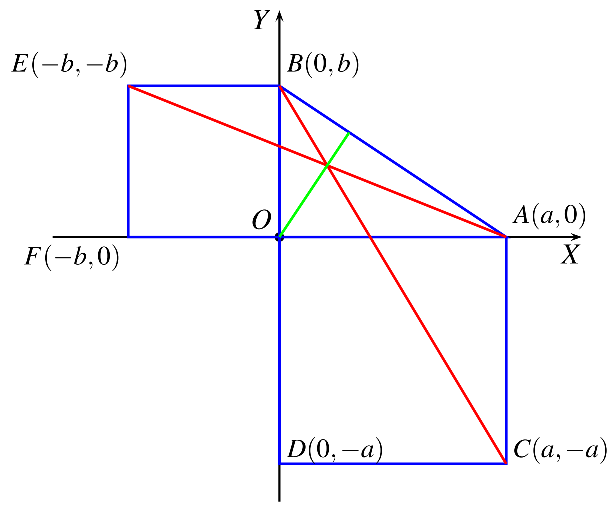
La hauteur issue de O est orthogonale à la droite AB, dont un vecteur directeur est le vecteur $\overrightarrow{AB}$, de composantes $(-a, b)$. Cette hauteur a donc pour équation cartésienne

$$ax - by = 0.$$

Comme les coordonnées de P vérifient cette équation, la hauteur issue de O et les droites EF et CD sont bien concourantes.

ii. Les droites AE et BC ont respectivement pour équation cartésienne

$$bx + (a+b)y - ab = 0 \quad \text{et} \quad (a+b)x + ay - ab = 0.$$



L'intersection de ces deux droites est donnée par les solutions du système

$$\begin{cases} bx + (a+b)y - ab = 0 \\ (a+b)x + ay - ab = 0. \end{cases}$$

Comme $b \neq 0$, on a successivement

$$\left\{\begin{array}{l} bx+(a+b)y-ab=0 \\ (a+b)x+ay-ab=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{a+b}{b}y+a \\ (a+b)\left(-\dfrac{a+b}{b}y+a\right)+ay=ab \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{a+b}{b}y+a \\ \left(-\dfrac{(a+b)^2}{b}+a\right)y=ab-a(a+b) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{a+b}{b}y+a \\ \left(-\dfrac{a^2+b^2+ab}{b}\right)y=-a^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{a+b}{b}y+a \\ y=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2+ab} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2+ab} \\ y=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2+ab} \end{array}\right.$$

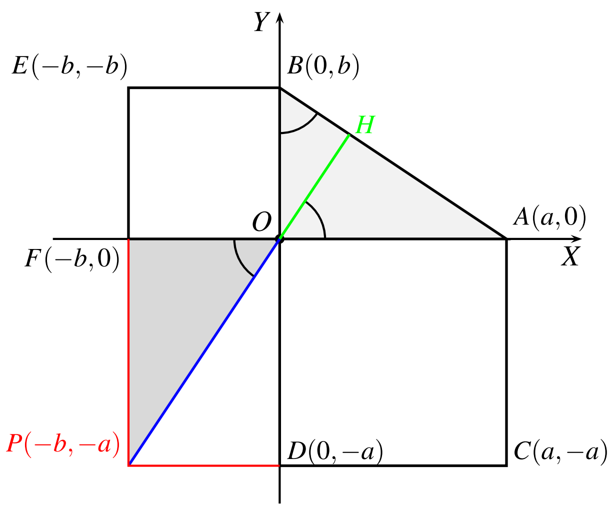
car $a^2+b^2+ab \neq 0$. Le système admet donc une seule solution, à savoir le couple

$$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2+ab}, \frac{a^2b}{a^2+b^2+ab}\right).$$

Ce couple vérifiant l'équation cartésienne de la hauteur issue de O, on conclut donc que cette hauteur et les droites AE et BC sont bien concourantes.

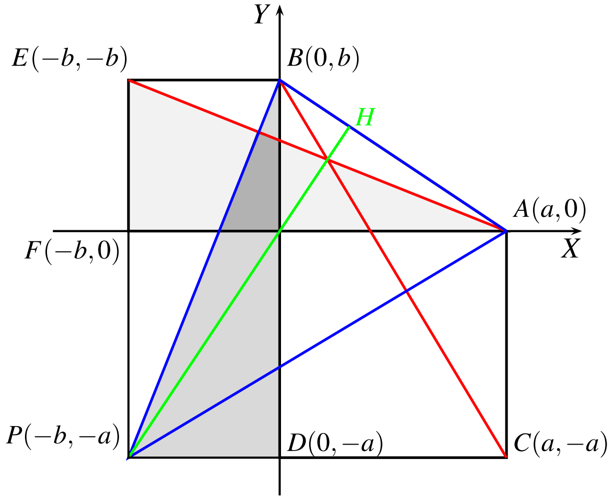
La question peut également être résolue en utilisant les concepts de la géométrie synthétique.

i. On peut montrer que les points P, O et H sont alignés en montrant que les angles $\widehat{HOA}$ et $\widehat{POF}$ sont égaux. Ceci en fait des angles opposés par le sommet et démontre que les segments OH et OP sont dans le prolongement l'un de l'autre.



