Université de Liège

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil

Géométrie et géométrie analytique

Première session 2021

CORRIGE

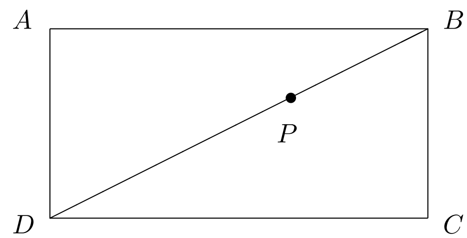
Question 1

Un point P appartient à la diagonale BD d'un rectangle $ABCD$. Démontrer l'égalité

$$\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{PD}.$$

L'égalité est-elle vérifiée si P n'appartient pas à la diagonale BD du rectangle ? Justifier.

Exemple de résolution.



Quel que soit le point P, on a (par la relation de Chasles)

$$\overrightarrow{AP} \;=\; \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PC} \;=\; \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC}.$$

Dans le rectangle $ABDC$, on a aussi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Cela étant, la distributivité du produit scalaire donne alors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{PC} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}\right) \bullet \overrightarrow{PC} \\
&= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{PC} \\
&= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BP} \bullet \left(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BP} \bullet \left(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{AB}\right) \\
&= \overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{PD} \;+\; \overrightarrow{AB} \bullet \left(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{BP}\right) \\
&= \overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{PD} \;+\; \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} \qquad \text{(Chasles)} \\
&= \overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{PD}
\end{aligned}$$

puisque, dans le rectangle $ABCD$, on a $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$.

Dans le développement précédent, on ne se sert pas de la position de P. L'égalité est donc correcte quelle que soit la position du point P.

Variante. On peut aussi démontrer le résultat via la géométrie analytique. De fait, on définit un repère orthonormé en prenant D comme origine, la droite DC comme axe des abscisses et la droite DA comme axe des ordonnées. Dans ce repère, soient alors $(0, a)$, $(c, 0)$ et (c, a) (c, a réels non nuls) les coordonnées respectives des points A, C, B. Ainsi, quel que soit le point P de coordonnées (x, y), les composantes des vecteurs intervenant dans l'égalité à démontrer étant

$$\overrightarrow{AP}\,(x, y-a), \quad \overrightarrow{PC}\,(c-x, -y), \quad \overrightarrow{BP}\,(x-c, y-a), \quad \overrightarrow{PD}\,(-x, -y)$$

on a
$$\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{PC} \; = \; x(c-x) - y(y-a) \; = \; cx + ay - x^2 - y^2$$
et
$$\overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{PD} \; = \; -x(x-c) - y(y-a) \; = \; cx + ay - x^2 - y^2.$$
L'égalité est donc correcte, quel que soit le point P.

Question 2

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point P de coordonnées $(1,1,1)$ et la droite d située à l'intersection des plans

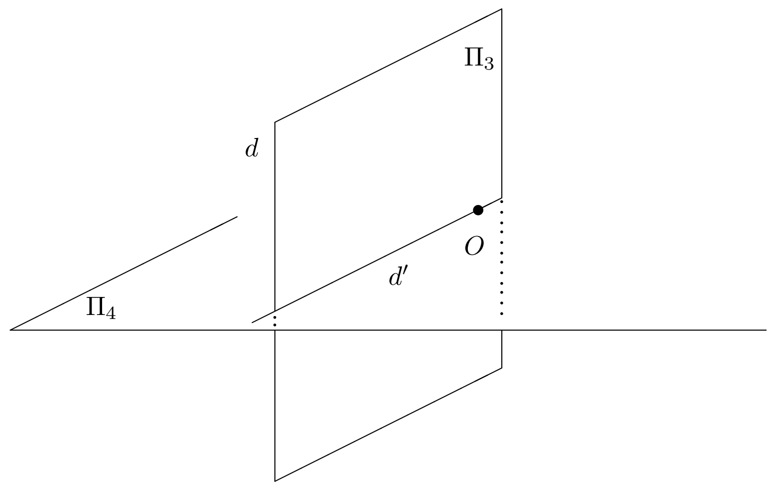
$$\Pi_1 : 2x + y = 5 \quad \textbf{et} \quad \Pi_2 : x + 2y + 3z = -2$$

(i) Déterminer l'équation cartésienne du plan Π passant par le point P et incluant la droite d.
(ii) Déterminer des équations paramétriques de Π_2.
(iii) Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite d' passant par l'origine, qui coupe d et lui est orthogonale.

