Université de Liège

Faculté des Sciences Appliquées

# Géométrie et géométrie analytique

Notes théoriques et applications à destination des étudiants préparant l'examen d'admission aux études d'ingénieur civil de l'Université de Liège

Ir Thomas Belligoi
Pr Françoise Bastin

Février 2011

# Avant-propos

Avant toutes choses, nous tenons à remercier chaleureusement M. Yvan HAINE, moniteur de bachelier ingénieur civil à l'ULg et enseignant à l'Athénée Liège I, et Mme Eveline MOITROUX, enseignante à l'Athénée Liège I et monitrice pédagogique en didactique des sciences mathématiques à l'ULg, pour le temps qu'ils ont passé à lire et relire attentivement ces notes, pour leurs commentaires constructifs et leurs suggestions qui ont permis d'améliorer et de compléter considérablement ce document. Sincèrement merci.

Certaines parties ont été inspirées de manuels de cours. Merci particulièrement à
- Mme Jacqueline CRASBORN pour son excellent recueil d'éléments de mathématiques de l'enseignement secondaire (disponible ici) ;
- Mme Françoise BASTIN pour certaines parties de géométrie analytique, inspirées de son cours de compléments de mathématiques générales (disponible ici) ;
- M. Pierre LECOMTE pour l'emprunt de quelques passages de géométrie synthétique de son cours de géométrie élémentaire (disponible ici) ;
- M. Yvan HAINE et Mme Eveline MOITROUX pour leurs notes de géométrie vectorielle et géométrie analytique (cf. bibliographie).

L'étudiant préparant l'examen d'admission trouvera dans ces notes des notions qu'il est important de maîtriser pour aborder l'examen de géométrie et géométrie analytique et, plus largement, le cours de géométrie de premier bachelier. La plupart des notions reprises ci-après font partie du programme de l'examen d'admission (le document peut être consulté ici). Ces notes ne doivent pas être étudiées par coeur mais la maîtrise des concepts théoriques et la connaissance des énoncés des principaux théorèmes, propositions et résultats sont indispensables. Les démonstrations ne sont pas reprises dans ce document. L'étudiant est renvoyé à ses cours de l'enseignement secondaire pour une preuve des théorèmes, propositions et résultats.

Ce recueil n'a pas, répétons-le, la prétention d'être complet. Des sections sont consacrées à la résolution d'exercices mettant en pratique les concepts théoriques. Différentes approches peuvent généralement être adoptées pour répondre aux exercices posés. La résolution ne présente qu'une d'entre-elles. Toutes les méthodes de résolution sont cependant acceptées à l'examen d'admission pour autant qu'elles soient correctement justifiées.

Malgré nos lectures et notre vigilance, il se peut qu'il subsiste des coquilles ou des erreurs. Merci de rapporter toute coquille, toute remarque ou toute suggestion à l'adresse ExamenAdmission.Inge@ulg.ac.be afin d'améliorer ce document.

Ir Thomas BELLIGOI
Pr Françoise BASTIN
Février 2011

# Chapitre 1

# Géométrie synthétique dans le plan

## 1.1 Le cercle

### 1.1.1 Définition

Dans un plan, le cercle $\mathcal{C}$ de centre $C$ et de rayon $r$ ($r > 0$) est l'ensemble des points situés à la distance $r$ du point $C$ (figure 1.1). Une définition analytique est donnée à la section 3.7.1.

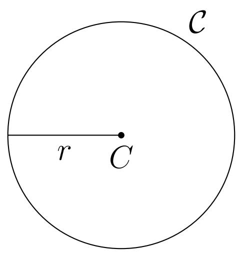



FIG. 1.1 – Cercle $\mathcal{C}$ de centre $C$ et de rayon $r$

### 1.1.2 Tangente à un cercle

On appelle tangente à un cercle $\mathcal{C}$ en un point $P$ la droite passant par ce point $P$ et perpendiculaire au rayon d'extrémité $P$. Ce point est appelé point de tangence (figure 1.2).

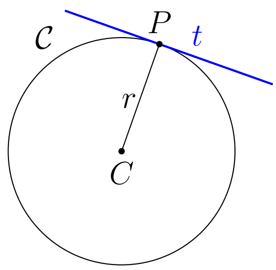



FIG. 1.2 – Tangente $t$ en un point $P$ du cercle $\mathcal{C}$

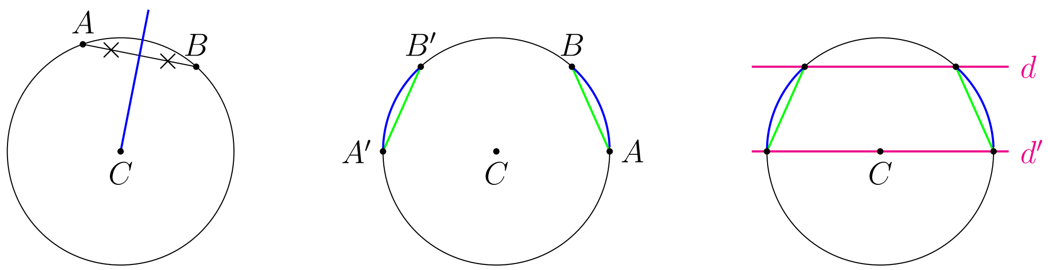
### 1.1.3 Corde d'un cercle

#### Définition

Une corde d'un cercle est le segment de droite joignant deux points du cercle.

#### Propriétés

1. La médiatrice[1] de toute corde d'un cercle passe par le centre de ce cercle.
2. Réciproquement, un diamètre perpendiculaire à une corde est médiatrice de cette corde (figure 1.3(a)).
3. L'arc $\widehat{AB}$ est partagé par la médiatrice du segment $[A, B]$ en deux arcs égaux (figure 1.3(a)).
4. Des cordes égales d'un même cercle sous-tendent des arcs égaux (de ce même cercle) et réciproquement (figure 1.3(b)).
5. Des droites parallèles interceptent des arcs égaux d'un même cercle et réciproquement (figure 1.3(c)).




(a) (b) (c)

FIG. 1.3 – Propriétés des cordes d'un cercle

## 1.2 Les angles

### 1.2.1 Angles opposés par le sommet

#### Définition

Deux angles sont dits opposés par le sommet s'ils ont le même sommet et des côtés dans le prolongement l'un de l'autre.

#### Propriété

Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

Exemple : soient deux droites $d$ et $d'$ sécantes en un point $O$. Les angles $\widehat{O_1}$ et $\widehat{O_3}$ sont opposés par le sommet (figure 1.4).

[1] On appelle médiatrice d'un segment la droite perpendiculaire à ce segment passant par le milieu de ce dernier.

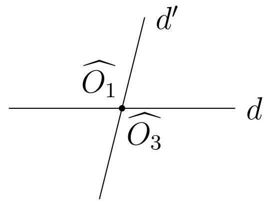



FIG. 1.4 – Angles opposés par le sommet

### 1.2.2 Angles correspondants

#### Définition

Soient deux droites $d$ et $d'$ coupées par une droite $d''$.

Deux angles sont dits correspondants s'ils sont situés du même côté de la droite $d''$ et du même côté des droites $d$ et $d'$.

Exemple : les angles $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_1}$ sont correspondants (figure 1.5(a)).

#### Propriété

Deux droites $d$ et $d'$ sont parallèles si et seulement si des angles correspondants qu'elles déterminent sont égaux.

Exemple : soient les droites $d$ et $d'$ parallèles. Ainsi, les angles $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_1}$ sont égaux (figure 1.5(b)).

