Admission aux études d'ingénieur civil
Test à blanc
24 Avril 2021

Consignes :

- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées.*
  Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
- *Inscrivez sur chacune de vos feuilles votre numéro d'ordre, votre nom de famille en* MAJUSCULES *et votre prénom en minuscules ainsi que le numéro de la question.*
- *Les calculatrices sont autorisées pour cet examen.*
- *Préparez une pièce d'identité sur la table.*

Question 1

Soit P_a le polynôme défini par :

$$P_a(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax - 8\,.$$

1. Si P_a est divisible par le polynôme $Q(x) = x^2 + 2$, quelle est la valeur du paramètre a ? Pour cette valeur de a, quelles sont les racines réelles du polynôme P_a ?
2. Le polynôme P_{-12}, obtenu en fixant $a = -12$, n'admet que des racines entières. Quelle est la factorisation de P_{-12} ?

Solution

Diviser un polynôme pA (dividende) par un polynôme non nul pB (diviseur) signifie trouver les polynômes uniques pQ (quotient) et pR (reste) tels que $pA = pB * pQ + pR$, où le degré de pR est strictement inférieur au degré de pB.[1] On dit aussi que pA est divisible par pB si pR est nul.
La division de P_a par Q donne :

$$P_a(x) = (x^2 + 2)(x^2 + 3x - 4) + (a - 6)x\,.$$

La valeur qui annule le reste est $a = 6$; de $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$ on déduit la factorisation :

$$P_6(x) = (x^2 + 2)(x - 1)(x + 4)\,;$$

les racines réelles sont -4 et 1. Un autre moyen de résoudre ce problème est d'écrire

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax - 8 = (x^2 + 2)(bx^2 + cx + d)\,,$$

de développer le produit et d'identifier les termes de même degré ; on trouve $(a, b, c, d) = (6, 1, 3, -4)$.

Ensuite, on sait que le produit des quatre racines (répétitions éventuelles comprises) du polynôme P_a est -8.[2] Si P_{-12} n'admet que des racines entières, elles doivent nécessairement se trouver dans l'ensemble $\{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$ des

1. Cas particulier : si pB est de degré 0 (scalaire non nul), pR est toujours le polynôme nul, dont on considère généralement qu'il n'a pas de degré.
2. Le produit des n racines du polynôme $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) est $(-1)^n a_0/a_n$.

diviseurs de -8. On voit que les racines sont $-1, 2, -2$ (l'une d'elles doit être double) et on trouve alors facilement la factorisation demandée :

$$P_{-12}(x) = (x+1)(x-2)(x+2)^2 .$$

Remarques.

1. Une note telle que 6+7 signifie 6/10 pour la sous-question 1 et 7/10 pour la sous-question 2.
2. La sous-question 2 a été en général mieux faite que la sous-question 1.
3. Une bonne copie comporte des phrases explicatives, pas seulement des équations et des tableaux.
4. Des réponses sans justification, même correctes, sont insuffisantes.
5. Si vous avez trouvé $a = 6$, factoriser $x^2 + 3x - 4$ suffit à la détermination des racines ; appliquer la méthode de Horner à $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$ est une perte de temps.
6. Il n'est pas évident, même pour une personne expérimentée, d'éviter d'emblée toute erreur de calcul. Cependant, ne pas détecter et corriger de telles erreurs quand cela peut se faire simplement et rapidement (comme ici) est une négligence à éviter.
7. Résoudre les questions des années précédentes (disponibles depuis 2003) est une excellente préparation. Notez que, en 2021, les systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues avec un paramètre réel ne font pas partie de la matière de l'examen d'admission.

Question 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique

$$\sin(3x) - \sin(x) + 2\sin^2(x) = 1$$

et représenter les solutions dans $]-\pi, \pi]$ sur le cercle trigonométrique.