Exemple de résolution. (i) Le plan Π appartient au faisceau d'axe d ; il a donc une équation cartésienne du type
$$\alpha(2x + y - 5) + \beta(x + 2y + 3z + 2) \; = \; 0$$
où α et β sont des réels non simultanément nuls. Ce plan contient le point P de coordonnées $(1,1,1)$ si et seulement si
$$\alpha(2 + 1 - 5) + \beta(1 + 2 + 3 + 2) \; = \; 0$$
c'est-à-dire si et seulement si
$$-2\alpha + 8\beta = 0.$$
Pour $\beta = 1$, on a $\alpha = 4$ donc Π a pour équation cartésienne
$$4(2x + y - 5) + (x + 2y + 3z + 2) \; = \; 0$$
c'est-à-dire
$$9x + 6y + 3z - 18 = 0$$
ou encore
$$3x + 2y + z - 6 = 0.$$

(ii) Un point de coordonnées (x, y, z) appartient à Π_2 si et seulement si
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Le plan passe donc par le point de coordonnées $(-2,0,0)$ et a comme vecteurs directeurs les vecteurs de composantes $(-2,1,0)$ et $(-3,0,1)$, lesquels ne sont pas parallèles. Des équations paramétriques du plan sont donc
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

(iii) Remarquons tout d'abord que l'origine n'appartient pas à d. Cela étant, par définition, la droite d' est dans le plan Π_3 contenant d et l'origine et aussi dans le plan Π_4 passant par l'origine et orthogonal à d. La droite d' existe et est unique car les plans Π_3 et Π_4 ne sont pas parallèles ; ils sont même orthogonaux (car la droite d est incluse dans le pan Π_3 et est orthogonale au plan Π_4).



Cherchons donc les équations cartésiennes de ce deux plans.

Le plan Π_3 appartient au faisceau d'axe d ; il a donc une équation cartésienne du type

$$\alpha(2x + y - 5) + \beta(x + 2y + 3z + 2) \ = \ 0$$

où α et β sont des réels non simultanément nuls. Ce plan contient l'origine si et seulement si

$$-5\alpha + 2\beta \ = \ 0.$$

En prenant $\alpha = 2$ et $\beta = 5$ on obtient l'équation $2(2x+y-5)+5(x+2y+3z+2) = 0$ c'est-à-dire $9x + 12y + 15z = 0$ ou encore

$$\Pi_3 \ : \ 3x + 4y + 5z = 0.$$

Passons à Π_4. Les vecteurs de composantes $(2, 1, 0)$ et $(1, 2, 3)$ sont normaux aux plans Π_1 et Π_2 respectivement. Leur produit vectoriel a pour composantes $(3, -6, 3)$; le vecteur $\vec{v}$ de composantes $(1, -2, 1)$ est donc un vecteur directeur de d. Le plan Π_4 passe par l'origine et est orthogonal à d ; il a donc pour équation cartésienne

$$x - 2y + z \ = \ 0.$$

L'intersection de ces deux plans étant la droite demandée, celle-ci a donc pour système d'équations cartésiennes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x + 4y + 5z & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

Université de Liège

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil

Géométrie et géométrie analytique
Seconde session 2021
CORRIGE

Question 1

On donne un quadrilatère plan quelconque $ABCD$. On désigne par I, J, K, L les milieux des côtés AB, BC, CD et DA respectivement. Démontrer les affirmations suivantes :

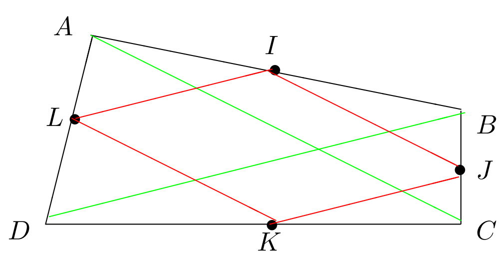
(a) $IJKL$ est un parallélogramme tel que

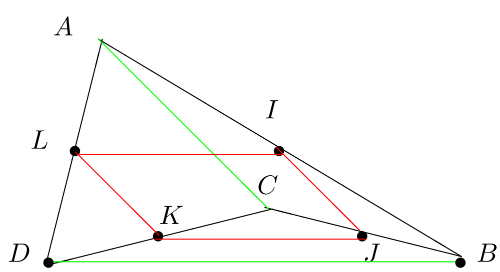
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}, \qquad \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{JK} = \frac{\overrightarrow{BD}}{2}$$

(b) Les diagonales de $ABCD$ et de $IJKL$ vérifient l'égalité

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{BD}\|^2 \ = \ 2\|\overrightarrow{IK}\|^2 + 2\|\overrightarrow{JL}\|^2$$

Exemple de résolution.





