Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Septembre 2020

Question 1 *Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation trigonométrique :*

$$\tan^2(x) - 3\frac{\tan(x)}{\cos(x)} - \frac{1}{\cos^2(x)} = 1$$

et représenter les solutions en x *sur le cercle trigonométrique.*

Solution

On pose tout d'abord les conditions d'existence. On a que $\cos x \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant $\tan(x)$ par $\sin x/\cos x$, l'équation trigonométrique à résoudre peut se réécrire comme suit

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} \sin^2 x - 3\sin x - 1 &= \cos^2 x \\ \sin^2 x - 3\sin x - 1 &= 1 - \sin^2 x \\ 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

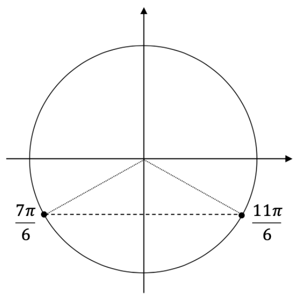
On pose alors $y = \sin x$, ce qui nous permet d'écrire l'équation précédente comme

$$2y^2 - 3y - 2 = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré admettant deux racines dans l'ensemble des réels $y_1 = 2$ et $y_2 = -1/2$. La première racine doit être éliminée étant donné que $\sin x$ est compris entre -1 et 1. La deuxième racine nous donne $\sin x = -1/2$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x &= \frac{7\pi}{6} + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z}, \\ x &= \frac{11\pi}{6} + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

On conserve toutes les solutions vu la condition d'existence exprimée plus haut. Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique :



$x \in \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

Question 2 *On voudrait construire un lance-balles afin d'entrainer un joueur de tennis professionnel. Pour simplifier, on suppose que ce lance-balles envoie des balles tellement rapides que celles-ci ont une trajectoire rectiligne. Le fabricant aimerait savoir quelle devrait être la hauteur d'où sont envoyées les balles afin qu'elles puissent passer au-dessus du filet et simuler un service rebondissant à l'intersection entre la ligne du couloir et la ligne du carré de service (du point A au point B sur la Figure 1. Les dimensions du terrain sont renseignées sur la Figure 1. De plus, on considérera que le filet peut être vu comme un arc de cercle de 50 mètres de rayon et de centre situé au milieu du terrain. La hauteur du filet au centre du terrain est réglementairement fixée à 91,4 centimètres (voir Figure 2).*
En supposant que le lance-balles est placé sur la ligne de fond, au milieu du terrain au point A, calculer la hauteur minimale nécessaire pour envoyer la balle sur le point B tout en garantissant que la balle passe au-dessus du filet au point C. Pour rappel, on suppose que la trajectoire est rectiligne, on suppose également que la balle est un point n'ayant pas de dimension.

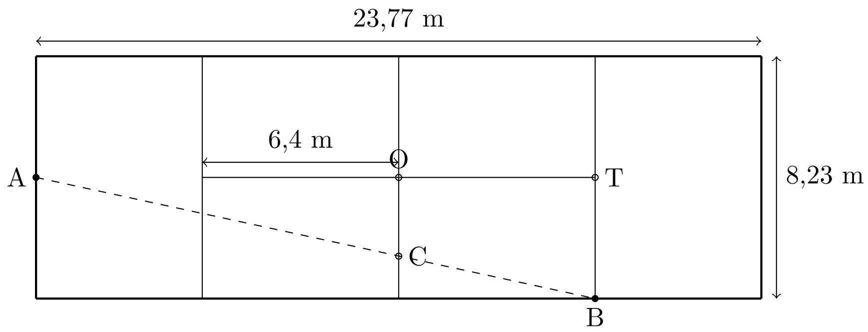


Figure 1 – Les dimensions du terrain de tennis

Solution

Appelons O le centre du terrain et T l'intersection des lignes de service (voir Figure).