D'une part, les triangles OAB et FPO sont isométriques. Dès lors, $\widehat{ABO}=\widehat{POF}$.
D'autre part, $\widehat{ABO}=\widehat{HOA}$ (angles à côtés perpendiculaires).
Dès lors, $\widehat{HOA}=\widehat{POF}$ et les points P, O et H sont alignés.

ii. En vertu du point i., PH est la hauteur du triangle APB issue de P. Le dessin ci-dessous suggère que AE et BC sont les hauteurs du même triangle issues respectivement de A et de B. Puisque les hauteurs d'un triangle se croisent en un même point, ceci permettrait de justifier que les trois droites considérées sont concourantes.



- Pour montrer que AE est la hauteur du triangle APB issue de A, considérons les triangles FAE et DBP. Ceux-ci sont isométriques avec FA et DB perpendiculaires. On en déduit que les hypothénuses BP et AE sont également perpendiculaires.
- Le même raisonnement dans les triangles DBC et FAP permet de démontrer la perpendicularité de BC et AP.

On en déduit que, PH, AE et BC sont effectivement les hauteurs du triangle APB et sont concourantes.

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Question I

i. (a)
- Difficulté à résoudre l'inéquation $x^2 - a^2 \geq 0$ conduisant à l'oubli de la partie du domaine $x \leq -a$.
- Traduction des inégalités non strictes en intervalles ouverts.

(b)
- Vérification du caractère symétrique du domaine par rapport à $x = 0$ extrêmement rare. Il s'agit pourtant d'une condition indispensable pour pouvoir identifier une fonction paire ou impaire.
- Les étudiants se contentent d'exprimer $f(-x)$ et de conclure à l'absence de parité (imparité) sans écrire $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.

(c) Les étudiants ne savent pas vraiment quand ils doivent rechercher un type donné d'asymptote. En particulier, il est inapproprié
- de rechercher des asymptotes verticales en $x = a$ ou $x = -a$ puisque la fonction est définie et continue en ces points;
- de rechercher une asymptote verticale en $x = 4$ qui n'est pas un point d'accumulation du domaine de définition;
- de rechercher des asymptotes obliques alors que des asymptotes horizontales ont déjà été trouvées.

(d)
- On demandait d'étudier la croissance/décroissance de f et de caractériser ses éventuels extrema. Le tableau des variations devait donc décrire tout le domaine et pas seulement le comportement au voisinage du point stationnaire de la fonction.

- Quand il est demandé de caractériser un extremum, on attend sa position mais aussi la valeur de la fonction en ce point.
- Quand une expression mathématique peut être simplifiée, il faut le faire. Par exemple ici,

$$f\left(\frac{a^2}{4}\right) = \frac{\sqrt{\frac{a^4}{16} - a^2}}{\frac{a^2}{4} - 4} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 16}}$$

(e)

- Quand il y a un paramètre dans la fonction à étudier, le graphe doit être représenté pour une valeur quelconque du paramètre correspondant à un comportement qualitatif donné de la fonction et pas pour une valeur fixée du paramètre. Il faut faire apparaitre sur les axes les points caractéristiques en fonction du paramètre (ici, $-a$, $a^2/4$ et a en abscisse, -1, 1 et $f(a^2/4)$ en ordonnée.
- Le graphe doit tenir compte des informations obtenues sur la fonction dans les items précédents. De nombreux étudiants présentent un graphe totalement incohérent.
- La non-existence de la dérivées aux points $\pm a$ devait être traduite sur le graphique de la fonction par des tangentes verticales.

ii. (d) Il fallait ici remarquer l'absence de point stationnaire dans le domaine de la fonction puisque $(a^2/4) < a$ si $a < 4$, ce qui changeait fondamentalement les variations de la fonction.

(e) Ici aussi le graphique devait faire apparaitre des tangentes verticales en $x = \pm a$ ce qui entrainait l'apparition d'un point d'inflexion sur $]a, 4[$ pour concilier ce résultat avec l'asymptote verticale en $x = 4$.

Question II

- Dans toute démonstration, il est indispensable d'identifier les hypothèses et la thèse, c'est-à-dire ce que l'on sait et ce que l'on doit démontrer. Il n'est évidemment pas permis d'utiliser la thèse dans son raisonnement.
- Il faut toujours expliquer sa démarche, avec des phrases. Les dessins et développements mathématiques doivent être introduits. Il faut relier les différentes étapes de la démonstration.
- Un texte agréable à lire est aussi un texte écrit sans faute d'orthographe. L'orthographe devrait donc être vérifiée avant de rendre sa copie.
- Rappelons qu'un exemple ne constitue jamais une démonstration de la véracité d'un énoncé. La démonstration ne peut donc pas être réalisée dans un cas particulier seulement. Un contre-exemple permet par contre de démontrer qu'un énoncé est faux.
- Chacune des étapes de la démonstration doit être prouvée/justifiée.
- Il faut vérifier l'existence des solutions finales trouvées. Ici, au point ii. de la méthode analytique, il fallait préciser que $a^2 + b^2 + ab \neq 0$.