Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Septembre 2021

Question 1 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique*

$$\cos^3 x - \sin^3 x = \frac{3}{5}(\cos x - \sin x). \tag{1}$$

Représenter précisément les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Solution

Méthode 1
Le membre de gauche de (1) peut se factoriser sous la forme

$$\begin{aligned}\cos^3 x - \sin^3 x &= (\cos x - \sin x)\left(\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x \cos x\right)\\ &= (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x)\\ &= (\cos x - \sin x)\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right).\end{aligned}$$

L'équation (1) se réécrit donc

$$\begin{aligned} &(\cos x - \sin x)\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 0\\ \Leftrightarrow\quad &\cos x - \sin x = 0 \text{ ou } \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\sin 2x = 0.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\cos x - \sin x = 0 \quad&\Leftrightarrow\quad \cos x = \sin x\\ &\Leftrightarrow\quad \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\\ &\Leftrightarrow\quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\sin 2x = 0\\ \Leftrightarrow\quad &\sin 2x = -\frac{4}{5}\\ \Leftrightarrow\quad &2x = \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right) + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi - \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\\ \Leftrightarrow\quad &x = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions s'écrit donc

$$\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + k\pi, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

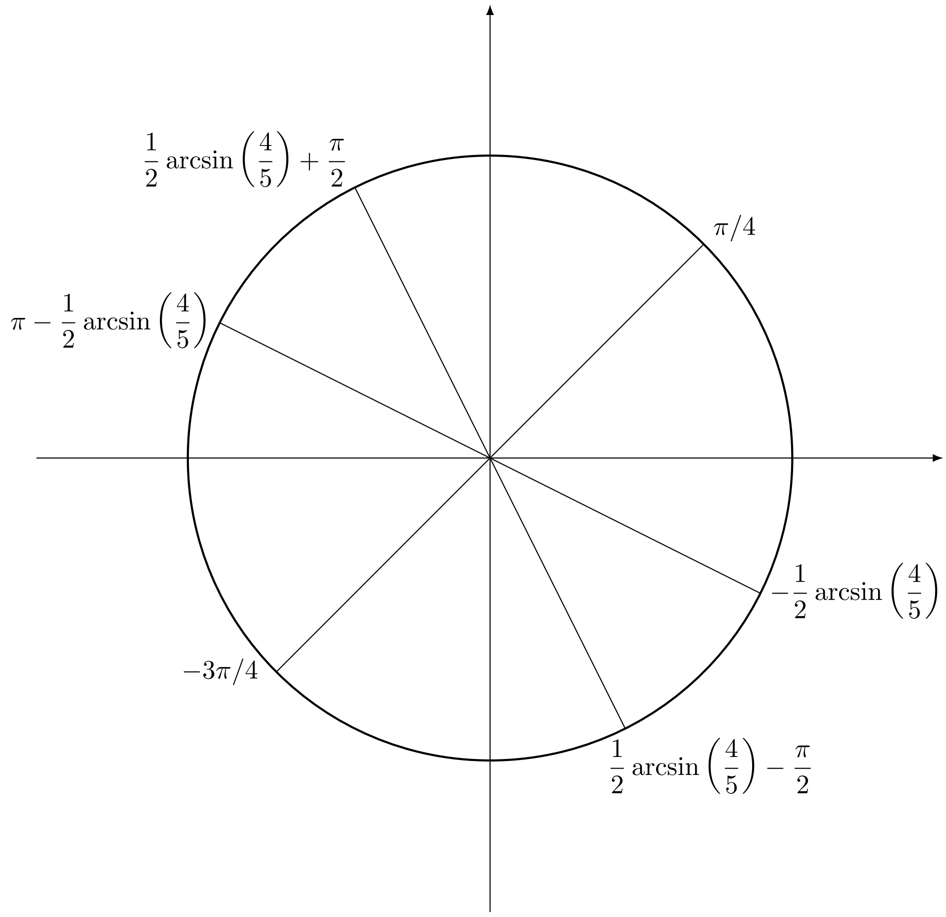


FIGURE 1 – Solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Méthode 2

On vérifie que la relation (1) n'est pas vérifiée si $\cos x = 0$.
On divise ensuite les deux membres de l'équation par $\cos^3 x$. On obtient

