Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Septembre 2022

Consignes

- NOM (en MAJUSCULES), prénom (en minuscules) et numéro d'ordre sur chaque feuille dans les emplacements prévus.
- Contrôlez soigneusement que vous avez bien les 4 pages.
- Rendre les feuilles DANS L'ORDRE.
- Répondez directement sous la question.
- Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, veuillez les demander aux surveillants qui vous en fourniront. Les pages supplémentaires seront ajoutées après la dernière page et numérotées.
- Les pages verso peuvent être utilisées comme brouillon ; elles ne **seront pas corrigées !**
- GSM, smartphones et tablettes interdits MAIS il est permis d'utiliser une calculette.
- Préparer une pièce d'identité sur la table.
- Fin de l'examen à 12 heures.

Question 1 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique suivante en précisant les conditions d'existence :*

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$$

Représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ sur le cercle trigonométrique en page 4.

Solution

Nous commençons par écrire les conditions d'existence :
- $\tan x$ doit être défini : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\tan 2x$ doit être défini : $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$
- $\tan x \neq 0$ et $\tan 2x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq k\frac{\pi}{2}$

En résumé, $x \neq k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

Les conditions d'existence étant posées, nous pouvons appliquer le produit croisé, nous obtenons donc

$$\tan^2 x = \tan^2 2x.$$

En ramenant tout dans le même membre et en factorisant la différence de carrés, on obtient

$$(\tan x + \tan 2x)(\tan x - \tan 2x) = 0.$$

Par la règle du produit nul, on en déduit que l'on a soit $\tan x = \tan 2x$, ce qui mène à $2x = x + k\pi$ c'est-à-dire $x = k\pi$, soit $\tan x = -\tan 2x$ et donc $2x = -x + k\pi$, c'est-à-dire $x = k\frac{\pi}{3}$.

Les familles $2k\pi$ et $\pi + 2k\pi$ sont à rejeter en vertu des conditions d'existence. Notre ensemble des solutions est donc

$$S = \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\} + 2k\pi$$

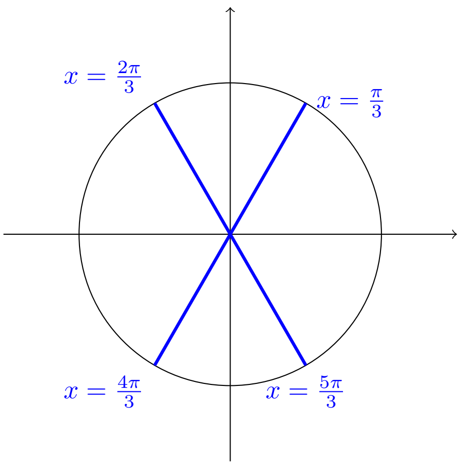


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

Question 2 *Si A, B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré et a, b et c les longueurs des côtés opposés, démontrer que :*

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

Solution

La règle des sinus nous donne

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Observons que, comme le triangle est non dégénéré, aucun des numérateurs ou des dénominateurs n'est nul. On en déduit que

