Prof. Émilie CHARLIER
Prof. Pierre SACRÉ

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ALGÈBRE

Août 2022

Cette épreuve d'Algèbre comporte trois questions et dure 2 heures 30.
Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées.
*Indiquez sur chacune de vos feuilles votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
N'écrivez pas sur l'enveloppe. Les enveloppes vides seront reprises en cours d'examen.
Bonne épreuve !

Question I

i. Factorisez le polynôme $z^6 - 1$ en polynômes à coefficients réels du premier ou du second degré.
ii. Donnez les racines complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 du polynôme $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ sous leur forme algébrique ou trigonométrique.
iii. Quel est le nombre $w = z_1^{30} + z_2^{30} + z_3^{30} + z_4^{30} + z_5^{30}$?

Question II

Les nombres de Fibonnacci F_n (avec $n \in \mathbb{N}$) sont définis par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{et} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Montrez que la somme des n premiers nombres de Fibonacci à indices impairs est donnée par la formule

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}, \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Question III

Vous créez un code PIN à 4 chiffres. Combien y a-t-il de choix dans les cas suivants ?

i. Sans restriction.
ii. Aucun chiffre n'est répété.
iii. Aucun chiffre n'est répété et le deuxième chiffre est un 0.
iv. Aucun chiffre n'est répété et ils doivent apparaître dans l'ordre décroissant.
v. Aucun chiffre n'est répété et les chiffres 6 et 9 doivent être présents.

Remarque. Exprimez vos réponses sous la forme d'un calcul faisant intervenir les opérations mathématiques de base (addition, soustraction, multiplication, division, puissance, factorielle). Expliquez clairement le raisonnement qui mène à vos réponses.

Solution type

Avertissement : Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Le choix de la méthode est libre pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.

Question I

i. On a la factorisation suivante

$$z^6 - 1 = (z^3 - 1)(z^3 + 1) = (z-1)(z^2+z+1)(z+1)(z^2-z+1).$$

ii. Les racines de $z^6 - 1$ sont les nombres complexes $z_k = e^{i\frac{2\pi}{6}k} = e^{i\frac{\pi}{3}k}$ pour $k = 0, 1, \ldots, 5$. Etant donné que

$$z^6 - 1 = (z-1)(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1),$$

les racines de $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$ sont les nombres complexes $z_k = e^{i\frac{\pi}{3}k}$ pour $k = 1, \ldots, 5$. Nous obtenons donc les racines suivantes :

$$\begin{aligned}
z_1 &= e^{i\frac{\pi}{3}1} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
z_2 &= e^{i\frac{\pi}{3}2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
z_3 &= e^{i\frac{\pi}{3}3} = -1,\\
z_4 &= e^{i\frac{\pi}{3}4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
z_5 &= e^{i\frac{\pi}{3}5} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

iii. Etant donné que les z_k sont des racines du polynôme $z^6 - 1$, on a immédiatement que $z_k^6 = 1$ et, par conséquent, $z_k^{30} = \left(z_k^6\right)^5 = 1$. Donc, on a $w = 5$.

Question II

Alternative 1. On procède par récurrence sur n pour prouver l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}.$$

Pour le rang $n = 1$ (initialisation), la somme du membre de gauche comporte le seul terme $F_1 = 1$, tandis que le membre de droite vaut $F_2 = F_1 + F_0 = 1$. Si on suppose l'égalité vraie pour une certaine valeur de n (hypothèse de récurrence), on a le développement suivant :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i-1} &= F_{2(n+1)-1} + \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}\\
&= F_{2n+1} + F_{2n}\\
&= F_{2n+2}\\
&= F_{2(n+1)},
\end{aligned}$$

qui établit l'égalité pour le rang suivant $n+1$ (hérédité).