$$\begin{aligned}
& (1-\operatorname{tg}^3 x) = \frac{3}{5}(1-\operatorname{tg} x)\frac{1}{\cos^2 x} \\
\Leftrightarrow\quad & (1-\operatorname{tg}^3 x) = \frac{3}{5}(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg}^2 x) \\
\Leftrightarrow\quad & (1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x) = \frac{3}{5}(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg}^2 x) \\
\Leftrightarrow\quad & (1-\operatorname{tg} x)(2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+2) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{tg} x = 1 \text{ ou } (2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+2) = 0.
\end{aligned}$$

Or,

$$2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \operatorname{tg} x = -2.$$

L'ensemble des solutions s'écrit donc

$$\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi, \operatorname{arctg}(-2)+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

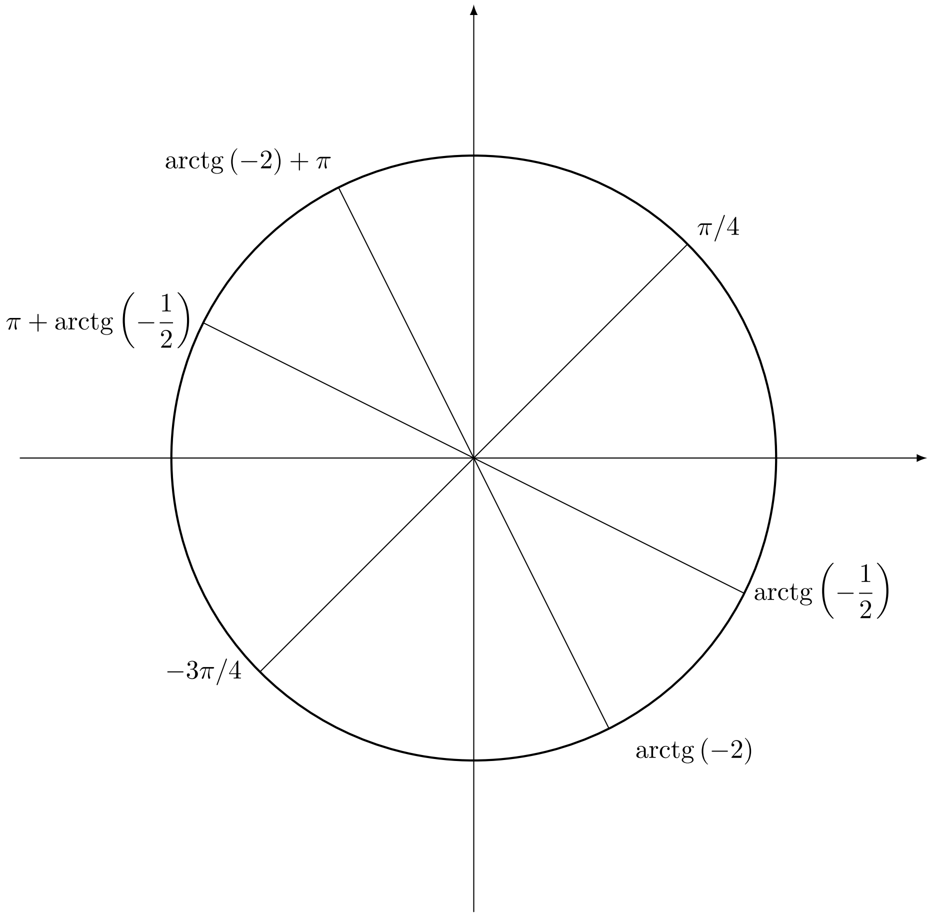


FIGURE 2 – Solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Méthode 3
Cette méthode est plus compliquée mais pourrait être suivie par certains étudiants. Commençons par réécrire l'équation (1) sous la forme