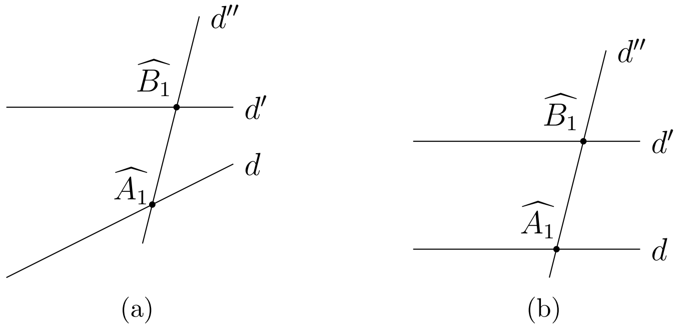



FIG. 1.5 – Angles correspondants

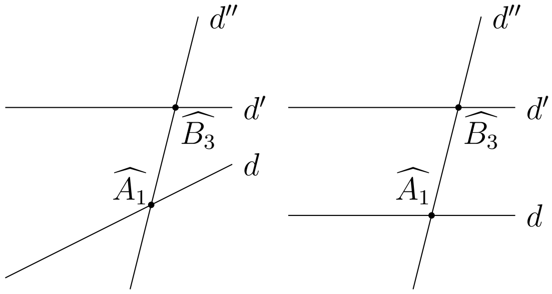
### 1.2.3 Angles alternes-internes

#### Définition

Soient deux droites $d$ et $d'$ coupées par une droite $d''$.

Deux angles sont dits alternes-internes s'ils sont situés de part et d'autre de la droite $d''$ et s'ils sont compris entre les droites $d$ et $d'$.

Exemple : les angles $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_3}$ sont alternes-internes (figure 1.6(a)).




(a) (b)

FIG. 1.6 – Angles alternes-internes

**Propriété**

Deux droites sont parallèles si et seulement si des angles alternes-internes qu'elles déterminent sont égaux.

Exemple : soient les droites $d$ et $d'$ parallèles. Ainsi, les angles alternes-internes $\widehat{A_1}$ et $\widehat{B_3}$ sont égaux (figure 1.6(b)).

### 1.2.4 Angles alternes-externes

**Définition**

Soient deux droites $d$ et $d'$ coupées par une droite $d''$.

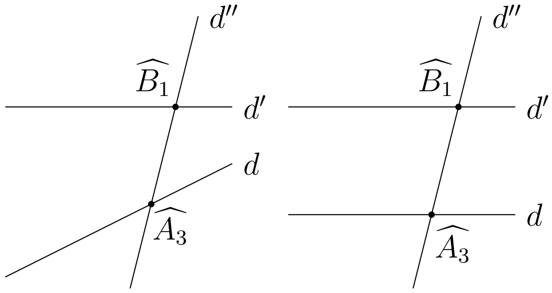
Deux angles sont dits alternes-externes s'ils sont situés de part et d'autre de la droite $d''$ et s'ils sont à l'extérieur des droites $d$ et $d'$.

Exemple : les angles $\widehat{A_3}$ et $\widehat{B_1}$ sont alternes-externes (figure 1.7(a)).

**Propriété**

Deux droites sont parallèles si et seulement si des angles alternes-externes qu'elles déterminent sont égaux.

Exemple : soient les droites $d$ et $d'$ parallèles. Ainsi, les angles $\widehat{A_3}$ et $\widehat{B_1}$ sont égaux (figure 1.7(b)).




(a) (b)

FIG. 1.7 – Angles alternes-externes

### 1.2.5 Angles à côtés respectivement parallèles

**Définition**

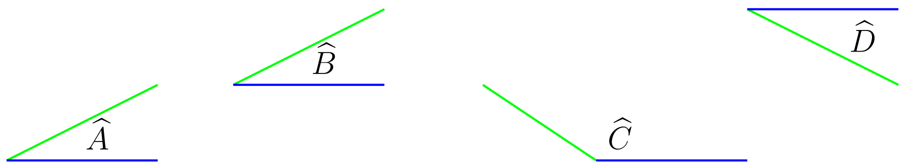
Deux angles sont dits à côtés respectivement parallèles lorsque leurs côtés sont parallèles deux à deux.

Remarque : deux angles à côtés respectivement parallèles ne possèdent pas nécessairement le même sommet.

**Propriété**

Deux angles à côtés respectivement parallèles sont égaux (figure 1.8(a)) ou supplémentaires (figure 1.8(b))

$$\widehat{A} = \widehat{B} \quad \text{et} \quad \widehat{C} = 180° - \widehat{D}.$$




(a) (b)

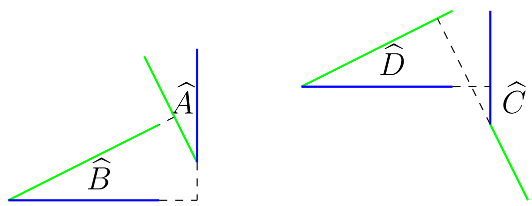
FIG. 1.8 – Angles à côtés respectivement parallèles

### 1.2.6 Angles à côtés respectivement perpendiculaires

**Définition**

Deux angles sont dits à côtés respectivement perpendiculaires lorsque leurs côtés sont perpendiculaires deux à deux.

Remarque : deux angles à côtés respectivement perpendiculaires ne possèdent pas nécessairement le même sommet.




(a) (b)

FIG. 1.9 – Angles à côtés respectivement perpendiculaires

**Propriété**

Deux angles à côtés respectivement perpendiculaires sont égaux (figure 1.9(a)) ou supplémentaires (figure 1.9(b))

$$\widehat{A} = \widehat{B} \quad \text{et} \quad \widehat{C} = 180° - \widehat{D}.$$

### 1.2.7 Angles au centre, inscrit et tangentiel

**Définitions**

Dans un cercle, un angle au centre est un angle dont le sommet est le centre du cercle et dont les côtés sont des rayons de ce cercle (figure 1.10(a)).

Un angle inscrit dans un cercle est un angle dont le sommet appartient au cercle et dont les côtés sont des cordes du cercle (figure 1.10(b)).

Un angle tangentiel à un cercle est un angle dont le sommet est un point du cercle, dont un côté est tangent au cercle et dont le second côté est une corde de ce cercle (figure 1.10(c)).

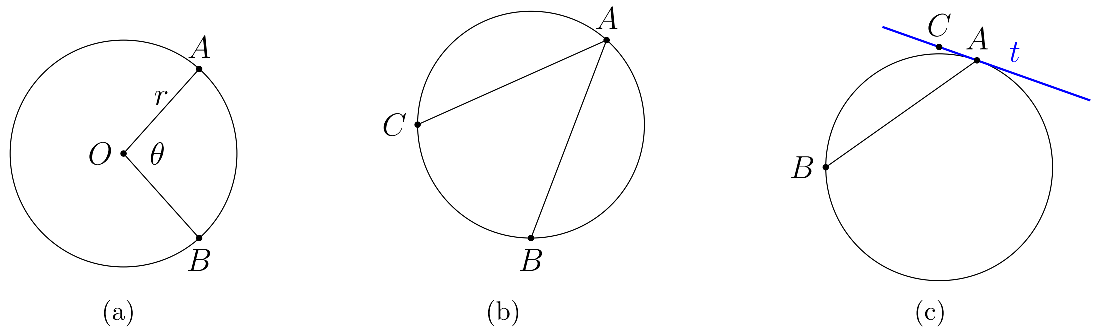



FIG. 1.10 – Angles au centre, inscrit et tangentiel

**Propriétés**

1. La mesure de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ vaut : $\theta\, r$ où $r$ est le rayon du cercle et $\theta$ est l'amplitude de l'angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$ (figure 1.10(a)).
2. Dans un cercle, l'amplitude d'un angle inscrit est égale à la moitié de celle de l'angle au centre qui intercepte le même arc (figure 1.11(a)).