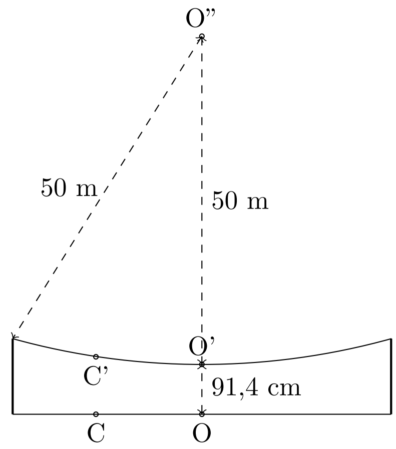


Figure 2 – La modélisation du filet

Dans un premier temps, nous nous plaçons dans le plan du sol et calculons l'angle $\widehat{OAC}$. Celui-ci s'obtient aisément grâce aux relations dans le triangle rectangle ABT, nous avons

$$\widehat{OAB} = \arctan\left(\frac{|BT|}{|AT|}\right)$$
$$\widehat{OAB} = \arctan(\frac{8.23/2}{6.4 + 23.77/2})$$
$$\approx 12.683°$$

Nous pouvons à présent calculer la distance $|OC|$ au niveau du sol. Nous avons $|OC| = \tan(\widehat{OAB}) \cdot |OA| = \tan(12.683) \cdot 11.885 \approx 2.675\ m$. Remarquons que cette distance peut également être directement calculée par le théorème de Thalès.

Connaissant la position du point C, nous pouvons à présent calculer la hauteur du filet au point C. Pour ce faire, nous nous plaçons à présent dans le plan du filet. Nous appelons O' le point situé sur le filet à la verticale du milieu du terrain, et O" le centre de l'arc de cercle décrivant le filet. De même, nous appelons C', le point à la verticale de C, à hauteur du filet. Nous cherchons à déterminer la hauteur $|CC'|$. Observons que nous pouvons déterminer l'angle $\alpha = \widehat{C'O''O'}$ car $\sin\alpha = \frac{|OC|}{50}$ et donc $\alpha = \arcsin(2.675/50) \approx 3.066°$. Connaissant cet angle, nous pouvons déterminer la hauteur $|CC'|$ comme étant égale à $|OO'| + (50 - 50 \cdot \cos\alpha) \approx 0.9856\ m$.

Pour clôturer l'exercice, il nous reste à nous mettre dans le plan de la trajectoire de la balle. Nous pouvons calculer l'angle de la trajectoire, c'est-à-dire l'angle $\beta = \widehat{CBC'}$. En effet, BC est obtenu par le théorème de Pythagore

$$|BC|^2 = 6.4^2 + ((8.23/2) - |OC|)^2 = 6.4^2 + (4.115 - 2.675)^2$$
$$|BC| \approx 6.56\ m.$$

Quant à l'angle de la trajectoire, il satisfait $\tan \beta = \frac{|CC'|}{|BC|}$ et donc $\beta = \arctan(\frac{0.9856}{6.56}) \approx 8.544°$. Finalement, pour déterminer la hauteur $|AA''|$, nous calculons d'abord $|AC|$ qui est donnée par le théorème de Pythagore

$$|AC|^2 = |AO|^2 + |OC|^2$$
$$|A'C'| = |AC| = \sqrt{11.885^2 + 2.675^2} \approx 12.182\ m$$

Nous avons finalement, dans le triangle rectangle $A'C'A''$, que l'angle $\widehat{A'C'A''} = \widehat{CBC'} = \beta$ et donc que

$$|A'A''| = \tan\beta \cdot |A'C'| \approx 0.1502 \cdot 12.182 = 1.83\ m.$$

Comme $|AA'| = |CC'| = 0.9856\ m$, on a finalement que la hauteur $|AA''| = 1.83 + 0.986 = 2.816\ m$.