$$\begin{aligned}
\cos^3 x - \sin^3 x = \frac{3}{5}(\cos x - \sin x) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos x = \sin^3 x - \frac{3}{5}\sin x \\
&\Leftrightarrow \quad \cos x \left(\cos^2 x - \frac{3}{5}\right) = \sin x \left(\sin^2 x - \frac{3}{5}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \cos x \left(\frac{2}{5} - \sin^2 x\right) = \sin x \left(\sin^2 x - \frac{3}{5}\right) \quad (2)
\end{aligned}$$

Élevons les deux membres au carré :

$$\begin{aligned}
& \cos^2 x \left(\frac{2}{5} - \sin^2 x\right)^2 = \sin^2 x \left(\sin^2 x - \frac{3}{5}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (1 - \sin^2 x)\left(\frac{2}{5} - \sin^2 x\right)^2 = \sin^2 x \left(\sin^2 x - \frac{3}{5}\right)^2. \quad (3)
\end{aligned}$$

Attention : l'élévation au carré introduit des solutions parasites qu'il faudra éliminer. Posons $y = \sin^2 x$ et distribuons. Nous obtenons

$$50y^3 - 75y^2 + 33y - 4 = 0. \quad (4)$$

On voit assez facilement que l'équation (1) est vérifiée si $\sin x = \cos x$. On en déduit que $y = 1/2$ est solution de l'équation (4). L'équation (4) peut ainsi se factoriser

$$\begin{aligned}50y^3-75y^2+33y-4=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(y-\frac{1}{2}\right)(50y^2-50y+8)=0\\ &\Leftrightarrow \quad \left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{5}\right)\left(y-\frac{4}{5}\right)=0.\end{aligned}$$

Les solutions de (4) sont donc

$$\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right\}.$$

Les solutions de (3) s'en déduisent :

$$\begin{aligned}&\left\{\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\right.\\ &\arcsin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+2k\pi,\pi-\arcsin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+2k\pi,\\ &\left.\arcsin\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+2k\pi,\pi-\arcsin\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.\end{aligned}$$

L'étude des signes des membres de l'équation (2) permet d'éliminer les solutions parasites, c'est-à-dire les solutions de (3) qui ne sont pas solutions de (2). L'ensemble des solutions de (1) s'écrit finalement sous la forme compacte

$$\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi,-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+k\pi,-\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Méthode 4
On pose $y=x+\pi/4$. On a

$$\sin y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\,\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\,\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$$

et

$$\cos y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\,\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\,\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x-\sin x)$$

dont on déduit

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin y+\cos y)$$

et

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin y-\cos y).$$

L'équation (1) se réécrit en termes de y

$$\cos^3 y+3\sin^2 y\cos y-\frac{6}{5}\cos y=0. \tag{5}$$

En mettant $\cos y$ en évidence et en se servant de la relation $\cos^2 y=1-\sin^2 y$, on obtient

$$\cos y\left(2\sin^2 y-\frac{1}{5}\right)=0$$

dont on déduit

$$\cos y=0 \text{ ou } \sin^2 y=\frac{1}{10}$$

ou de manière équivalente

$$\cos y=0 \text{ ou } \sin y=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