   Corollaire : des angles inscrits égaux interceptent des arcs égaux et réciproquement.

   Exemple : les angles inscrit $\widehat{ADB}$ et au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$ (figure 1.11(a)). Par conséquent,

   $$\widehat{ADB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}.$$

3. Deux angles inscrits interceptant le même arc sont égaux.

   Exemple : les angles inscrits $\widehat{CAB}$, $\widehat{CDB}$ et $\widehat{CEB}$ dans le même cercle interceptent l'arc $\overset{\frown}{CB}$ (figure 1.11(b)). Par conséquent,

   $$\widehat{CAB} = \widehat{CDB} = \widehat{CEB}.$$

4. Un angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit. Cela signifie que l'angle droit intercepte un diamètre.

5. Tout triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle dont le centre se situe au milieu de l'hypoténuse (figure 1.11(c)).

6. L'amplitude d'un angle tangentiel est égale à la moitié de celle de l'angle au centre interceptant le même arc.

   Exemple : les angles tangentiel $\widehat{CAB}$ et au centre $\widehat{AOB}$ (figure 1.11(d)) sont égaux

$$\widehat{CAB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}.$$

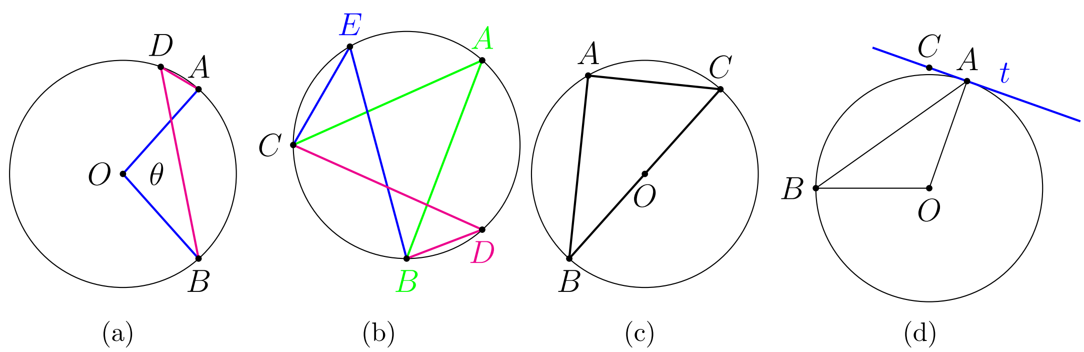



FIG. 1.11 – Propriétés des angles au centre, inscrit et tangentiel

# 1.3 Les polygones réguliers

## 1.3.1 Définitions

Un polygone est une figure géométrique plane fermée formée de segments de droite.

On distingue les polygones convexes, concaves et croisés

- un polygone est convexe lorsque s'il est situé dans un même demi-plan délimité par chaque droite comprenant les côtés du polygone (figure 1.12(a)) ;
- un polygone est croisé si deux de ses côtés non consécutifs sont sécants (figure 1.12(b)) ;
- un polygone est concave s'il est non convexe et non croisé (figure 1.12(c)).

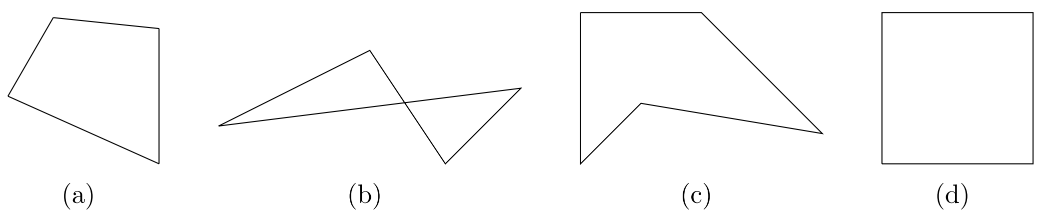



FIG. 1.12 – Polygones : (a) convexe, (b) croisé, (c) concave, (d) régulier

Un polygone convexe est dit régulier lorsque tous ses côtés sont de la même longueur et si tous les angles formés par deux côtés consécutifs ont la même mesure (figure 1.12(d)).

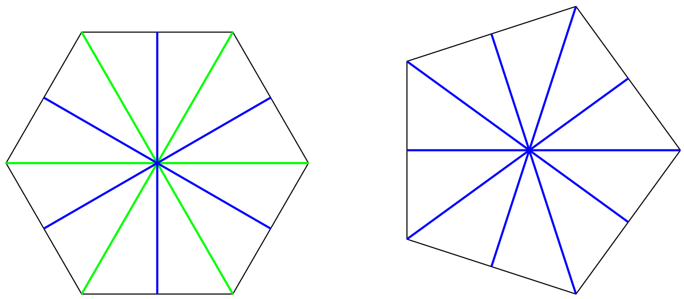
Les polygones réguliers à trois, quatre, cinq, six, etc. côtés sont respectivement appelés triangle équilatéral, carré, pentagone régulier, hexagone régulier, etc.

### 1.3.2 Polygones réguliers et symétrie

Si le nombre $n$ de côtés d'un polygone est pair (figure 1.13(a)), les côtés sont deux à deux parallèles. De plus, le polygone possède $n$ axes de symétrie : $n/2$ axes joignent deux sommets opposés et $n/2$ sont les médiatrices des côtés.

Si le nombre $n$ est impair (figure 1.13(b)), à un côté est opposé un sommet. Le polygone possède $n$ axes de symétrie : ce sont les droites joignant le milieu d'un côté au sommet opposé.

Les axes de symétrie, que le nombre de côtés soit pair ou impair, sont concourants en un point : le centre de gravité du polygone régulier.



(a) (b)

FIG. 1.13 – Axes de symétrie d'un polygone régulier

### 1.3.3 Propriétés des angles d'un polygone régulier

#### Définitions

On appelle diagonale d'un polygone régulier un segment de droite joignant deux angles non adjacents. Ainsi, un polygone régulier à $n$ côtés possède

$$\frac{(n-3)n}{2} \text{ diagonales.}$$

On appelle angle au centre d'un polygone régulier à $n$ côtés l'angle dont le sommet est le centre de gravité du polygone et qui intercepte un côté du polygone.

On appelle angle extérieur d'un polygone convexe l'angle supplémentaire d'un angle intérieur.

**Propriétés**

Tout polygone convexe à $n$ côtés peut être décomposé au moyen de $n-2$ triangles en traçant les diagonales de ce polygone (figure 1.14(a)). Ainsi, la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe à $n$ côtés est

$$(n-2)\ 180°.$$

Puisque les angles intérieurs d'un polygone réguliers à $n$ côtés sont de même amplitude (figure 1.14(b)), la mesure d'un angle de ce polygone est de

$$\frac{n-2}{n}\ 180°.$$

De plus, la somme des mesures des angles extérieurs d'un polygone régulier est de 360° et, en particulier, la mesure d'un angle extérieur est égale à la mesure de l'angle au centre.

Si un polygone à $n$ côtés est régulier, il est inscriptible dans un cercle dont le centre coïncide avec le centre de gravité du polygone (figure 1.14(c)). De ce fait, la mesure d'un angle au centre interceptant un côté est

$$\frac{360°}{n}.$$

Ainsi, tout polygone régulier à $n$ côtés peut être décomposé en $n$ triangles isocèles isométriques dont deux côtés sont égaux au rayon du cercle et dont le troisième côté est un côté du polygone.