Solution

Méthode 1

En utilisant la formule de factorisation $\sin p - \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$, il vient

$$\sin 3x - \sin x = 1 - 2\sin^2 x \;\Leftrightarrow 2\cos 2x \sin x = 1 - 2\sin^2 x.$$

En utilisant la formule de Carnot $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$, il est possible de réduire l'équation à

$$2\cos 2x \sin x = \cos 2x \;\Leftrightarrow\; \cos 2x\,(2\sin x - 1) = 0.$$

Par la règle d produit nul, on peut donc en déduire les ensembles de solution, avec d'une part

$$\cos 2x = 0 \;\Rightarrow\; 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

et d'autre part

$$2\sin x - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \sin x = \frac{1}{2}$$

qui donne deux ensembles de solutions $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Méthode 2

En utilisant la formule $\sin(3a) = 3\sin a - 4\sin^3 a$, on peut réécrire l'équation comme

$$-4\sin^3 x + 3\sin x - \sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0.$$

En réarrangeant les termes, on obtient donc une équation exprimée uniquement en $\sin x$, c'est-à-dire

$$4\sin^3 x - 2\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0.$$

On pose $t = \sin x$ ce qui nous donne $4t^3 - 2t^2 - 2t + 1 = 0$, ce qui peut se factoriser comme

$$(2t-1)(2t^2-1) = 0.$$

En appliquant la règle du produit nul, on obtient donc $\sin x = 1/2$ ou $\sin x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. La première équation nous donne $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. La deuxième équation nous donne $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

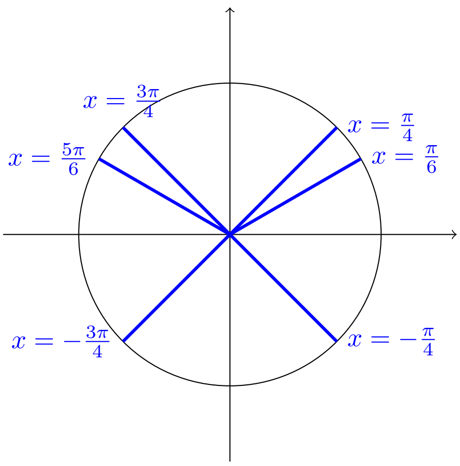


Figure 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

Remarques

1. Quelques étudiants obtiennent la forme correcte

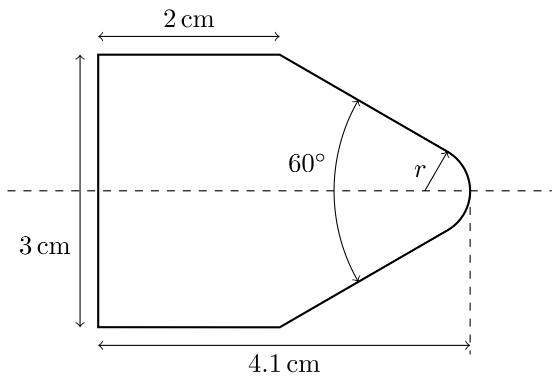
$$2\cos(2x)\sin x = \cos(2x).$$

   On ne peut pas simplifier $\cos(2x)$ des deux côtés. Au contraire, $\cos(2x) = 0$ fournit une famille de solutions.

2. Pour résoudre une équation, il est souvent utile de factoriser, mais il est important d'avoir un membre de droite nul. Certains étudiants obtiennent une équation de la forme $f(x)g(x) = 1$ et déduisent à tort que $f(x) = 1$ ou $g(x) = 1$. Une déduction de ce type ne peut se faire que pour un membre de droite nul.
3. Il est important de ne pas oublier le facteur 2 dans la formule de Simpson.
4. Il faut soigner la représentation du cercle trigonométrique. On demande les solutions comprises dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$. Il est donc important de
   — préciser les **valeurs** reportées sur le cercle trigonométrique,
   — préciser des valeurs comprises dans l'intervalle $[\pi, \pi[$ et non pas dans $[0, 2\pi[$ ou un autre intervalle comme certains le font,
   — préciser des valeurs en **radians** (et non en degrés),
   Représenter un cercle trigonométrique cohérent par rapport aux solutions trouvées (même si celles-ci ne sont pas correctes) est également important.

