Université de Liège

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil

Géométrie et géométrie analytique

Corrigé de l'examen de juillet 2022

Question 1

On se place dans un repère orthonormé du plan et on considère le triangle de sommets $A(-11,-4)$, $B(1,1)$, $C(4,-3)$.

a) Quelle est la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$, exprimée sous la forme d'un nombre rationnel (donner la forme fractionnaire) ? Justifier votre réponse.

b) Déterminer des équations paramétriques de la médiane issue du sommet B. Justifier et expliquer votre raisonnement.

c) Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice du côté AB. Justifier et expliquer votre raisonnement.

d) Déterminer l'équation cartésienne de la hauteur issue du sommet B. Justifier et expliquer votre raisonnement.

e) Représenter le triangle, la médiane, la médiatrice et la hauteur dont il est question ci-dessus.

Exemple de résolution. Dans ce qui suit, la notation $\|\vec{x}\|$ désigne la longueur (norme) du vecteur $\vec{x}$ et la notation $\vec{x} \bullet \vec{y}$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

a) Par définition du produit scalaire de deux vecteurs, on a l'égalité

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} \;=\; \|\overrightarrow{BA}\|\,\|\overrightarrow{BC}\| \cos\left(\widehat{ABC}\right).$$

Cela étant, comme les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont respectivement pour composantes $(-12,-5)$ et $(3,-4)$ leurs longueurs respectives sont égales à

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13 \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Par ailleurs, dans un repère orthonormé, le produit scalaire de deux vecteurs a pour expression analytique la somme des produits de leurs composantes respectives. Il s'ensuit que l'on a

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} \;=\; -36+20 \;=\; -16.$$

Il s'ensuit que l'on obtient

$$-16 \;=\; \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} \;=\; \|\overrightarrow{BA}\|\,\|\overrightarrow{BC}\| \cos\left(\widehat{ABC}\right) \;=\; 65 \cos\left(\widehat{ABC}\right)$$

donc finalement

$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) \;=\; -\frac{16}{65}.$$

Variante. On trouve également la valeur demandée en utilisant la relation

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 \;=\; \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\,\left\|\overrightarrow{BC}\right\| \cos\left(\widehat{ABC}\right)$$

dans laquelle on insère les valeurs des longueurs des vecteurs, calculées via les coordonnées des points.

b) La médiane issue du sommet B (notation d) est la droite qui passe par B et par le milieu M du côté AC. Le point M a pour coordonnées $((-11+4)/2, (-4-3)/2) = (-7/2,-7/2)$; comme le point B a pour coordonnées $(1,1)$ la médiane a pour vecteur directeur le vecteur de composantes $(1,1)$. Finalement, des équations paramétriques de d sont

$$\begin{cases} x = 1+r \\ y = 1+r \end{cases}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

c) La médiatrice (notation d') du côté AB est la droite passant par le milieu N du côté AB et qui est orthogonale à la droite passant par A et B, laquelle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de composantes $(12, 5)$. Ainsi, la droite d' passe par le point N de coordonnées $(-5, -3/2)$ et les composantes d'un de ses vecteurs directeurs sont $(-5, 12)$. Dès lors d' a pour équation cartésienne

$$\frac{x+5}{-5} \;=\; \frac{y+3/2}{12}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{-5} \;=\; \frac{y+3/2}{12} \quad &\Leftrightarrow \quad 12x+60 \;=\; -5y-15/2 \\ &\Leftrightarrow \quad 12x+5y+135/2 \;=\; 0, \end{aligned}$$