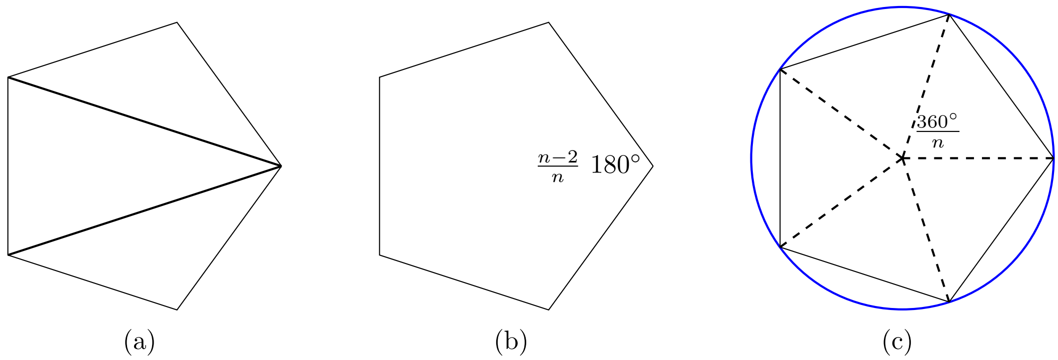



FIG. 1.14 – Propriétés des angles d'un polygone régulier

### 1.3.4 Périmètre et aire d'un polygone régulier

On appelle apothème d'un polygone régulier la longueur du segment abaissé du centre de ce polygone sur un des côtés perpendiculairement à ce dernier (figure 1.15).

Le périmètre $P$ d'un polygone régulier à $n$ côtés est égal à $n\ l$ où $l$ est la longueur d'un côté. En utilisant les relations dans les triangles, on peut montrer que le périmètre d'un polygone régulier à $n$ côtés s'exprime aussi par

$$P = 2nR\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

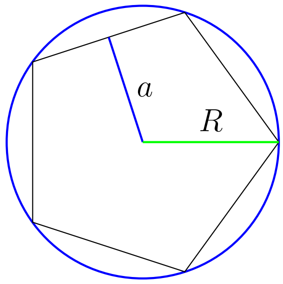



FIG. 1.15 – Apothème d'un polygone régulier

où $R$ est le rayon du cercle circonscrit au polygone.

L'aire $A$ d'un polygone régulier à $n$ côtés est

$$A = \frac{P\ a}{2} = n\ l\ \frac{a}{2}$$

où $a$ est la longueur de l'apothème du polygone. En utilisant les relations dans les triangles, on montre que l'aire est aussi égale à

$$A = nR^2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}\ R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

### 1.3.5 Les quadrilatères inscriptibles dans un cercle

Les deux résultats suivants sont des conséquences logiques des propriétés des angles inscrits interceptant un même arc.

1. Un quadrilatère convexe est inscriptible dans un cercle si et seulement si deux angles opposés ($\alpha$ et $\beta$, $\gamma$ et $\delta$) sont supplémentaires (figure 1.16(a)).

2. Un quadrilatère croisé est inscriptible dans un cercle si et seulement si deux angles opposés ($\alpha$ et $\beta$, $\gamma$ et $\delta$) sont égaux (figure 1.16(b)).

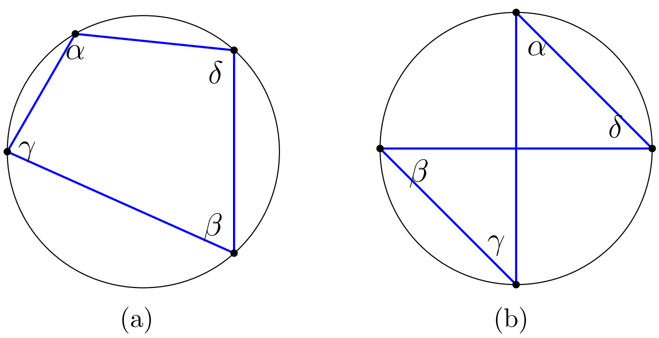



FIG. 1.16 – Quadrilatères convexe et croisé inscriptibles dans un cercle

## 1.4 L'arc capable d'un segment

### 1.4.1 Définition

On appelle arc capable d'un segment donné et d'angle $\alpha$ donné l'ensemble des points sous lequel on peut voir ce segment sous l'angle $\alpha$.

L'arc capable d'un segment est constitué de deux arcs de cercle de même rayon symétriques par rapport au segment considéré (figure 1.17).

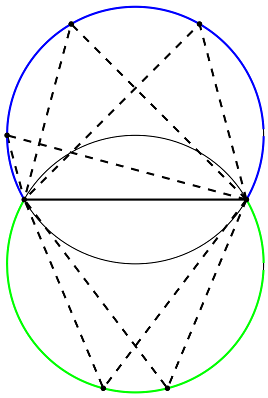


FIG. 1.17 – Arc capable d'un segment

### 1.4.2 Construction

La détermination de l'arc capable de l'angle $\alpha$ construit sur le segment $[A, B]$ se fait en plusieurs étapes.

Considérons un angle $\alpha$ aigu. Après avoir tracé la médiatrice du segment $[A, B]$, on reporte, à partir de $A$ ou de $B$ l'angle qui mesure $90° - \alpha$ sur le segment $[A, B]$. On appelle $O$ l'intersection de la médiatrice avec l'autre côté de l'angle (celui qui n'est pas sur la droite $AB$). Le point $O$ est le centre d'un cercle $\mathcal{C}$ passant par $A$ et $B$. L'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre du cercle $\mathcal{C}$ dont la mesure vaut $2\alpha$. Ainsi, tout angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ interceptant l'arc $\widehat{AB}$ a une amplitude de $\alpha$.

L'arc capable de l'angle $\alpha$ est l'arc de cercle du cercle $\mathcal{C}$ colorée en bleu.

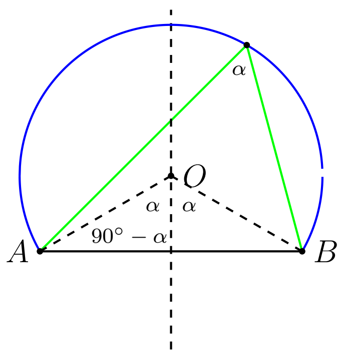



FIG. 1.18 – Arc capable d'un segment

Si l'angle est obtus, on commence avec l'angle qui mesure $180° - \alpha$.

Remarque : on a tracé l'arc de cercle pour la portion du plan située au dessus du segment $[A, B]$. L'arc capable (dans son entièreté) est constitué de cet arc et de son symétrique par rapport au segment $[A, B]$.

# 1.5 Les triangles

## 1.5.1 Généralités sur les triangles

### Définition

Un triangle est un polygone ayant trois côtés. Un exemple est donné à la figure 1.19.

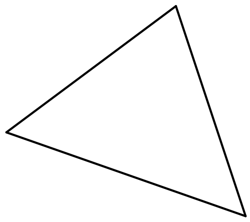


Fig. 1.19 – Exemple de triangle

### Propriétés

1. La somme des trois angles intérieurs d'un triangle vaut 180°.

2. On distingue principalement trois grands types de triangle : les triangles acutangles dont les trois angles sont aigus (figure 1.20(a)), les triangles rectangles dont un angle vaut 90° (figure 1.20(b)) et les triangles obtusangles dont un angle est obtus (figure 1.20(c)).

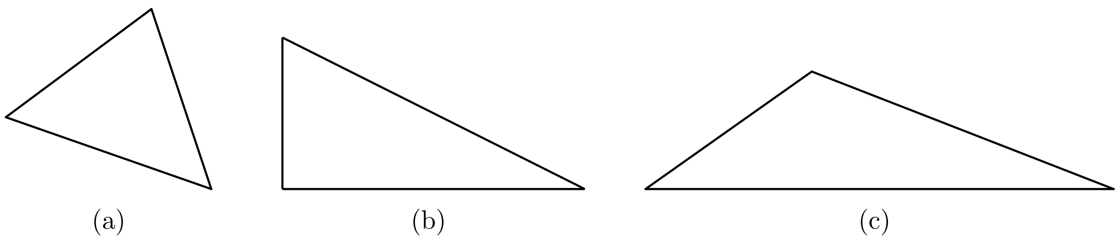



Fig. 1.20 – Triangles acutangle (a), rectangle (b) et obtusangle (c)

3. Au plus grand côté est opposé le plus grand angle (figure 1.21(a)).

4. Dans tout triangle, la longueur d'un coté est :
   - inférieure à la somme des longueurs deux autres côtés,
   - supérieure à leur différence.