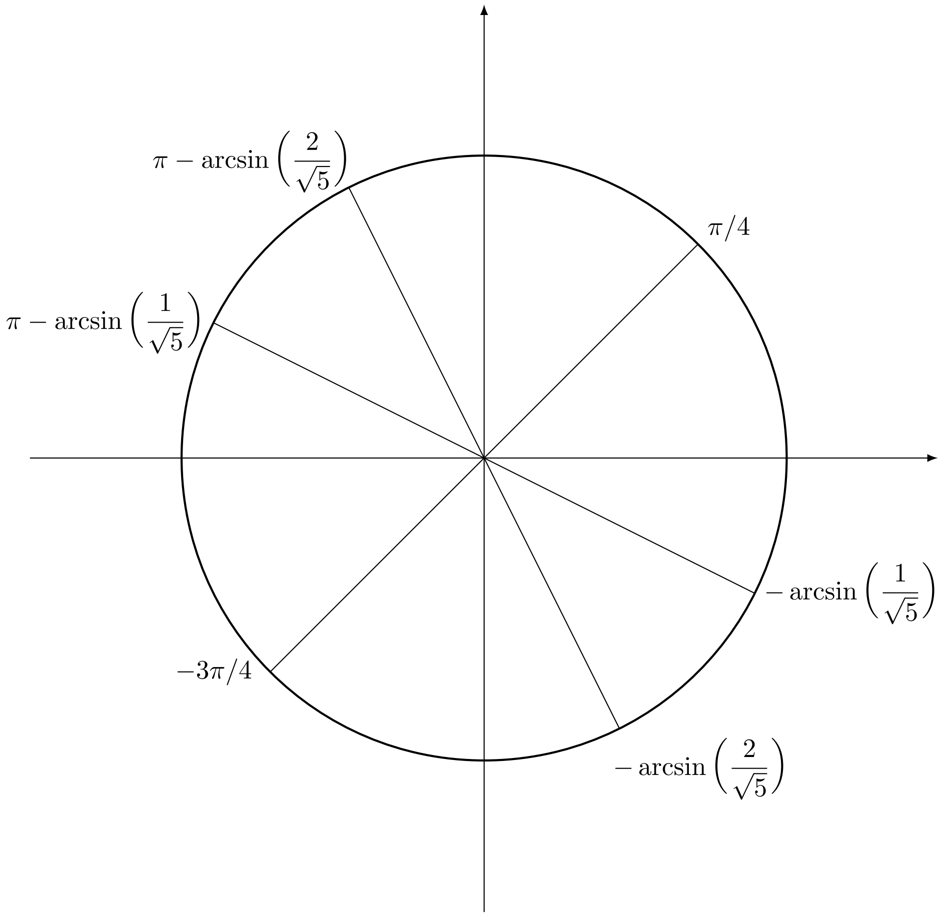


FIGURE 3 – Solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Les solutions de (5) sont donc

$$\left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + k\pi, \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Comme $y = x + \pi/4$, on en déduit que les solutions de (1) sont données par

$$\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + k\pi, -\frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