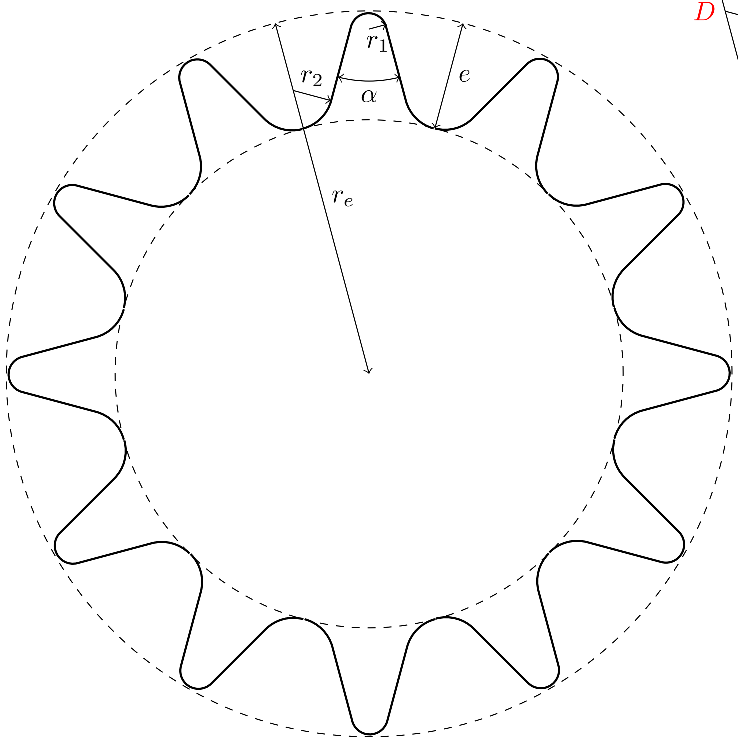
$$c = \frac{a\sin C}{\sin A}. \tag{1}$$

Comme $A+B+C=\pi$ dans un triangle, on a que $\sin C = \sin(\pi-(A+B)) = \sin(A+B)$. En remplaçant dans (1) et en utilisant la formule d'addition du sinus, on trouve

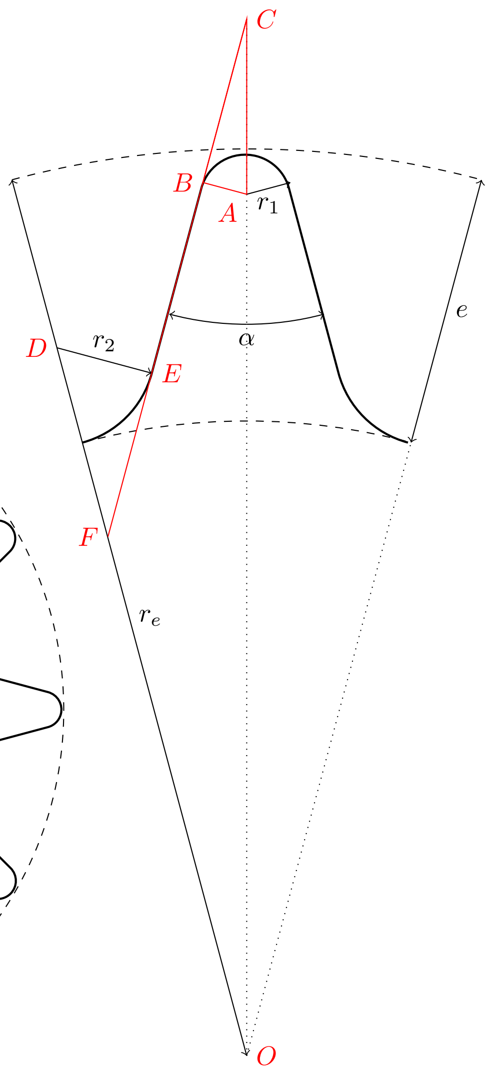
$$\begin{aligned} c &= \frac{a\sin(A+B)}{\sin A} \\ &= a\frac{\sin A\cos B + \cos A \sin B}{\sin A} \\ &= a\cos B + a\frac{\cos A\sin B}{\sin A}. \end{aligned} \tag{2}$$

En utilisant encore la règle des sinus, on a que $\sin A = \frac{a\sin B}{b}$. Si on réinjecte cette expression dans (2), on obtient $c = a\cos B + b\cos A$ qui est bien l'expression recherchée.

Question 3 *Soit l'engrenage constitué de 12 dents représenté à la figure ci-dessous. Chaque dent possède un angle d'ouverture* $\alpha = 30°$ *et un sommet constitué d'un arc de cercle de rayon* $r_1 = 2\,\text{mm}$ *(les côtés rectilignes de la dent sont tangents à l'arc de cercle aux points de contact). Le rayon extérieur de l'engrenage est* $r_e = 40\,\text{mm}$*. La jonction entre chaque dent est faite d'un arc de cercle de rayon* r_2 *(les côtés de la dent sont tangents à cet arc de cercle aux points de contact). Déterminez la valeur de* r_2 *de manière à ce que la hauteur* e *des dents soit exactement de* $12\,\text{mm}$*.*



(a) Vue d'ensemble



(b) Détail d'une dent

FIGURE 2 – L'engrenage à 12 dents.