5. Dans un triangle, les angles extérieurs issus du même sommet sont égaux (figure 1.21(b)).

6. Dans un triangle, un angle intérieur et un angle extérieur issus d'un même sommet sont supplémentaires (figure 1.21(c)).
7. L'amplitude d'un angle extérieur à un triangle est égale à la somme des amplitudes des deux angles intérieurs non adjacents (figure 1.21(d)).

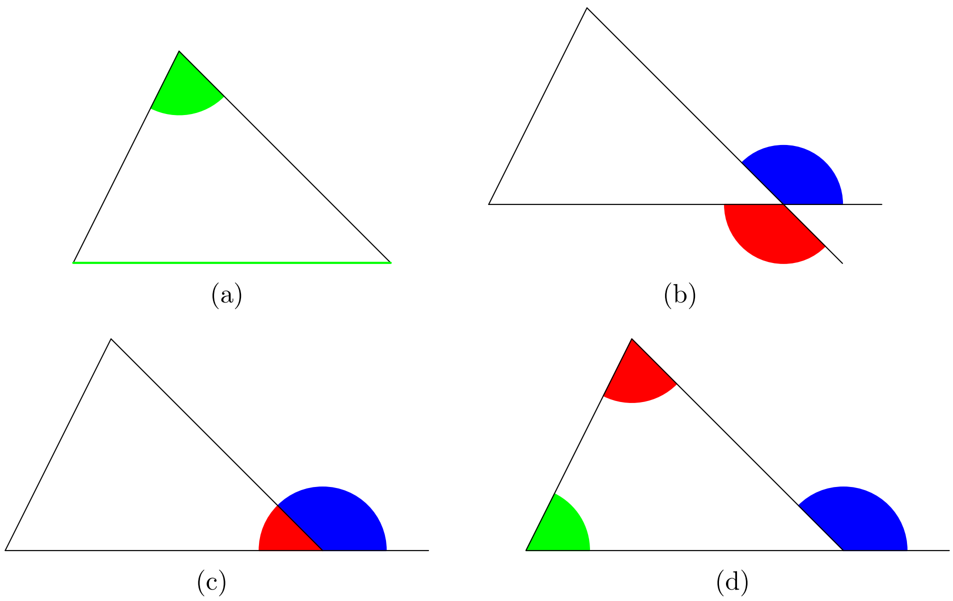



FIG. 1.21 – Propriétés des angles des triangles

### 1.5.2 Droites remarquables d'un triangle

On appelle droite remarquable une droite qui possède une propriété particulière quelque soit le triangle. On distingue quatre types de droites remarquables : les médianes d'un triangle, les hauteurs relatives à chaque côté, les médiatrices de chaque côté et les bissectrices de chaque angle angle.

Le tableau 1.1 reprend les différents types de droites remarquables d'un triangle ainsi que leurs caractéristiques. Pour chacune de ces familles de droites, il existe une intersection commune.

| Droite | Définition | Intersection |
|---|---|---|
| Médiane (a) | Joint un sommet au milieu du côté opposé | Centre de gravité, situé aux 2/3 à partir du sommet |
| Hauteur (b) | Est perpendiculaire à un côté et passe par le sommet opposé à ce dernier | Orthocentre |
| Médiatrice (c) | Est perpendiculaire à un côté et passe par le milieu de celui-ci | Centre du cercle circonscrit au triangle |
| Bissectrice (d) | Partage un angle intérieur en deux angles égaux | Centre du cercle inscrit au triangle |

TAB. 1.1 – Droites remarquables d'un triangle

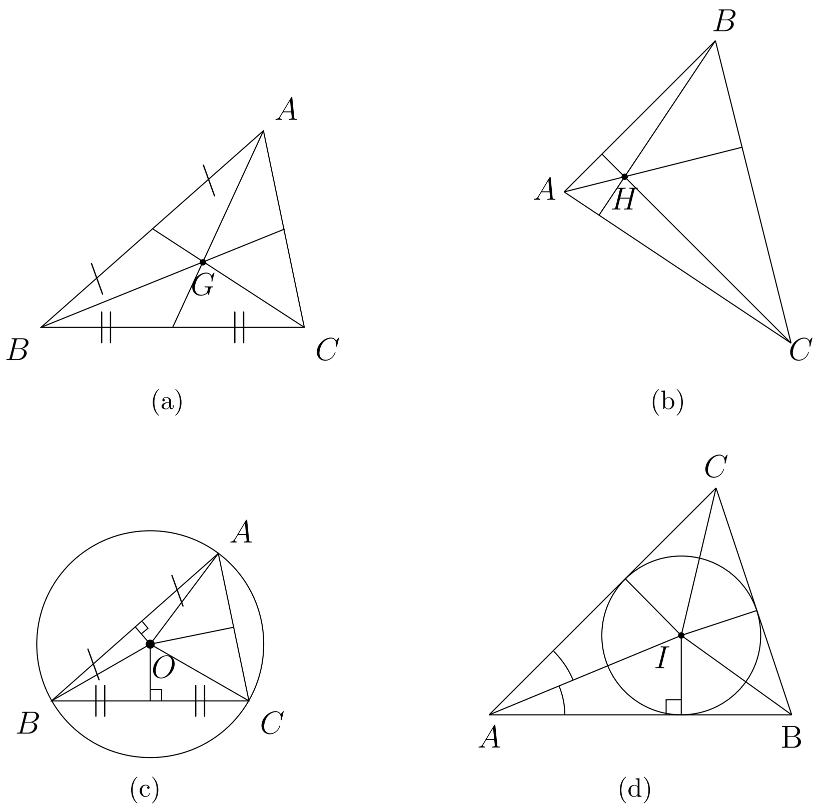



Fig. 1.22 – Droites remarquables d'un triangle

Remarque : le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle obtusangle sont localisés à l'extérieur du triangle alors que ceux d'un triangle acutangle sont situés à l'intérieur de ce triangle.

### 1.5.3 Triangles remarquables

Tout comme les droites remarquables, on appelle triangle remarquable un triangle qui possède des propriétés particulières. Parmi les nombreux triangles remarquables, on ne reprend que les triangles isocèle, équilatéral et rectangle.

#### Triangle isocèle

Définition

Un triangle isocèle est un triangle ayant deux côtés de même longueur.

Le côté de longueur différente est appelé la base et l'angle opposé à ce dernier est parfois désigné par l'angle au sommet ou l'angle principal.

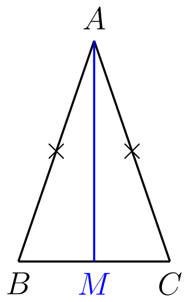



Fig. 1.23 – Triangle isocèle d'angle au sommet $A$ (un seul axe de symétrie)

Propriétés

1. Un triangle est isocèle si et seulement s'il a deux angles égaux.
2. Dans un triangle isocèle, la médiane, la médiatrice, la hauteur relatives à la base et la bissectrice de l'angle au sommet sont confondues. De plus, ces droites coïncident avec l'axe de symétrie du triangle.
3. Si deux droites remarquables d'un triangle coïncident, alors le triangle est isocèle.

**Triangle équilatéral**

Définition

Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés sont de même longueur.