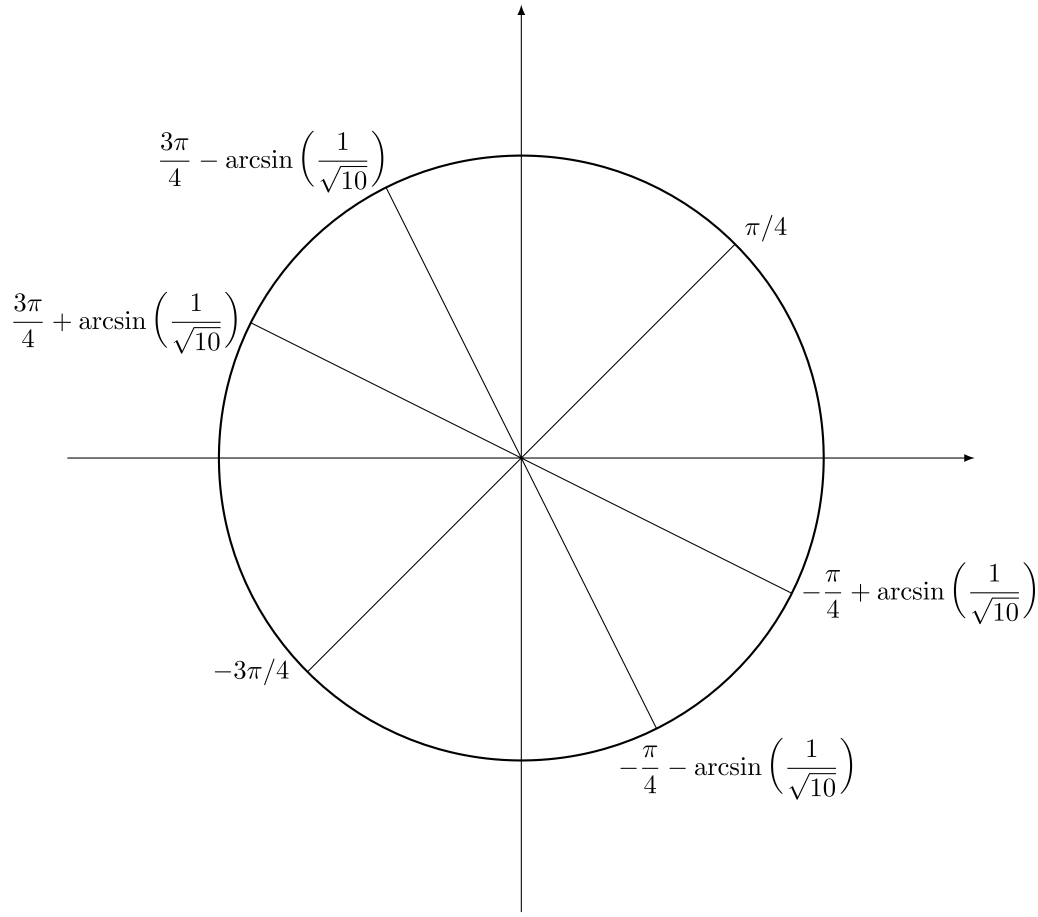


FIGURE 4 – Solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Question 2 *Trois cercles avec un rayon de respectivement* 5 cm*,* 3 cm *et* 2 cm *sont tangents deux à deux (voir Figure 5). Déterminer l'aire de la surface intérieure grisée délimitée par les trois cercles.*

Solution

Un dessin du problème ainsi que la notation utilisée sont représentés sur la Figure 6. On appelle A, B, C les trois centres des trois cercles. On appelle D, E, F les points de tangence des trois cercles. Les trois centres des trois cercles forment un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont respectivement de $|AB| = 8cm$, $|AC| = 7cm$ et $|BC| = 5cm$. En effet, les perpendiculaires aux tangentes des cercles sont alignées, car l'angle qu'elles forment est de $90+90 = 180$ degrés.

L'aire recherchée est égale à l'aire du triangle ABC de laquelle on retranche l'aire des trois secteurs circulaires. Nous devons donc calculer l'aire du triangle d'une part et calculer les trois angles du triangle d'autre part. Pour ce faire, nous utilisons la formule d'Al-Kashi. Nous obtenons

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC| \cos(\widehat{BAC}),$$

ce qui donne

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB||AC|} = \frac{64 + 49 - 25}{2 \cdot 8 \cdot 7} = 0.7857$$

En prenant l'arccos, on obtient $\widehat{BAC} = 38.21°$. En fonctionnant de manière similaire pour $\widehat{ABC}$, on obtient

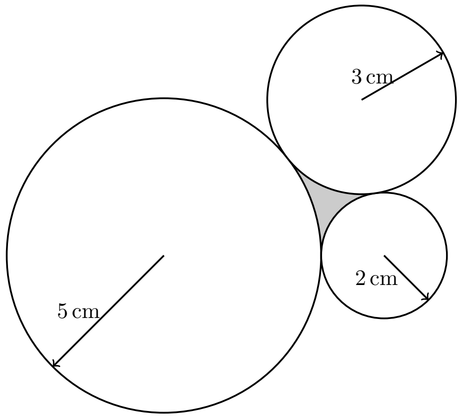


Figure 5 – Trois cercles tangents deux à deux.