de sorte que l'équation demandée s'écrit également

$$12x+5y+135/2 \;=\; 0.$$

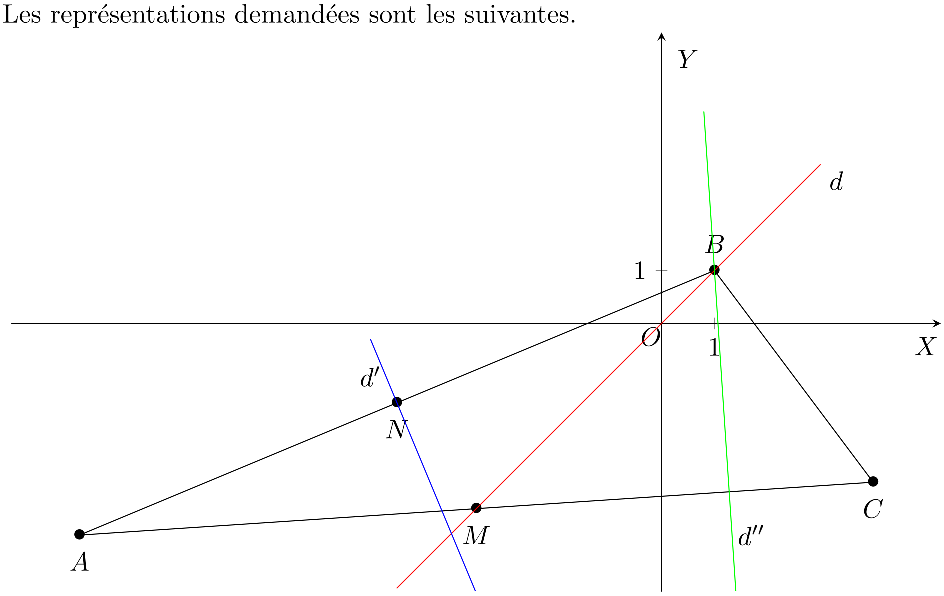
d) La hauteur (notation d'') issue de B est la droite qui passe par B et qui est orthogonale à la droite passant par A et C, laquelle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AC}$ de composantes $(15, 1)$. Ainsi, la droite d'' passe par le point B de coordonnées $(1, 1)$ et les composantes d'un de ses vecteurs directeurs sont $(-1, 15)$. Dès lors d'' a pour équation cartésienne

$$\frac{x-1}{-1} \;=\; \frac{y-1}{15},$$

ce qui se réécrit immédiatement comme suit

$$15x+y-16 \;=\; 0.$$

e) Les représentations demandées sont les suivantes.



Question 2

Dans un plan, on fixe un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un point P quelconque.
a) Une droite variable d passant par O rencontre $\mathcal{C}$ en deux points D et E. Démontrer que la valeur du produit scalaire de $\overrightarrow{PD}$ et $\overrightarrow{PE}$ reste constante lorsque d varie.
b) Une droite variable d' passant par P rencontre $\mathcal{C}$ en deux points M et N. Démontrer que la valeur du produit scalaire de $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ reste constante lorsque d' varie.

Exemple de résolution. Dans ce qui suit, la notation $\|\vec{x}\|$ désigne la longueur (norme) du vecteur $\vec{x}$ et la notation $\vec{x} \bullet \vec{y}$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

a) On a, en utilisant la relation de Chasles et la prorpiété de linéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PD} \bullet \overrightarrow{PE} &= \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD}\right) \bullet \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OE}\right)\\ &= \overrightarrow{PO} \bullet \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PO} \bullet \left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}\right) + \overrightarrow{OD} \bullet \overrightarrow{OE}.\end{aligned}$$

Cela étant, d'une part comme O est le milieu du segment DE, on a

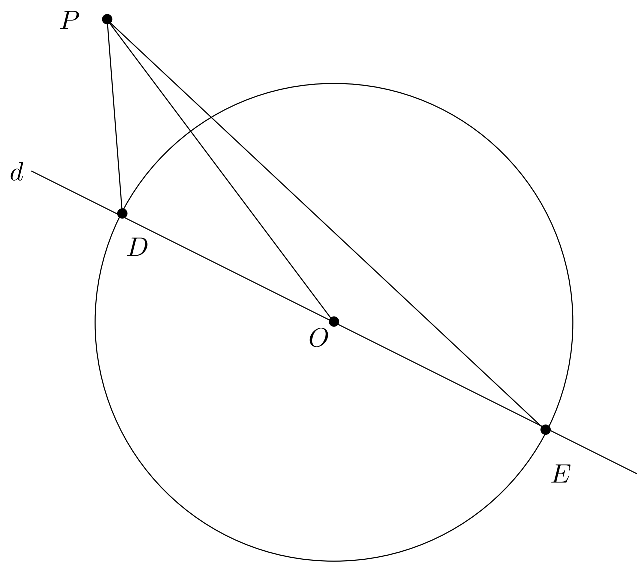
$$\overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OD}.$$

Dès lors on obtient

$$\overrightarrow{PD} \bullet \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PO} \bullet \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OD} \bullet \overrightarrow{OD} = \|\overrightarrow{PO}\|^2 - r^2,$$

où r est le rayon du cercle.