Solution

Commençons par noter quelques points remarquables sur le schéma. Notons O le centre de l'engrenage, A et D les centres des arcs de cercle de rayon r_1 et r_2 respectivement. De manière similaire, notons B et E les points de tangence entre le côté de la dent et les arcs de cercle de rayon r_1 et r_2 respectivement. L'intersection entre le prolongement du segment BE et le prolongement du segment OA donne le point C et l'intersection entre le prolongement du segment BE et le segment OD donne le point F.
Les rayons des arcs de cercle aux points de tangence sont perpendiculaires aux côtés de la dent et les triangles ABC et DEF sont rectangles en B et E respectivement.
A l'aide de ces points, il est possible d'exprimer l'équation liant e à r_2 :

$$e = r_e - \overline{OF} - \overline{DF} + r_2$$

Commençons par déterminer $\overline{OF}$ par application de la règle des sinus dans le triangle CFO :

$$\frac{\overline{OC}}{\sin\widehat{CFO}} = \frac{\overline{OF}}{\sin\widehat{OCF}} \rightarrow \overline{OF} = \frac{\overline{OC} \times \sin\widehat{OCF}}{\sin\widehat{CFO}}$$

L'angle $\widehat{OCF} = \widehat{ACB} = \dfrac{\alpha}{2} = 15°$. L'engrenage ayant 12 dents, l'angle $\widehat{COF} = \dfrac{360°}{12 \times 2} = 15°$. En conséquence, $\widehat{CFO} = 180° - \widehat{COF} - \widehat{OCF} = 150°$.
La longueur du côté OC est donnée par :

$$\overline{OC} = r_e - r_1 + \overline{AC}$$

Le triangle ABC est rectangle en B et il vient :

$$\sin\widehat{ACB} = \frac{\overline{r_1}}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{AC} = \frac{2}{\sin 15°} = 7,73mm$$

et $\overline{OC} = r_e - r_1 + \overline{AC} = 45,73$ mm.

$$\overline{OF} = \frac{\overline{OC} \times \sin\widehat{OCF}}{\sin\widehat{CFO}} = \frac{45,73 \times \sin 15°}{\sin 150°} = 23,67mm$$

Il reste à calculer $\overline{DF}$ dans le triangle DEF rectangle en E :

$$\sin\widehat{EFD} = \sin(180° - \widehat{CFO}) = \frac{r_2}{\overline{DF}}$$

qui donne $\overline{DF} = \dfrac{r_2}{\sin\widehat{CFO}} = \dfrac{r_2}{\sin 150°}$.
En reprenant l'équation de départ $e = r_e - \overline{OF} - \overline{DF} + r_2$, nous exprimons

$$r_2 \left(\frac{1}{\sin 150°} - 1 \right) = r_e - e - \overline{OF} = 40 - 12 - 23.67.$$

Soit $r_2 = 4{,}33$ mm.

Université de Liège

Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Juillet 2022

Consignes

- NOM (en MAJUSCULES), prénom (en minuscules) et numéro d'ordre sur chaque feuille dans les emplacements prévus.
- Contrôlez soigneusement que vous avez bien les 4 pages.
- Ne pas dégrafer les feuilles.
- Répondez directement sous la question.
- Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, veuillez les demander aux surveillants qui vous en fourniront. Les pages supplémentaires seront ajoutées après la dernière page et numérotées.
- Les pages verso peuvent être utilisées comme brouillon ; elles ne **seront pas corrigées !**
- GSM, smartphones et tablettes interdits MAIS il est permis d'utiliser une calculette.
- Préparer une pièce d'identité sur la table.
- Fin de l'examen à 12 heures.

Question 1 *Soit l'équation trigonométrique suivante :*

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos x \; sinx. \tag{1}$$

Déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique en page 4.