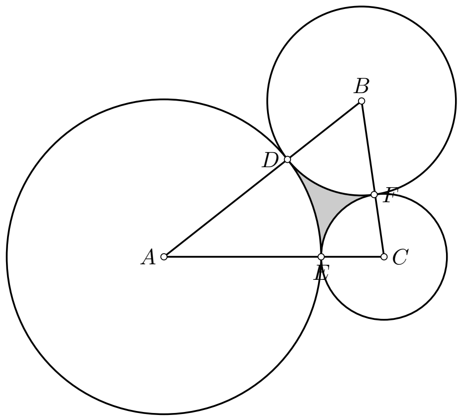


Figure 6 – Notation solution

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2|AB||BC|} = \frac{64 + 25 - 49}{2 \cdot 8 \cdot 5} = 0.5,$$

et donc $\widehat{ABC} = 60°$. Finalement, on obtient le troisième angle comme

$$\widehat{BCA} = 180° - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 81.79°.$$

On peut vérifier le résultat par Al-Kashi pour s'assurer qu'aucune erreur n'a été commise en chemin !

L'aire du triangle ABC vaut

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{|AB||AC|\sin(\widehat{ABC})}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \approx 17.32\ cm^2.$$

Les aires des secteurs circulaires peuvent être calculées comme

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\widehat{DBF}) &= \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 3^2 \quad \approx 4.712\ cm^2 \\
\mathcal{A}(\widehat{DAE}) &= \frac{38.21}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 \approx 8.336\ cm^2 \\
\mathcal{A}(\widehat{ECF}) &= \frac{81.79}{360} \cdot \pi \cdot 2^2 \approx 2.855\ cm^2
\end{aligned}$$

On trouve donc finalement que l'aire recherchée vaut

$$\mathcal{A}(\widehat{DEF}) = 17.32 - 4.712 - 8.336 - 2.855 \approx 1.417\ cm^2.$$

Examen de trigonométrie (juillet 2021)

Question 1

Trouver toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

$$\cos x - \cos(2x) - \sin(3x) = 0.$$

Présenter sur le cercle trigonométrique celles appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

Solution

Il n'y a pas de conditions d'existence à préciser puisque toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{A}}$

En utilisant la formule de factorisation de la différence de cosinus, on peut réécrire l'équation en factorisant les deux premiers termes $\boxed{\text{B}}$, comme

$$-2\sin(\frac{3x}{2})\sin(-\frac{x}{2}) - \sin(3x) = 0.$$

En posant $u = \frac{3}{2}x$ et en utilisant le fait que $\sin(2u) = 2\sin u \cos u$ $\boxed{\text{C}}$, il vient

$$-2\sin(\frac{3x}{2})\sin(-\frac{x}{2}) - 2\sin(\frac{3x}{2})\cos(\frac{3x}{2}) = 0,$$

ce qui, en mettant $\sin(\frac{3x}{2})$ en évidence et en divisant par 2, devient $\boxed{\text{D}}$

$$\sin(\frac{3x}{2})\left(-\sin(-\frac{x}{2}) - \cos(\frac{3x}{2})\right) = 0.$$

En annulant chacun des facteurs, on trouve des solutions potentielles. On a donc soit $\sin(\frac{3x}{2}) = 0$ qui admet comme solutions $\frac{3x}{2} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire $x = \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\boxed{\text{E}}$ soit

$$\begin{aligned}
\sin(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{3x}{2}) &= 0 \\
\cos(\frac{3x}{2}) &= \sin(\frac{x}{2}) \\
\cos(\frac{3x}{2}) &= \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}), \boxed{\text{F}}
\end{aligned}$$

ce qui admet comme solutions

$$\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions s'écrit donc

$$\left\{\frac{2}{3}k\pi, -\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Les solutions appartenant à $[-\pi, \pi[$ sont $\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \}$ et sont représentées à la Figure 1. $\boxed{\text{I}}$