Cette expression est bien indépendante de E et D, donc de la position de la droite.



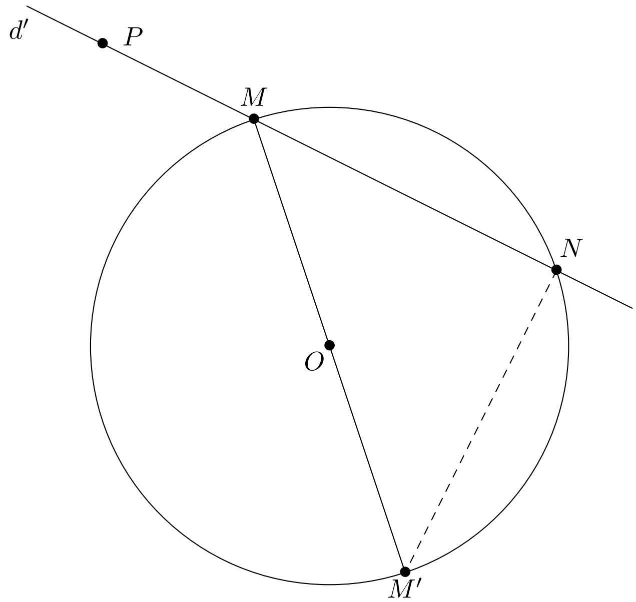
b) Notons M' le point du cercle diamétralement opposé à M. On a alors

$$\overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PM} \bullet \left(\overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{M'N}\right) = \overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{M'N}.$$

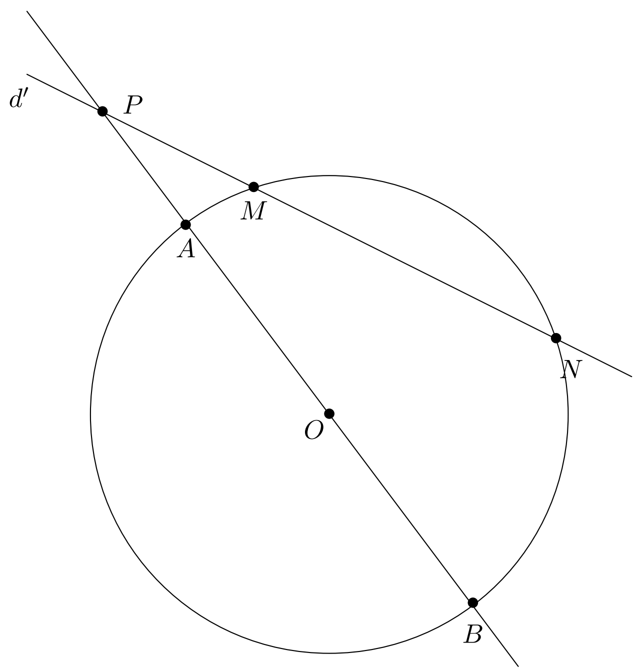
Cela étant, le triangle MNM' est rectangle en N comme triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre. Il s'ensuit que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{M'N}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire de produit scalaire nul. Ainsi on obtient, en utilisant la relation de Chasles, les propriétés de linéarité du produit scalaire et le fait que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont opposés

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{PN} &= \overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{PM'}\\ &= \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}\right) \bullet \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM'}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}\right) \bullet \left(\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OM}\right)\\ &= \overrightarrow{PO} \bullet \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{OM}\\ &= \|\overrightarrow{PO}\|^2 - r^2\end{aligned}$$

où r est le rayon du cercle. Cette expression est indépendante de M et N, donc de la position de la droite d'.



Variante.
<u>Cas où P est extérieur au cercle.</u>
Soient A, B les points d'intersection du cercle et de la droite passant par P et O.