Solution

Méthode 1

On élève au carré les deux membres de l'équation et on obtient

$$\cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) = 2\cos^2(x)\sin^2(x)$$

$$1 + \sin(2x) = \frac{\sin^2(2x)}{2}$$

On pose $y = \sin(2x)$ ce qui nous mène à une équation du second degré.

$$y^2 - 2y - 2 = 0$$

dont les solutions sont $y = 1 \pm \sqrt{3}$. La solution $1 + \sqrt{3}$ est à rejeter car plus grande que 1. On obtient donc

$$2x = \arcsin(1 - \sqrt{3}) + 2k\pi \text{ ou}$$
$$2x = \pi - \arcsin(1 - \sqrt{3}) + 2k\pi$$

ce qui mène à quatre solutions de base. Il faut maintenant s'assurer que les solutions ainsi générées ne sont pas des solutions menant aux deux membres de l'égalité de signe opposé dans (1), appelées également solutions parasites dues à l'élévation au carré. Il faut dès lors rejeter

$$x = \frac{1}{2}\arcsin(1 - \sqrt{3}) + 2k\pi \text{ et } x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin(1 - \sqrt{3}) + 2k\pi.$$

Il nous reste les solutions

$$x = \pi + \frac{1}{2}\arcsin(1 - \sqrt{3}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ et } x = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin(1 - \sqrt{3}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Méthode 2

L'équation (1) est symétrique en $\sin(x)$ et $\cos(x)$. On pose donc $y = x - \pi/4$:

$$\cos(x) = \cos(y + \pi/4) = \cos(y)\cos(\pi/4) - \sin(y)\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(y) - \sin(y)),$$
$$\sin(x) = \sin(y + \pi/4) = \sin(y)\cos(\pi/4) + \cos(y)\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(y) + \sin(y)),$$

et donc

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos(y).$$

On a aussi

$$\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{2}(\cos^2(y) - \sin^2(y)) = \frac{1}{2}(2\cos^2(y) - 1).$$

L'équation (1) s'écrit donc, en fonction de y, comme :

$$\sqrt{2}\cos(y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\cos^2(y) - 1) \quad \to \quad \boxed{2\cos^2(y) - 2\cos(y) - 1 = 0.}$$

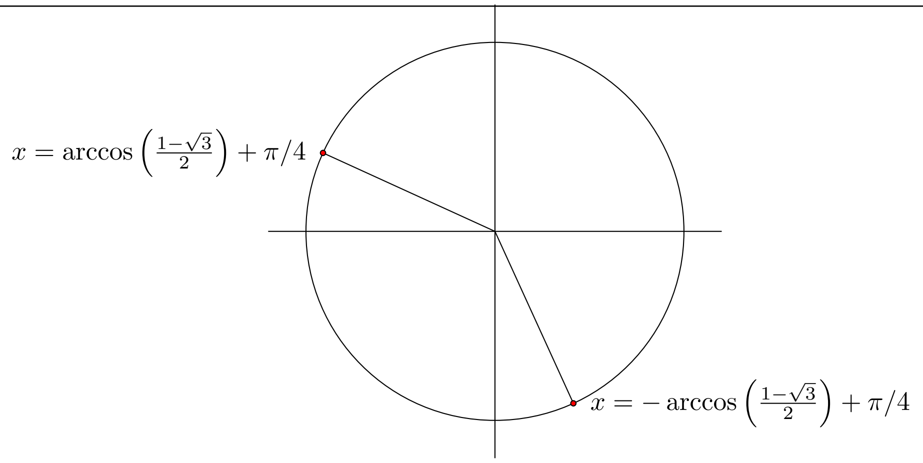
La solution est donc

$$\cos(y) = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}. \tag{2}$$

La solution $\cos(y) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ est à rejeter car $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$.
On trouve donc

$$y = \pm \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \to \boxed{x = \pm \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) + \pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.}$$

Finalement, on peut dessiner les solutions sur le cercle trigonométrique.