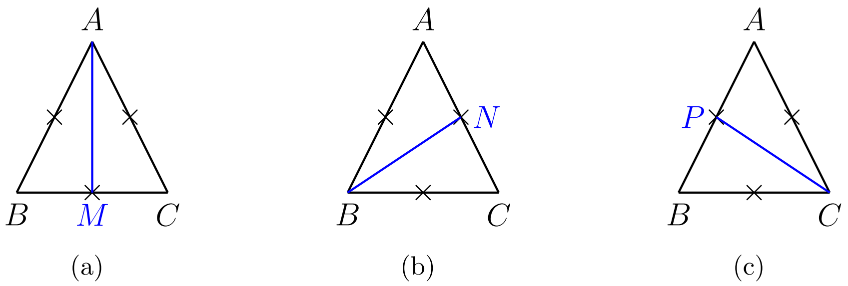



Fig. 1.24 – Triangle équilatéral (trois axes de symétrie)

Propriétés

1. Un triangle est équilatéral si et seulement si les trois angles sont de même amplitude. Ainsi, l'amplitude de chacun des angles intérieurs d'un triangle équilatéral vaut 60°.
2. Dans un triangle équilatéral, relativement à chaque côté, la médiane, la médiatrice, la hauteur relatives à ce côté et la bissectrice de l'angle opposé au côté considéré sont confondues. De plus, ces droites coïncident avec un des axes de symétrie du triangle.
3. Dans un triangle équilatéral, le centre de gravité, l'orthocentre, le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit coïncident.

**Triangle rectangle**

Définition

Un triangle rectangle est un triangle dont deux côtés sont perpendiculaires. De cette façon, l'angle défini par ces deux côtés vaut 90°. On appelle hypoténuse le côté opposé à cet angle.

Propriétés

1. Dans un triangle rectangle, l'orthocentre coïncide avec le sommet de l'angle droit.
2. La relation de Pythagore s'exprime par : un triangle admet un angle droit si et seulement si le carré de la longueur d'un de ses côtés est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (figure 1.25)
$$\widehat{A} = 90^\circ \quad \text{si et seulement si} \quad |AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2.$$
3. Le théorème de la hauteur s'exprime par : un triangle $ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $|AH|^2 = |BH||HC|$ où $H$ est le pied de la hauteur issue de $A$ (figure 1.25).
4. Le théorème de l'angle droit s'exprime par : un triangle $ABC$ est rectangle en $A$ si et seulement si $|AC|^2 = |BC||HC|$ où $H$ est le pied de la hauteur issue de $A$ (figure 1.25).

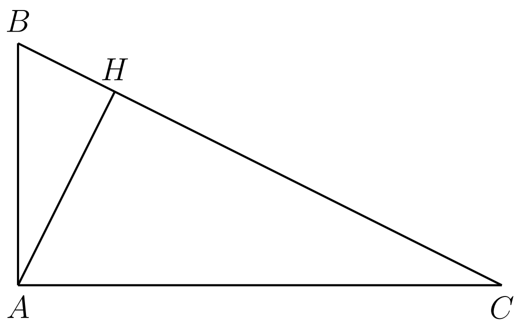



FIG. 1.25 – Triangle rectangle en $A$

## 1.5.4 Triangles isométriques

**Définition**

Deux triangles sont isométriques si leurs côtés sont deux à deux de même longueur et si leurs angles sont deux à deux de même amplitude.

#### Propriétés

Deux triangles sont isométriques si l'un est l'image de l'autre par une isométrie, *i.e.* une symétrie axiale, une symétrie centrale, une translation, une rotation ou une composition de ces transformations.

Pour montrer que deux triangles sont isométriques, il suffit de satisfaire l'une des conditions suivantes (figure 1.26) :
- un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun,
- un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun,
- trois côtés égaux chacun à chacun.

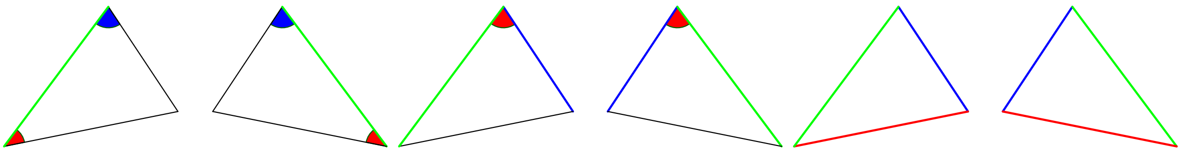


FIG. 1.26 – Triangles isométriques

### 1.5.5 Triangles semblables

#### Définition

Deux triangles sont dits semblables lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure. Ainsi, deux triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels.

Pour obtenir deux triangles semblables, il suffit d'appliquer sur l'un deux une similitude (*e.g.* une isométrie et une homothétie).

#### Propriétés

Pour montrer que deux triangles sont semblables, il suffit de satisfaire l'une des conditions suivantes (figure 1.27) :
- deux angles égaux chacun à chacun,
- un angle égal compris entre deux côtés proportionnels chacun à chacun,
- trois côtés proportionnels chacun à chacun.

Ainsi, tous les triangles équilatéraux sont semblables, de même que ses triangles isométriques sont semblables.

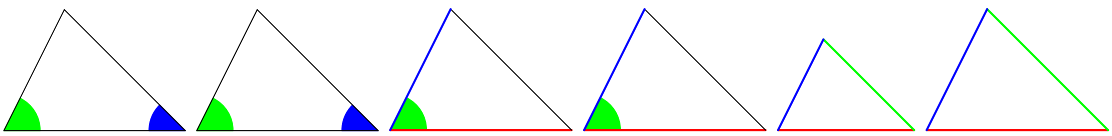


FIG. 1.27 – Triangles semblables

## 1.6 Théorème de la médiane

Le théorème de la médiane exprime une relation entre les longueurs des côtés d'un triangle et la longueur d'une médiane de ce dernier.

Soit $ABP$ un triangle quelconque (figure 1.28). Soit $M$ le milieu du côté $[A, B]$. Le théorème de la médiane s'exprime par

$$|PA|^2 + |PB|^2 = 2|PM|^2 + \frac{1}{2}|AB|^2.$$

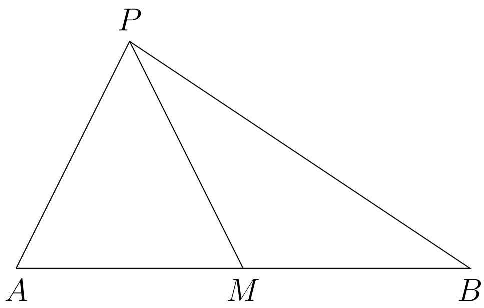



FIG. 1.28 – Théorème de la médiane

## 1.7 Théorème de Thalès

### 1.7.1 Cas général

Un faisceau de droites parallèles découpe sur deux droites des segments dont les longueurs sont proportionnelles (figure 1.29).

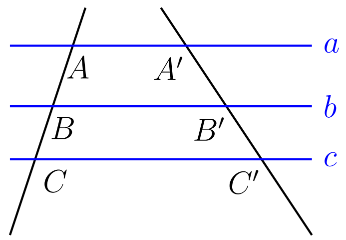



FIG. 1.29 – Théorème de Thalès

Par conséquent,

$$a \mathbin{//} b \mathbin{//} c \quad \Rightarrow \quad \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}.$$

De plus, on a aussi

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A'B'|}{|A'C'|} \quad \text{et} \quad \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|} \quad \text{et} \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|}.$$

### 1.7.2 Réciproque du cas général dans le plan

Si un faisceau de droites déterminent sur des droites qu'il coupe des segments homologues et proportionnels, et si deux droites du faisceau sont parallèles, alors toutes les droites du faisceau sont parallèles.