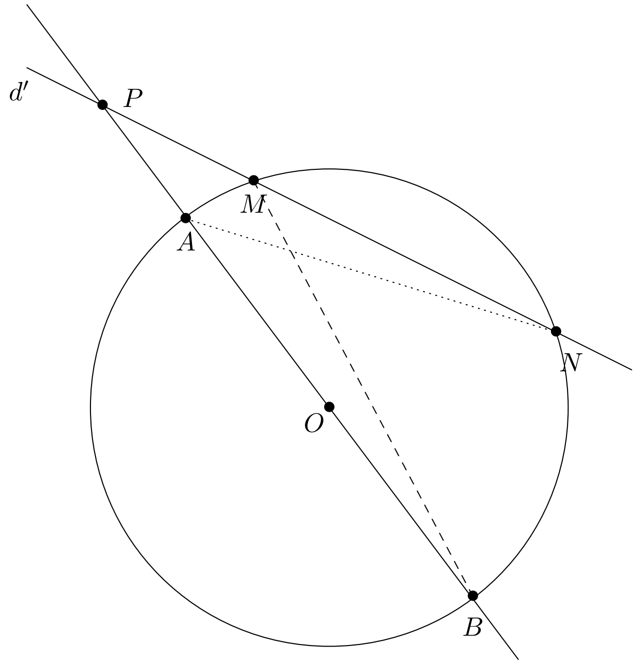
On considère alors les triangles PMB et PAN ; ils sont semblables car l'angle en P est commun et les angles en N et B sont égaux car ce sont des angles inscrits dans un cercle qui interceptent le même arc. On obtient donc

$$\frac{|PM|}{|PA|} = \frac{|PB|}{|PN|}$$

où $|XY|$ désigne la longueur du segment joignant les points X et Y. Ainsi,

$$\overrightarrow{PM} \bullet \overrightarrow{PN} = \|\overrightarrow{PM}\| \, \|\overrightarrow{PN}\| = |PM| \, |PN| = |PA| \, |PB|;$$

l'expression de droite étant indépendante de M et N donc de d', on conclut.



<u>Cas où P est intérieur au cercle.</u>
Ce cas se traite de manière analogue.

<u>Cas où P est sur le cercle.</u>
Dans ce cas le point P est l'un des points M ou N et dès lors le produit scalaire à considérer est toujours nul.

Variante.
On peut aussi répondre à la question en utilisant la géométrie analytique (par exemple en fixant un repère orthonormé dont l'origine est le centre du cercle).

Université de Liège

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil

Géométrie et géométrie analytique

Corrigé de l'examen de seconde session 2021- 2022

Question 1

On se place dans un repère orthonormé du plan et on considère le triangle de sommets $A(-2,-2)$, $B(-1,2)$, $C(3,1)$.
(a) Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
(b) Quelle est l'équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ? Justifier votre réponse, expliquer votre raisonnement.
(c) Représenter le triangle ABC ainsi que le cercle circonscrit demandé.

Exemple de résolution. Dans ce qui suit, la notation $\|\vec{x}\|$ désigne la longueur (norme) du vecteur $\vec{x}$ et la notation $\vec{x} \bullet \vec{y}$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

(a) Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a pour composantes $(-1,-4)$; le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour composantes $(4,-1)$. Leur produit scalaire vaut donc

$$(-1) \times 4 + (-4) \times (-1) = 0;$$

comme ce produit scalaire est nul, les vecteurs sont orthogonaux. Cela signifie ici que le triangle ABC est rectangle en B.

(b) Le cercle circonscrit au triangle ABC, c'est-à-dire le cercle qui passe par les trois sommets du triangle ABC, rectangle en B, est le cercle dont un diamètre est le segment AC. Ce cercle a donc pour centre le milieu M du segment AC et pour rayon la moitié de la longueur du segment AC. Ainsi, les coordonnées de M sont $(1/2,-1/2)$ et son rayon est égal à $\|\overrightarrow{AC}\|/2$. Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont égale à $(5,3)$ donc $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = 25+9 = 34$; il s'ensuit que le rayon du cercle vaut $\sqrt{34}/2$.

Ainsi, le cercle demandé a pour équation

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \;=\; \frac{17}{2}.$$

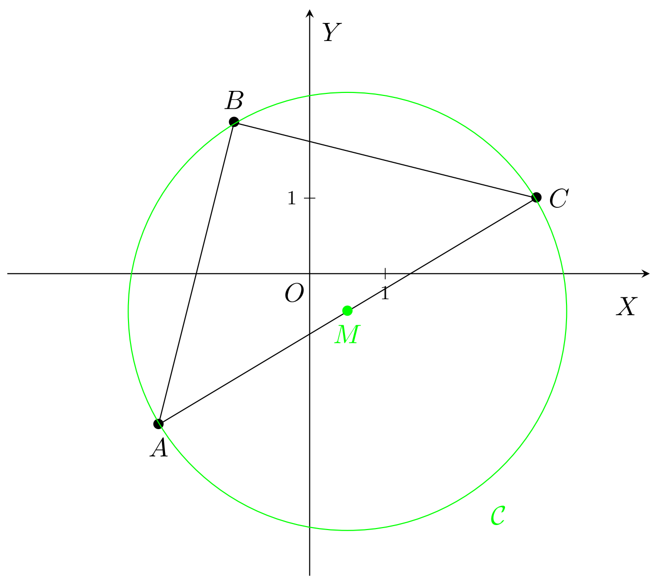
Si on développe le membre de gauche de l'égalité, on trouve