Question 2 *Si A, B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré, démontrer que :*

$$\frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2}.$$

Solution

Appliquons la formule de factorisation de Simpson $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ au membre de gauche. En remplaçant dans l'inégalité de départ nous obtenons

$$\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2}.$$

On remarque que dans un triangle non dégénéré, $A + B + C = \pi$ ce qui entraine $0 < A + B < \pi$ et dès lors $0 < \sin \frac{A+B}{2} < 1$. En conséquence il est possible de simplifier l'inégalité en divisant gauche et droite par $\sin \frac{A+B}{2}$ strictement positif et non nul, on obtient donc

$$\cos \frac{A-B}{2} \leq 1.$$

Cette inégalité est toujours vérifiée par définition du cosinus.

Question 3 *Une barre en acier d'une longueur de $2\,\mathrm{m}$ est ancrée à une extrémité A dans un mur vertical à une hauteur de $3\,\mathrm{m}$ avec un angle de $45°$ par rapport à la verticale. A son autre extrémité O, elle soutient une poulie de $0.5\,\mathrm{m}$ de rayon. Un cable d'acier est fixé dans ce même mur en B à une hauteur de $4\,\mathrm{m}$ et soutient une caisse cubique de $0.5\,\mathrm{m}$ de côté par l'intermédiaire de la poulie. Calculer la longueur $BCDE$ du cable pour que le bas de la caisse se situe exactement à $1\,\mathrm{m}$ du sol (au centimètre près). Le système est représenté à la Figure 1 ci-dessous. Le cable est tangent à la poulie aux points de contact C et D.*

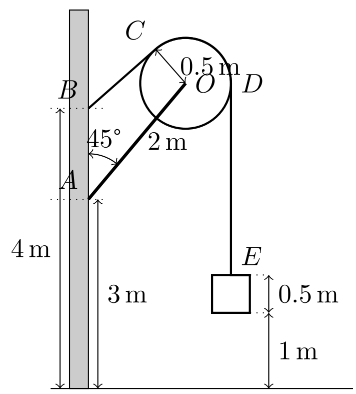


FIGURE 1 – Le système de poulie (le dessin n'est pas à l'échelle).

Solution

La longueur à déterminer vaut $\overline{BC} + \widehat{COD} \cdot \overline{OC} \cdot \dfrac{\pi}{180} + \overline{DE}$.
Commençons par le segment DE, qui est vertical et perpendiculaire au rayon OD. Le segment OD est donc horizontal et la longueur de DE vaut

$$\overline{DE} = 3 + \overline{AO} \cos 45 - 1 - 0.5 = 2,91m.$$

Passons ensuite au segment BC qui est la base du triangle rectangle BCO rectangle en C, point de contact du cable sur la poulie :

$$\overline{BC}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{BO}^2 \;\Rightarrow\; \overline{BC}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{OC}^2$$

Le segment BO fait partie du triangle quelconque BOA et nous pouvons appliquer Al-Kashi :

$$\overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AO} \cdot \cos 45 = 2.17m^2.$$

Cela donne les valeurs $\overline{BO} = 1,47m$ et $\overline{BC} = 1,39m$. Nous terminerons par la détermination de l'angle $\widehat{COD}$ en notant qu'il est égal à l'angle $\widehat{CBA}$ car ils ont les côtés perpendiculaires deux à deux :

$$\widehat{COD} = \widehat{CBA} = \widehat{CBO} + \widehat{OBA}.$$

Le triangle BOC est rectangle et $\widehat{CBO} = \arctan\left(\frac{\overline{OC}}{\overline{BC}}\right) = 19,8°$. Dans le triangle quelconque OBA, la règle des sinus donne

$$\widehat{OBA} = \arcsin\left(\frac{\overline{OA} \sin 45}{\overline{OB}}\right) = 74,2° \text{ } ou \text{ } 105,8°.$$

Attention dans ce cas, l'angle doit être plus grand que 90° et $\widehat{OBA} = 105,8°$. Finalement la longueur du cable vaut : $\overline{BC} + 0,5 \cdot (\widehat{CBO} + \widehat{OBA}) \cdot \dfrac{\pi}{180} + \overline{DE} = 5,40m$.