### 1.7.3 Cas particulier

La droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle et parallèle à un autre côté passe par le milieu du troisième côté.

Réciproquement, le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et en mesure la moitié.

## 1.8 Applications

### 1.8.1 Angle inscrit, angle tangentiel

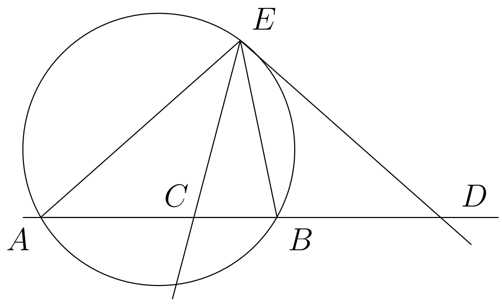
On considère un cercle $\mathcal{C}$ et un point $D$ extérieur au cercle. Par $D$, on trace une droite qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points distincts $A$ et $B$ et une tangente au cercle dont on note $E$ le point de contact. On construit un point $C$ sur $AB$ tel que $|DC| = |DE|$ et tel que $C$ soit intérieur au cercle.

Montrer que la droite $EC$ est bissectrice de l'angle $\widehat{AEB}$.

Solution

Pour montrer que la droite $EC$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AEB}$, il suffit de montrer que les angles $\widehat{AEC}$ et $\widehat{CEB}$ sont de même mesure.

Puisque le triangle $CDE$ est isocèle en $\widehat{CDE}$, les angles $\widehat{ECD}$ et $\widehat{CED}$ sont de même mesure.




De plus, l'angle $\widehat{EAB}$ est un angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et l'angle $\widehat{DEB}$ est un angle tangentiel au cercle $\mathcal{C}$. Puisque ces deux angles interceptent le même arc $\overset{\frown}{EB}$, ils sont égaux.

En se plaçant dans le triangle $EAC$, on peut écrire

$$\widehat{ECB} = \widehat{EAC} + \widehat{AEC}$$

puisque la mesure de l'angle extérieur d'un angle égal à la somme des mesures des deux angles intérieurs non adjacents.

Des développements précédents, on en déduit

$$\widehat{CED} = \widehat{DEB} + \widehat{AEC}$$

et, puisque

$$\widehat{CED} = \widehat{CEB} + \widehat{BED}$$

on conclut

$$\widehat{CEB} = \widehat{AEC}.$$

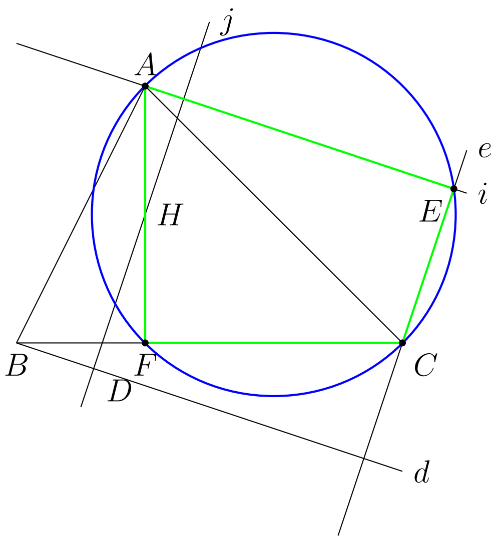
### 1.8.2 Quadrilatères inscriptibles dans un cercle, points alignés

On considère un triangle $ABC$. On note $H$ son orthocentre et $F$ le pied de la hauteur issue de $A$. Par $B$ on mène une droite $d$ ; par $C$ on mène une droite $e \perp d$. La parallèle $i$ à $d$ passant par $A$ coupe $e$ en $E$ ; la parallèle $j$ à $e$ passant par $H$ coupe $d$ en $D$.

1. Montrer que les points $A$, $E$, $F$ et $C$ sont cocycliques et en déduire que les angles $\widehat{AFE}$ et $\widehat{ACE}$ sont égaux ou supplémentaires.
2. Montrer de même que les points $H$, $D$, $F$ et $B$ sont cocycliques et que les angles $\widehat{DBH}$ et $\widehat{DFH}$ sont égaux ou supplémentaires.
3. Montrer que $\widehat{ACE}$ et $\widehat{DBH}$ sont égaux ou supplémentaires.
4. En déduire que les points $D$, $E$ et $F$ sont alignés.

<u>Solution</u>

1. <u>$A$, $E$, $F$ et $C$ sont cocycliques et $\widehat{AFE}$ et $\widehat{ACE}$ sont égaux ou supplémentaires</u>




Puisque par hypothèse,

– la droite $e$ est perpendiculaire à la droite $d$ ,
– la droite $i$ est parallèle à la droite $d$,

on peut en déduire que la droite $e$ est perpendiculaire à la droite $i$.

Par conséquent, $\widehat{AEC} = 90°$.

De plus, la droite $AF$ est la hauteur issue de $A$ dans le triangle $ABC$. Par conséquent, $\widehat{AFC} = 90°$.

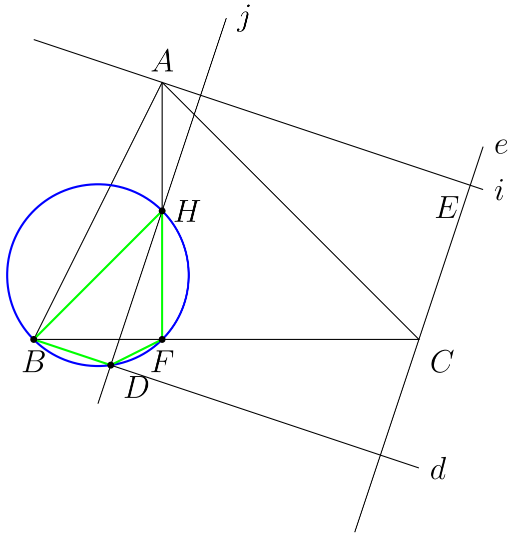
On sait par ailleurs que tout triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle dont le diamètre est l'hypoténuse de ce triangle.

Puisque les triangles $AFC$ et $AEC$ sont des triangles rectangles et que leur hypoténuse est le côté $[A, C]$, on en déduit que ces deux triangles sont inscriptibles dans un même cercle de diamètre $[A, C]$.

Par conséquent, les points $A$, $E$, $F$ et $C$ sont cocycliques et le quadrilatère croisé $ACEF$ possède donc des angles opposés égaux, soit

$$\widehat{AFE} = \widehat{ACE}.$$

2. <u>$H$, $D$, $F$ et $B$ sont cocycliques et $\widehat{DBH}$ et $\widehat{DFH}$ sont égaux ou supplémentaires</u>




Puisque par hypothèse,

– la droite $e$ est perpendiculaire à la droite $d$ ,
– la droite $j$ est parallèle à la droite $e$,

on peut en déduire que la droite $j$ est perpendiculaire à la droite $d$.

Par conséquent, $\widehat{BDH} = 90°$.

De plus, la droite $AF$ est la hauteur issue de $A$ dans le triangle $ABC$. Par conséquent, $\widehat{HFB} = 90°$

Puisque les triangles $BDH$ et $HFB$ sont des triangles rectangles et que leur hypoténuse est le côté $[B, H]$, on en déduit que ces deux triangles sont inscriptibles dans un même cercle de diamètre $[B, H]$.

Par conséquent, les points $H$, $D$, $F$ et $B$ sont cocycliques et le quadrilatère convexe $DBHF$ possède donc des angles opposés supplémentaires, soit

$$\widehat{DBH} + \widehat{DFH} = 180°.$$

3. $\widehat{ACE}$ et $\widehat{DBH}$ sont égaux ou supplémentaires

   Puisque
   – la droite $e$ est perpendiculaire à la droite $d$,
   – $H$ est l'orthocentre du triangle $ABC$, soit $BH \perp AC$,

   on en déduit que $\widehat{ACE} = \widehat{DBH}$ car deux angles à côtés perpendiculaires ont la même amplitude.