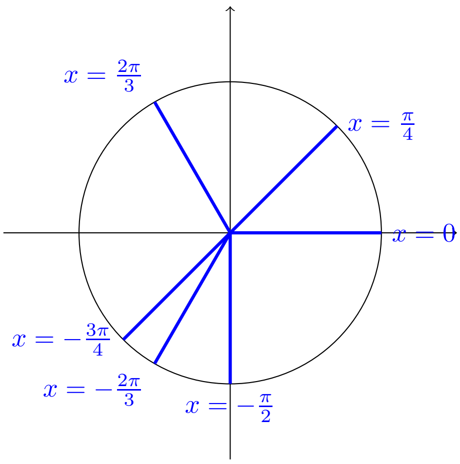


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

Question 2

Les billes d'un roulement sont enserrées entre deux gorges métalliques. La gorge de la bague extérieure possède un angle d'ouverture de 120° quant à celle de la bague intérieure, elle possède un angle de 100° comme décrit sur la figure de gauche ci-dessous. On suppose que les sommets des gorges se trouvent sur la même ligne verticale et on se rappelle que les surfaces de contact sont tangentes à la bille.

1. En utilisant les données du plan, déterminer le diamètre d de la bille tel que la distance entre les bagues intérieure et extérieure soit $H = 12\,\text{mm}$ exactement.
2. Si le roulement est constitué de 12 billes juxtaposées comme sur le dessin de droite ci-dessous, calculer le rayon R de la bague intérieure du roulement.

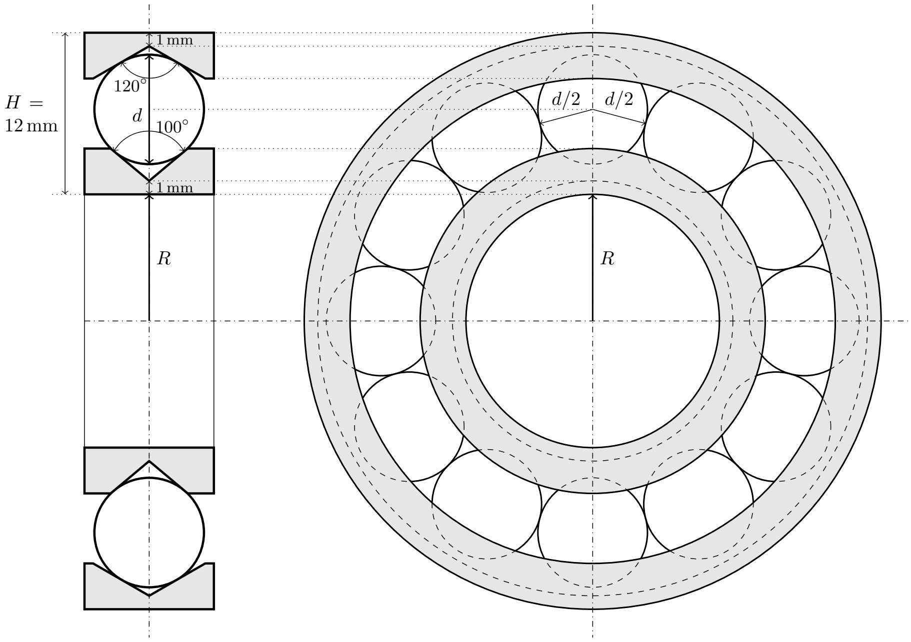
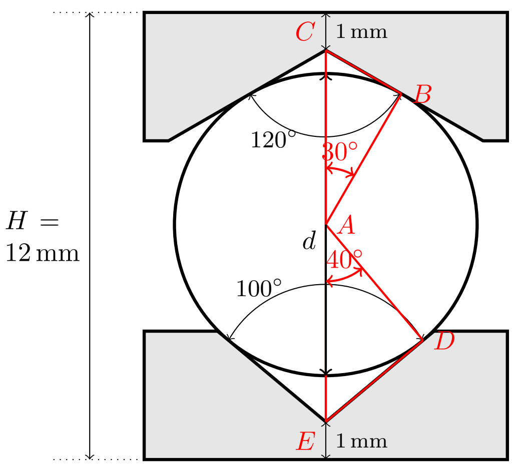


FIGURE 2 – Coupe transversale et vue latérale du roulement à bille.