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \;=\; x^2+y^2-x+y+\frac{1}{2};$$

comme $17/2 - 1/2 = 16/2 = 8$, on peut réécrire l'équation du cercle sous la forme

$$x^2+y^2-x+y-8=0.$$

(c) Les représentations demandées sont les suivantes. (Le centre du cercle circonscrit au triangle est le point M, milieu du segment AC.)



Question 2

Dans le plan, on donne un rectangle $EFGH$ et un réel k différent de 0 et de 1.

(a) Démontrer l'égalité (note : la notation $\bullet$ désigne le produit scalaire)

$$\overrightarrow{EO} \bullet \overrightarrow{OG} \;=\; \overrightarrow{FO} \bullet \overrightarrow{OH}$$

où O est un point quelconque du plan.

(b) On définit les points M, P, Q par

$$\overrightarrow{EM} = k\overrightarrow{EH}, \quad \overrightarrow{FP} = k\overrightarrow{FH}, \quad \overrightarrow{QG} = (1-k)\overrightarrow{FG}.$$

Démontrer que les points M, P, Q sont alignés. Justifier votre réponse, expliquer votre raisonnement.

(c) On définit aussi le point N par

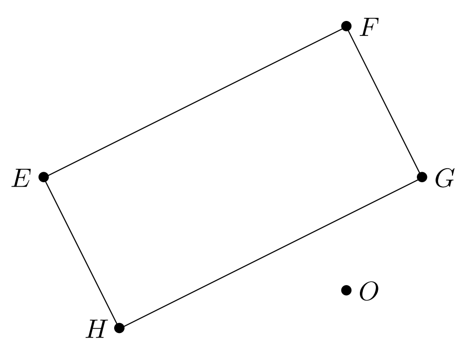
$$\overrightarrow{NG} = \frac{1-k}{k}\overrightarrow{EN}.$$

Démontrer que le point N est aligné aussi avec M, P, Q. Justifier votre réponse, expliquer votre raisonnement.

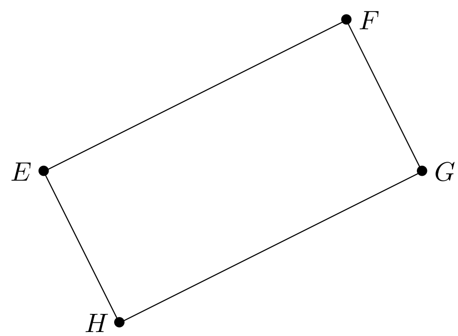
Exemple de résolution.

(a) Par la relation de Chasles et la linéarité du produit scalaire, on a successivement

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EO} \bullet \overrightarrow{OG} &= \left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FO}\right) \bullet \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HG}\right)\\ &= \overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{FO} \bullet \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{FO} \bullet \overrightarrow{HG}.\end{aligned}$$



Cela étant, comme
$$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF},$$
on obtient (encore en utilisant la linéarité du produit scalaire et la relation de Chasles)
$$\overrightarrow{EO} \bullet \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{FO} \bullet \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{EF} \bullet \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{FO}\right) = \overrightarrow{FO} \bullet \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{FG}.$$
Enfin, comme le quadrilatère $EFGH$ est un rectangle, on a
$$\overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{FG} = 0$$
et dès lors
$$\overrightarrow{EO} \bullet \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{FO} \bullet \overrightarrow{OH}.$$
(b) Les points M, P, Q sont alignés s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$\overrightarrow{MP} = \alpha \overrightarrow{MQ}.$$
Comme le quadrilatère $EFGH$ est un rectangle, on a
$$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}, \quad \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}.$$



On obtient ainsi
$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{MP} & = & \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FP} & \text{relation de Chasles} \\ & = & -k\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF} + k\left(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH}\right) & \text{définition des points } M \text{ et } P \\ & = & -k\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF} + k\left(\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FE}\right) & \\ & = & (1-k)\overrightarrow{EF} & \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{MQ} & = & \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GQ} & \text{relation de Chasles} \\ & = & -k\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} - (1-k)\overrightarrow{EH} & \text{définition des points } M \text{ et } Q \\ & = & \overrightarrow{EF}. & \end{array}$$
Il s'ensuit que
$$\overrightarrow{MP} = (1-k)\overrightarrow{MQ};$$
les points M, P, Q sont donc alignés.

