Université de Liège

Examen d'admission aux études
d'ingénieur civil

Géométrie et géométrie analytique
Seconde session 2020

CORRIGE

Question 1

Démontrer que les droites d_m d'équation

$$mx + (1-m)y + m - 2 = 0$$

(où m est un paramètre réel) passent par un même point. Quel est ce point ?

Exemple de résolution.

Quel que soit le réel m, l'équation de d_m s'écrit aussi

$$m\,(x - y + 1) \ + \ y - 2 \ = \ 0.$$

Ainsi, si x, y sont tels que $x - y + 1 = 0$ et $y - 2 = 0$, alors le point de coordonnées (x, y) appartient à toutes les droites puisqu'alors $m\,(x - y + 1) \ + \ y - 2 \ = \ 0$. On a directement

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 2 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Le point de coordonnées $(1, 2)$ répond donc à la question.

Autre méthode

On peut aussi chercher l'intersection de deux droites particulières puis vérifier que le point d'intersection appartient à **toutes** les droites. Par exemple, pour $m = 0$ et $m = 1$, on a les équations

$$d_0 \ : \ y - 2 = 0 \qquad \text{et} \qquad d_1 \ : \ x - 1 = 0.$$

L'intersection de ces deux droites est le point de coordonnées $(1, 2)$.

Cela étant, comme on a

$$m\,1 \ + \ (1-m)\,2 \ + \ m - 2 \ = \ m + 2 - 2m + m - 2 \ = \ 0,$$

le point de coordonnées $(1, 2)$ vérifie l'équation de la droite d_m quel que soit m, c'est-à-dire est commun à toutes ces droites.

Question 2

On donne les quatre points A, B, C, D.

(i) Démontrer que le vecteur

$$\vec{v} = 4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$$

est indépendant du point M.

(ii) Démontrer que si $\vec{v} = \vec{0}$, alors le nombre réel

$$4\|\overrightarrow{MA}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MB}\|^2 - 5\|\overrightarrow{MC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{MD}\|^2$$

est indépendant du point M.

Exemple de résolution.

Exemple de résolution.

(i) Quel que soit le point M, on a

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD} &= 4\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)-5\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)-2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right) \\ &= 3\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}, \end{aligned}$$

vecteur indépendant de M.

(ii) Désignons par $\bullet$ le produit scalaire entre deux vecteurs. Cela étant, quels que soient les points M et N, on a

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2=\overrightarrow{MN}\bullet\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}\right)\bullet\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}\right)=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2+2\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{AN}+\left\|\overrightarrow{AN}\right\|^2$$

Cela étant, en utilisant cette relation avec les points B, C, D en guise de N, on obtient

$$\begin{aligned} 4\|\overrightarrow{MA}\|^2+3\|\overrightarrow{MB}\|^2-5\|\overrightarrow{MC}\|^2-2\|\overrightarrow{MD}\|^2 &= 3\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-5\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-2\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2+2\overrightarrow{MA}\bullet\left(3\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}\right) \\ &= 3\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-5\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-2\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 \end{aligned}$$

qui est bien un réel indépendant de M.

Université de Liège

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil

Géométrie et géométrie analytique
Première session 2020

CORRIGE

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les droites d_1 et d_2 respectivement d'équations cartésiennes

$$d_1 : \left\{ \begin{array}{l} x - z - 1 = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{array} \right. \qquad d_2 : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z + 2 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{array} \right.$$

(i) Montrer que ces droites ne sont pas parallèles.
(ii) Déterminer l'équation cartésienne du plan contenant d_1 et parallèle à d_2.

Exemple de résolution.

(i) Etant donné les équations de d_1, un vecteur directeur ($\vec{v}_1$) de celle-ci est le vecteur $\vec{n} \wedge \vec{n'}$ où $\vec{n}$ a pour composantes $(1, 0, -1)$ et $\vec{n'}$ a pour composantes $(0, 1, 3)$. Les composantes de $\vec{v}_1$ sont donc $(1, -3, 1)$.

De même, étant donné les équations de d_2, un vecteur directeur ($\vec{v}_2$) de celle-ci est le vecteur $\vec{w} \wedge \vec{w'}$ où $\vec{w}$ a pour composantes $(1, 2, 1)$ et $\vec{w'}$ a pour composantes $(3, 3, 2)$. Les composantes de $\vec{v}_2$ sont donc $(1, 1, -3)$.

Cela étant, les droites sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ont leurs composantes respectives proportionnelles. Cela n'est pas le cas ; donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

(ii) Notons π le plan dont on demande l'équation cartésienne. Comme ce plan est parallèle à d_2 et contient d_1, les vecteurs (non parallèles !) $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ en sont deux vecteurs directeurs. Dès lors, un vecteur normal à ce plan π est le vecteur $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, de composantes $4(2, 1, 1)$. Le plan π a donc pour équation cartésienne

$$2x + y + z \ = \ r$$

où il reste à déterminer le réel r. On trouve la valeur de r en utilisant le fait que d_1 doit être incluse dans le plan ; par exemple, le point de coordonnées $(1, -1, 0)$ est un point de d_1, donc doit appartenir au plan, c'est-à-dire en vérifier l'équation. On obtient donc

$$r \ = \ 2 - 1 + 0 = 1.$$

Il s'ensuit que π a pour équation cartésienne

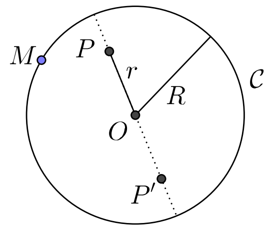
$$2x + y + z \ = \ 1.$$

Question 2

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Sur un diamètre de ce cercle, on fixe deux points P et P' équidistants de O. Un point mobile M parcourt $\mathcal{C}$. Démontrer que le produit scalaire $\vec{PM} \bullet \vec{P'M}$ ne dépend pas du point M.

Exemple de résolution.

Désignons par R le rayon du cercle et par r la distance entre P (resp. P') et O.



En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM}, \quad \vec{P'M} = \vec{P'O} + \vec{OM}.$$

On obtient ainsi

$$\begin{array}{rcl} \vec{PM} \bullet \vec{P'M} & = & \left(\vec{PO} + \vec{OM}\right) \bullet \left(\vec{P'O} + \vec{OM}\right) \\ & = & \vec{PO} \bullet \vec{P'O} \ + \ \vec{PO} \bullet \vec{OM} \ + \ \vec{OM} \bullet \vec{P'O} \ + \ \vec{OM} \bullet \vec{OM} \ (*) \\ & = & -r^2 \ + \ \vec{OM} \bullet \left(\vec{PO} + \vec{P'O}\right) \ + \ R^2 \\ & = & R^2 - r^2 \end{array}$$

en utilisant la distributivité du produit scalaire pour (*), le fait que, vu l'hypothèse, on a $\vec{PO} = -\vec{P'O}$ et le fait que

$$\vec{PO} \bullet \vec{P'O} = -\vec{PO} \bullet \vec{PO} = -r^2, \quad \vec{OM} \bullet \vec{OM} = R^2.$$