(a) Etant donné les définitions des points I, J, K, L, on a

$$\overrightarrow{AC} \ = \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \ = \ 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{BJ} \ = \ 2\overrightarrow{IJ}$$

et, de même

$$\overrightarrow{BD} \ = \ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \ = \ 2\overrightarrow{JC} + 2\overrightarrow{CK} \ = \ 2\overrightarrow{JK}.$$

On en déduit que

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}, \qquad \overrightarrow{JK} = \frac{\overrightarrow{BD}}{2}.$$

La même démarche donne aussi

$$\overrightarrow{AC} \ = \ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \ = \ 2\overrightarrow{LD} + 2\overrightarrow{DK} \ = \ 2\overrightarrow{LK}$$

et, de même

$$\overrightarrow{BD} \;=\; \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD} \;=\; 2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AL} \;=\; 2\overrightarrow{IL}.$$

Il s'ensuit finalement que

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}=\frac{\overrightarrow{AC}}{2},\qquad \overrightarrow{IL}=\overrightarrow{JK}=\frac{\overrightarrow{BD}}{2}$$

Etant donné les égalités précédentes, le quadrilatère $IJKL$ est effectivement un parallélogramme puisque ses cotés opposés sont parallèles.

Une autre méthode pour résoudre la première partie de cet exercice consiste à utiliser le théorème de Thalès.

(b) Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale au double de la somme des carrés de deux côtés adjacents. Dans le parallélogramme $IJKL$, ceci s'exprime par

$$\left\|\overrightarrow{IK}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{JL}\right\|^2 \;=\; 2\left(\left\|\overrightarrow{IJ}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{JK}\right\|^2\right).$$

En utilisant alors le point (a), on obtient

$$\left\|\overrightarrow{IK}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{JL}\right\|^2 \;=\; 2\left(\frac{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2}{4}+\frac{\left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2}{4}\right).$$

On en déduit l'égalité annoncée

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2+\|\overrightarrow{BD}\|^2 \;=\; 2\|\overrightarrow{IK}\|^2+2\|\overrightarrow{JL}\|^2.$$

Question 2

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A, B, C, D suivants

$$A(0,1,1),\quad B(0,-1,0),\quad C(1,0,1),\quad D(r,1,1)$$

où r est un paramètre réel.
(a) Déterminer un sytème d'équations cartésiennes de la droite d passant par A et B
(b) Déterminer l'équation cartésienne du plan Π_r passant par l'origine et par les points C et D
(c) Déterminer la valeur de r pour laquelle le plan Π_r est parallèle à la droite d

Exemple de résolution.

(a) Un vecteur directeur de la droite d est le vecteur $\overrightarrow{AB}$, de composantes $(0,-1-1,0-1)=(0,-2,-1)$ ou encore son opposé et elle passe par A, de coordonnées $(0,1,1)$. La droite a donc pour système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases}$$

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$, de composantes respectives $(1,0,1)$ et $(r,1,1)$ ne sont pas parallèles, donc les points O, C, D déterminent bien un plan.

Cela étant, vu sa définition, le plan contient la droite d' déterminée par l'origine et C, laquelle a pour système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x=z \\ y=0. \end{cases}$$

Le pan Π_r est le plan du faisceau d'axe d' et passant par D. Il a donc pour équation

$$\alpha(x-z)+\beta y=0$$

avec α, β non simultanément nuls et

$$\alpha(r-1)+\beta=0.$$

Les solutions de cette dernière équation (en les inconnues α, β) sont les couples $(s, s(1-r))$ avec $s \in \mathbb{R}$. Le plan Π_r a donc pour équation cartésienne

$$x-z+(1-r)y=0$$

(c) Les vecteurs normaux au plan Π_r sont les vecteurs multiples du vecteur de composantes $(1, 1-r, -1)$ et les vecteurs directeurs de la droite d sont les vecteurs multiples du vecteur de composantes $(0, 2, 1)$. La droite d et le plan Π_r sont donc parallèles si et seulement si les vecteurs de composantes $(1, 1-r, -1)$ et $(0, 2, 1)$ sont orthogonaux c'est-à-dire si et seulement si

$$1.0+2.(1-r)+(-1).1=0$$

c'est-à-dire

$$r=\frac{1}{2}.$$