(c) Comme précédemment, M, N, Q sont alignés (donc M, N, P, Q aussi puisque M, P, Q le sont) si le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est un multiple de $\overrightarrow{MQ}$.

Cela étant, on a
$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{NG} = \dfrac{1-k}{k}\overrightarrow{EN} & \Leftrightarrow & k\overrightarrow{NG} = (1-k)\left(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GN}\right) & \text{relation de Chasles} \\ & \Leftrightarrow & k\overrightarrow{NG} = (1-k)\overrightarrow{EG} + (1-k)\overrightarrow{GN} & \\ & \Leftrightarrow & 0 = (1-k)\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GN} & \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{NG} = (1-k)\overrightarrow{EG}. \qquad (*) & \end{array}$$

On obtient alors

$$\begin{array}{rcll}
\overrightarrow{MN} & = & \overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GN} & \text{relation de Chasles}\\
& = & -k\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EG}-(1-k)\overrightarrow{EG} & \text{définition du point } M \text{ et égalité (*)}\\
& = & -k\overrightarrow{EH}+k\overrightarrow{EG} & \\
& = & -k\overrightarrow{FG}+k\overrightarrow{EG} & \\
& = & k\overrightarrow{EF} & \text{relation de Chasles.}
\end{array}$$

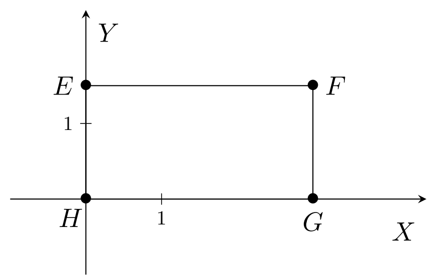
Comme $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{EF}$, on obtient finalement

$$\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{MQ}$$

et on conclut.

Variante pour (b) et (c).

On peut bien sûr procéder de façon analytique, par exemple en fixant un repère orthonormé tel que l'origine soit le point H et les axes définis par les droites HE pour Y et HG pour X. On a alors la configuration suivante



avec

$$H(0,0), \quad E(0,e), \quad F(f,e), \quad G(f,0).$$

(b) Cela étant, si on désigne par (x_M, y_M) et (x_P, y_P) les coordonnées de M et P respectivement, les définitions

$$\overrightarrow{EM}=k\overrightarrow{EH}, \quad \overrightarrow{FP}=k\overrightarrow{FH}$$

de M et P permettent d'obtenir

$$\left\{\begin{array}{l} x_M=0\\ y_M=e-ke=(1-k)e\end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{l} x_P=f-kf=(1-k)f\\ y_P=e-ke=(1-k)e\end{array}\right..$$

Cela montre directement que la droite passant par M et P est parallèle à l'axe X et a pour équation cartésienne

$$y=(1-k)e.$$

Montrons que le point Q défini par

$$\overrightarrow{QG}=(1-k)\overrightarrow{FG}$$

appartient à cette droite. La définition de Q permet de trouver tout de suite son ordonnée y_Q, à savoir

$$y_Q=0-(k-1)e=(1-k)e;$$

ceci prouve bien que Q est sur la droite MP.

(c) On a

$$\begin{array}{rcll}
\overrightarrow{NG}=\dfrac{1-k}{k}\overrightarrow{EN} & \Leftrightarrow & k\overrightarrow{NG}=(1-k)\left(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GN}\right) & \text{relation de Chasles}\\
& \Leftrightarrow & k\overrightarrow{NG}=(1-k)\overrightarrow{EG}+(1-k)\overrightarrow{GN} & \\
& \Leftrightarrow & 0=(1-k)\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GN} & \\
& \Leftrightarrow & \overrightarrow{NG}=(1-k)\overrightarrow{EG}. &
\end{array}$$

Ceci permet de trouver tout de suite l'ordonnée y_N de N, à savoir

$$y_N = 0 - (k-1)e = (1-k)e;$$

ceci prouve bien que le point N est lui aussi sur la droite MP.