Alternative 2. Soit $n \geq 1$. Par la définition de la suite de Fibonacci, on remarque que

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 - F_0, \\ F_3 &= F_4 - F_2, \\ F_5 &= F_6 - F_4, \\ &\vdots \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}. \end{aligned}$$

En sommant ces égalités, on a

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} - F_0 = F_{2n}$$

(en remarquant que certains termes s'annulent dans la somme des membres de droite).

Question III

i. Il y a quatre choix indépendants, donc 10^4 $(= 10000)$.
ii. On a 10 choix pour le premier chiffre, 9 choix pour le second chiffre, 8 choix pour le troisième chiffre et 7 choix pour le quatrième chiffre. On a donc $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ $(= 5040)$.
iii. Un chiffre est fixé. On choisit les trois chiffres restants : $9 \cdot 8 \cdot 7$ $(= 504)$.
iv. On choisit une combinaison de 4 chiffres sans répétition et sans ordre (et on les ordonne ensuite) $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!}$ $(= 210)$.
v. On choisit les deux chiffres restants et compte toutes les permutations : $\binom{8}{2} \cdot 4! = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot 4!$ $(= 672)$.

Prof. Émilie CHARLIER
Prof. Pierre SACRÉ

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ALGÈBRE

Juillet 2022

Cette épreuve d'Algèbre comporte deux questions et dure 2 heures 30.
Répondez aux deux questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
N'écrivez pas sur l'enveloppe. Les enveloppes vides seront reprises en cours d'examen.
Bonne épreuve !

Question I

On considère le polynôme

$$P(x) = x^3 + mx^2 + 333x - 1134,$$

où m est un paramètre.

i. Donnez les décompositions de 333 et 1134 en facteurs premiers.
ii. Trouvez l'unique valeur entière de m telle que le polynôme $P(x)$ possède uniquement des racines entières positives avec nécessairement une racine multiple.

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Question II

Soient a et b des réels positifs tels que $a \geq b > 0$. Démontrez que la différence entre leur moyenne arithmétique et leur moyenne géométrique admet la borne inférieure et la borne supérieure suivantes

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

SOLUTION TYPE

Avertissement : Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Le choix de la méthode est libre pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.

Question I

i. Les décompositions en facteurs premiers de 333 et 1134 sont $333 = 3^2 \cdot 37$ et $1134 = 2 \cdot 3^4 \cdot 7$.

ii. On cherche l'unique entier m tel qu'il existe des entiers a et b tels que

$$x^3 + mx^2 + 333x - 1134 = (x-a)^2(x-b).$$

En identifiant les coefficients de ces polynômes, on obtient les équations $m = -b - 2a$, $333 = 2ab + a^2$ et $1134 = a^2 b$. On en tire que a divise 333 et a^2 divise 1134. Grâce aux décompositions en facteurs premiers et à la condition de positivité des racines, on obtient que $a \in \{1, 3, 9\}$. En injectant $b = \frac{1134}{a^2}$ dans l'équation $333 = 2ab + a^2$ pour chacune de ces valeurs, on obtient que la seule possibilité est $a = 9$ et $b = 14$. Ainsi, l'unique entier m qui convient est $m = -14 - 2 \cdot 9 = -32$.

Question II

Alternative 1. On note que le membre central de cette inégalité est une identité remarquable du second degré

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}.$$

En divisant chaque membre de l'inégalité par $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$ pour $a \neq b$, on obtient

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4a} \leq 1 \leq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{4b}$$

et donc

$$\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{a}}\right)^2 \leq 1 \leq \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{b}}\right)^2.$$

Cette inégalité est toujours vraie car $a \geq b > 0$ et donc $\sqrt{a} \geq \sqrt{b} > 0$. (Le cas $a = b$ est vérifié trivialement dans l'inéquation de départ.)

Alternative 2. On note que

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab}{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b) + 4\sqrt{ab}}.$$

Donc l'inégalité désirée est équivalente à

$$4a \geq a + b + 2\sqrt{ab} \geq 4b,$$

qui est évidente si $a \geq b > 0$ (qui implique $a \geq \sqrt{ab} \geq b$).