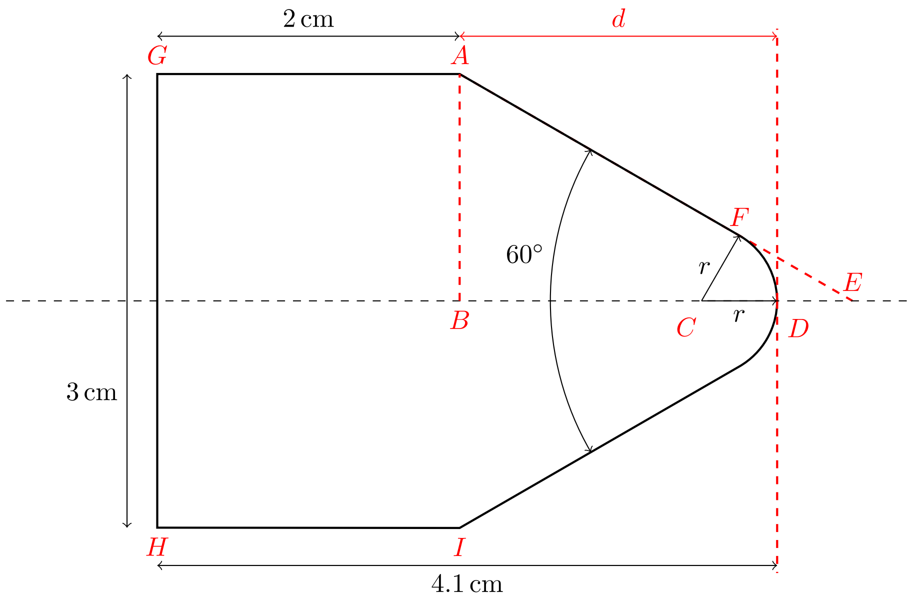
Question 3

Le plan ci-dessous montre un emporte-pièce symétrique. Sur cette vue, l'extrémité arrondie est un arc de cercle de rayon r et les côtés obliques sont tangents au cercle et forment un angle de $60°$. Les faces supérieure et inférieure sont horizontales. Utiliser les informations du plan pour déterminer la valeur du rayon r en travaillant avec 4 chiffres significatifs. Le dessin n'est pas à l'échelle.



Solution

Définissons les points A, B, C, D, F, G, H et I comme sur le dessin ci-dessous ainsi que la distance $d = 4.1\,\text{cm} - 2\,\text{cm} = 2.1\,\text{cm}$. En prolongeant le segment AF jusqu'à l'axe de symétrie de l'emporte pièce, nous définissons le point d'intersection E. Le segment AB est parallèle à GH par construction.



Les segments horizontaux AG et HI sont parallèles et, par symétrie de la pièce, sont perpendiculaires au segment GH. En conséquence, le segment AB est perpendiculaire à l'axe de symétrie BE et sa longueur vaut la moitié de celle de GH. Le triangle ABE ainsi défini est rectangle en B et nous pouvons écrire :

$$\tan\frac{60^\circ}{2} = \frac{\overline{AB}}{d+\overline{DE}} \rightarrow \overline{DE} = \frac{\overline{AB}}{\tan 30^\circ} - d = 0.4981\,\text{cm}$$

Le segment CF étant le rayon de l'arc de cercle, il est perpendiculaire à la tangente AF à l'arc de cercle. Le triangle CFE est rectangle en F et nous avons :

$$\sin\frac{60^\circ}{2} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}+\overline{DE}} = \frac{r}{r+\overline{DE}} \rightarrow r = \frac{\overline{DE}\ \sin 30^\circ}{1-\sin 30^\circ} = 0.4981\,\text{cm}$$

qui est le rayon du cercle demandé.

Remarques

1. Il n'est pas évident que la longueur du segment $\overline{DE}$ soit égale au rayon r. L'égalité $\overline{DE} = r$ est particulière à l'angle de 60° que forment les deux tangentes.
2. De la même manière, le triangle AIE est bien équilatéral **dans ce cas-ci** et $\overline{AE} = 3\,\text{cm}$ mais ce fait doit être démontré sur base de la symétrie et de la valeur de l'angle que forment les deux tangentes.
3. Il est important de faire un dessin suffisamment grand (comme ici sur toute la largeur de la page) afin de bien visualiser le problème et représenter correctement toutes les données **et surtout les différents points et longueurs que vous utilisez dans votre résolution**. Ce dessin doit se trouver sur votre feuille de résolution et pas sur la feuille d'énoncé qui n'est pas disponible aux correcteurs.

4. Ce n'est pas parce qu'un segment “a l'air” de passer par un point qu'il y passe forcément. De même, ce n'est pas parce que deux segments de droite “ont l'air” égaux en longueur, qu'ils le sont forcément. Toutes ces affirmations doivent être démontrées formellement par un raisonnement, soit géométrique, soit trigonométrique.