Solution

Point 1

Les côtés des gorges métalliques sont tangents à la bille aux points de contact notés B et D pour les bagues extérieure et intérieure respectivement. Si le centre de la bille est noté A, les rayons du cercle AB et AD sont perpendiculaires aux côtés des gorges métalliques. En notant les sommets des gorges extérieure et intérieure C et E respectivement, les triangles rectangles ABD et ADE peuvent être définis. $\boxed{\text{A}}$



Par symétrie du problème :

$$\widehat{ACB} = \frac{120}{2} = 60^\circ \text{ et } \widehat{CAB} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ. \boxed{\text{B}}$$

ce qui permet de calculer la longueur $\overline{AC}$:

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{AC} = \frac{d}{2\ cos 30^\circ} \boxed{\text{C}},$$

De même pour le triangle ADE par symétrie :

$$\widehat{AED} = \frac{100}{2} \text{ et } \widehat{EAD} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ, \boxed{\text{D}}$$

La longueur $\overline{AE}$ vaut :

$$\cos 40^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \rightarrow \overline{AE} = \frac{d}{2\ cos 40^\circ}. \boxed{\text{E}}$$

Ensuite en notant que :

$$H - 2 \times 1\,\text{mm} = \overline{AC} + \overline{AE}, \boxed{\text{F}}$$

nous obtenons l'équation suivante permettant de déterminer le diamètre de la bille :

$$\frac{d}{2\ cos 30^\circ} + \frac{d}{2\ cos 40^\circ} = 10 \rightarrow d = \frac{2 \times 10}{\frac{1}{\cos 30^\circ} + \frac{1}{\cos 40^\circ}} = 8.13\,\text{mm} \boxed{\text{G}}$$

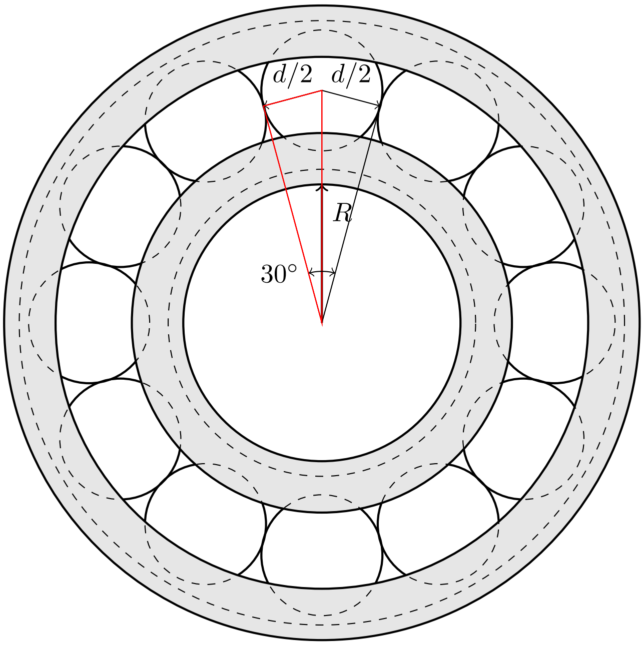
Point 2

Pour résoudre le point 2, il suffit de noter que la bille couvre un arc valant un douzième de la circonférence soit un angle de 30°. Par symétrie, nous pouvons tracer le triangle rouge qui est rectangle puisque le rayon est perpendiculaire à la tangente au cercle $\boxed{\text{H}}$.
Nous pouvons alors écrire :

$$\sin \frac{30^\circ}{2} = \frac{d}{2 \times \left(R + 1\,\text{mm} + \overline{AE}\right)} \text{ avec } \overline{AE} = \frac{d}{2\ cos 40^\circ} = 5.306\,\text{mm} \boxed{\text{I}}$$

En résolvant l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$R = \frac{d}{2 \times \sin 15^\circ} - 1\,\text{mm} - 5.306\,\text{mm} = 9.400\,\text{mm} \boxed{\text{J}}$$


$d/2$
$d/2$
R
$30°$