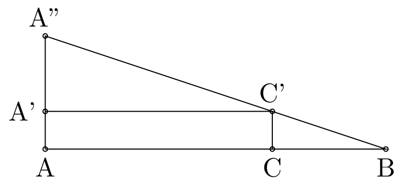


Figure 3 – Le plan de trajectoire de la balle

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Juillet 2020

Question 1 *Trouvez toutes les solutions de l'équation trigonométrique suivante*

$$3\left(\sin(x)+\cos(x)\right)-4\left(\sin^3(x)+\cos^3(x)\right)=0.$$

Tracez les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution

Soit on remplace $\sin^2 x$ par $(1-\cos^2 x)$ (resp. $\cos^2 x$ par $(1-\sin^2 x)$) et on obtient

$$3\left(\sin x+\cos x\right)-4\left(\sin x-\sin x\cos^2 x+\cos x-\cos x\sin^2 x\right)=0,$$

puis on met en évidence $(\sin x+\cos x)$ dans les différents termes.
Soit on met directement $(\sin x+\cos x)$ en évidence dans l'équation de départ, ce qui donne

$$(\sin x+\cos x)\left[3-4\left(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x\right)\right]=0.$$

Dans un cas comme dans l'autre, on obtient une forme factorisée de l'équation :

$$\boxed{(\sin x+\cos x)\left(4\sin x\cos x-1\right)=0.}$$

On a donc d'une part les solutions

$$\sin x=-\cos x \quad \rightarrow \boxed{x=\frac{3\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in Z}$$

Et d'autre part

$$2\sin x\cos x=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\sin(2x)=\frac{1}{2}},$$

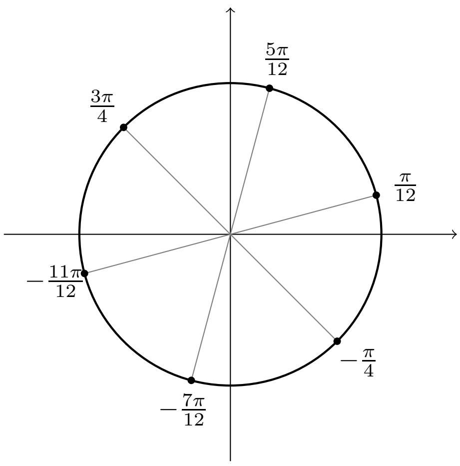
qui donne

$$2x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in Z \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in Z \end{cases}$$

et finalement

$$\boxed{x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + k\pi \ , \ k \in Z \\ \frac{5\pi}{12} + k\pi \ , \ k \in Z \end{cases}}$$

Représentation sur le cercle trigonométrique



Question 2 *A un instant initial, deux observateurs A et B distants de $2700\,\mathrm{m}$ voient un avion situé dans le plan vertical de la base d'observation sous des angles $\widehat{C_1AO_1} = 35°$ et $\widehat{C_1BO_1} = 64°$, l'avion se situant entre A et B. Après quelques secondes, ils font une seconde observation sous des angles $\widehat{C_2AO_2} = 30.5°$ et $\widehat{C_2BO_2} = 80°$, l'avion se situant à la droite de B. Déterminez l'angle de montée de l'avion par rapport au segment AB, c'est-à-dire déterminez l'angle formé par la droite C_1C_2 et la droite AB.*

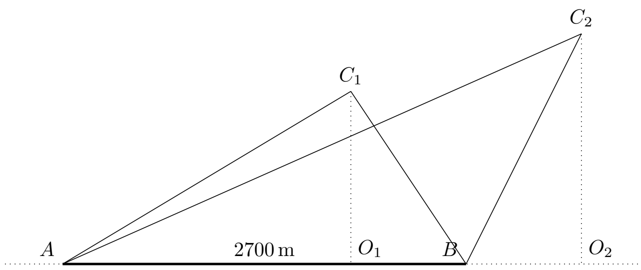


Figure 1 – Points d'observation

Solution

Dans le triangle ABC_1, $\widehat{C_1AB}+\widehat{C_1BA}+\widehat{AC_1B}=180°$ $\rightarrow$ $\widehat{AC_1B}=180°-35°-64°=81°$. Toujours dans ce triangle, l'application de la formule des sinus donne :

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\widehat{AC_1B}}=\frac{\overline{AC_1}}{\sin\widehat{C_1BA}}\ \rightarrow\ \overline{AC_1}=\frac{\sin 64°}{\sin 81°}\times 2700=2457\text{m}.$$

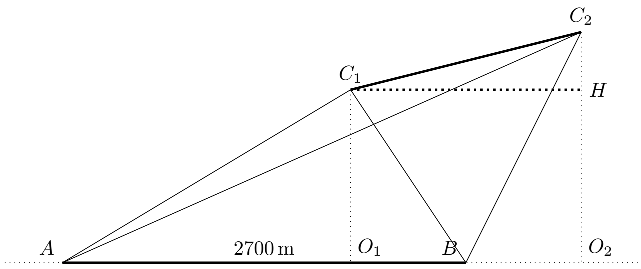
Dans le triangle rectangle C_1O_1A, il vient :

$$\sin\widehat{C_1AO_1}=\frac{\overline{O_1C_1}}{\overline{AC_1}}\ \rightarrow\ \overline{O_1C_1}=1409\text{m}$$

et

$$\cos\widehat{C_1AO_1}=\frac{\overline{AO_1}}{\overline{AC_1}}\ \rightarrow\ \overline{AO_1}=2013\text{m}$$

De manière similaire, dans le triangle ABC_2, on trouve $\overline{AC_2}=3497$m et dans le triangle AO_2C_2, $\overline{C_2O_2}=1775$m et $\overline{AO_2}=3013$m.
Traçons la parallèle à O_1O_2 passant par C_1 pour former le triangle rectangle C_1HC_2 dans lequel l'angle $\widehat{C_2C_1H}$ est l'angle recherché :



$$\text{tg}\,\widehat{C_1C_2H}=\frac{\overline{C_2H}}{\overline{C_1H}}=\frac{\overline{C_2O_2}-\overline{C_1O_1}}{\overline{AO_2}-\overline{AO_1}}\ \rightarrow\ \widehat{C_1C_2H}=20°.$$

Alternativement, il est possible de déterminer la longueur des côtés BC_1 et BC_2 en appliquant la formule des sinus respectivement dans les triangles ABC_1 et ABC_2 :

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\widehat{AC_1B}}=\frac{\overline{BC_1}}{\sin\widehat{C_1AB}}\ \rightarrow\ \overline{BC_1}=\frac{\sin 35°}{\sin 81°}\times 2700=1568\text{m}.$$

et

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\widehat{AC_2B}}=\frac{\overline{BC_2}}{\sin\widehat{C_2AB}}\ \rightarrow\ \overline{BC_2}=\frac{\sin 30.5°}{\sin 49.5°}\times 2700=1802\text{m}.$$

En appliquant Al-Kashi dans le triangle BC_1C_2, on obtient alors la longueur du segment C_1C_2 :

$$\begin{aligned}\overline{C_1C_2}&=\sqrt{\overline{BC_1}^2+\overline{BC_2}^2-2\overline{BC_1}\times\overline{BC_2}\times\cos\widehat{C_1BC_2}}\\&=\sqrt{1568^2+1802^2-2\times 1568\times 1802\times\ \cos(180°-64°-80°)}\\&=1065\text{m}\end{aligned}$$

Toujours dans le triangle BC_1C_2, la formule des sinus donne :

$$\frac{\overline{C_1C_2}}{\sin \widehat{C_1BC_2}} = \frac{\overline{BC_2}}{\sin \widehat{C_2C_1B}} \;\rightarrow\; \widehat{C_2C_1B} = \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_1C_2}} \sin \widehat{C_1BC_2} = 84°.$$

Puisque les angles $\widehat{HC_1B}$ et $\widehat{C_1BO_1}$ sont égaux (angles alterne-interne), L'angle recherché est donné par $\widehat{C_2C_1H} = \widehat{C_2C_1B} - \widehat{C_1BO_1} = 84° - 64° = 20°$.