4. Les points $D$, $E$ et $F$ sont alignés

   On raisonne ici en terme d'amplitude d'angles. En effet, pour que les points $D$, $E$ et $F$ soient alignés, il faut que l'angle $\widehat{DFE}$ soit un angle plat.

$$\begin{aligned}
\widehat{DFE} &= \widehat{DFA} + \widehat{AFE} && \text{(décomposition)} \\
&= \widehat{DFH} + \widehat{AFE} && (H \text{ appartient à } FA) \\
&= 180° - \widehat{DBH} + \widehat{AFE} && \text{(point 2.)} \\
&= 180° - \widehat{ACE} + \widehat{AFE} && \text{(point 3.)} \\
&= 180° - \widehat{AFE} + \widehat{AFE} && \text{(point 1.)} \\
&= 180°.
\end{aligned}$$

   Ainsi, les points $D$, $E$ et $F$ sont alignés.

### 1.8.3 Triangles isométriques

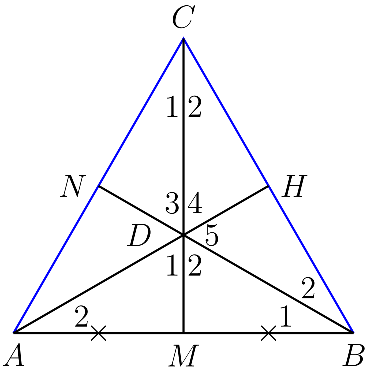
Soit $ABC$ un triangle isocèle ($|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}|$). On note $H$ le pied de la hauteur issue de $A$, $M$ le milieu de $[A, B]$ et $N$ le pied de la bissectrice intérieure issue de $B$. On suppose que les droites $AH, CM$ et $BN$ sont sécantes en un point $D$.

Démontrer que le triangle $ABC$ est équilatéral.

Solution

Le triangle $ABC$ est isocèle en $C$. Par conséquent, $|AC| = |CB|$.

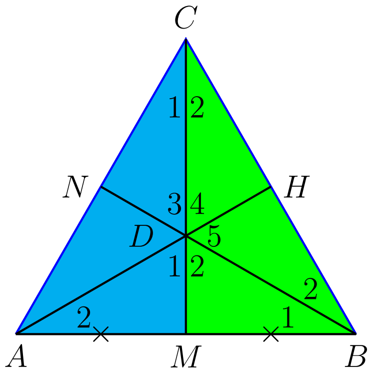
Pour montrer que le triangle $ABC$ est équilatéral, il suffit de montrer que $|AB| = |BC|$. Une idée est de montrer que les triangles $DBA$ et $DBC$ sont isométriques puisqu'ils




possèdent déjà le côté $[D, B]$ en commun et un angle égal ($BN$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$). Il faudrait donc arriver à montrer que les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux.

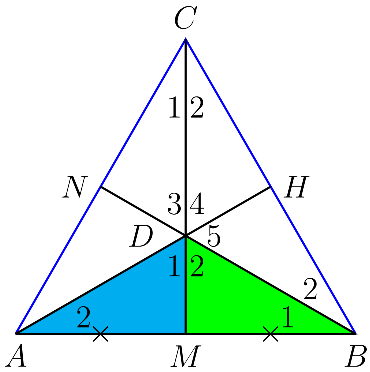
Les triangles $CMB$ et $CMA$ sont isométriques. En effet,
- ils ont le côté $[C, M]$ en commun,
- $|MA| = |MB|$ puisque $M$ est le milieu de $[A, B]$,
- $|CA| = |CB|$ puisque le triangle $ABC$ est isocèle.

Par conséquent, $\widehat{CMA} = \widehat{CMB} = 90^\circ$ puisque les points $A$, $M$ et $B$ sont alignés, et $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$.



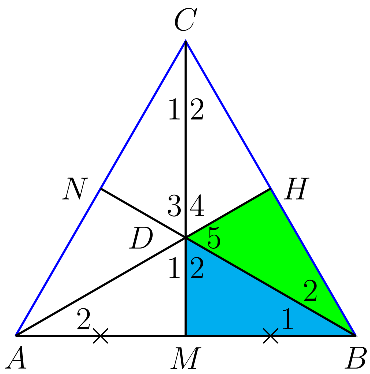

Les triangles $DMB$ et $DMA$ sont isométriques. En effet,
- ils ont le côté $[D, M]$ en commun,
- $|MA| = |MB|$ puisque $M$ est le milieu de $[A, B]$,
- $\widehat{DMA} = \widehat{DMB}$ vu ce qui précède.

Par conséquent, $\hat{A}_2 = \hat{B}_1$, $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ et $\hat{D}_4 = \hat{D}_1$ car ce sont des angles opposés par le sommet.



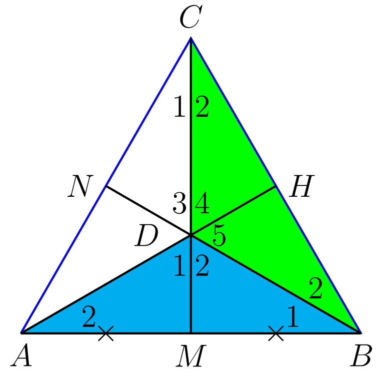

Les triangles $DHB$ et $DMB$ sont isométriques. En effet,
- ils ont le côté $[D, B]$ en commun,
- $|DH| = |DM|$ puisque $D$ appartient à la bissectrice de l'angle $\hat{C}$,
- $\widehat{DHB} = \widehat{DMB}$ car les triangles sont rectangles.

Par conséquent, $\hat{D}_2 = \hat{D}_5$.



Les triangles $BDA$ et $BDC$ sont isométriques.
En effet,
– ils ont le côté $[D, B]$ en commun,
– $\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = \hat{D}_4 + \hat{D}_5$,
– $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ par la bissectrice de l'angle $\hat{B}$.

Par conséquent, $|AB| = |BC|$, et le triangle $ABC$ est équilatéral.



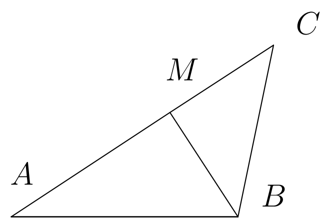

### 1.8.4 Arc capable

Soient deux points fixes $A$ et $B$, et un point $M$ variable tel que l'angle $\widehat{AMB}$ soit de 90°. On prolonge $AM$ en $C$ de telle sorte que $|MC| = |MB|$.

Quel est le lieu des points $C$ lorsque le point $M$ varie ?

<u>Solution</u>

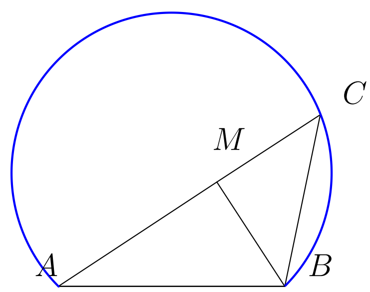
On considère le triangle $AMB$ rectangle en $M$.




Le triangle $MBC$ est isocèle d'angle au sommet $M$. De plus, puisque l'angle $\widehat{BMC}$ est également de 90°, le triangle $MBC$ est un triangle isocèle rectangle.

Par conséquent, la mesure de l'angle $\widehat{MCB}$ ou, puisque les points $A$, $M$ et $C$ sont alignés, la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ est de 45°. La mesure de cet angle reste constante quelle que soit la position de $M$.

Ainsi, le lieu des points $C$ est l'arc capable de l'angle de mesure égale à 45° construit sur le segment $[A, B]$.



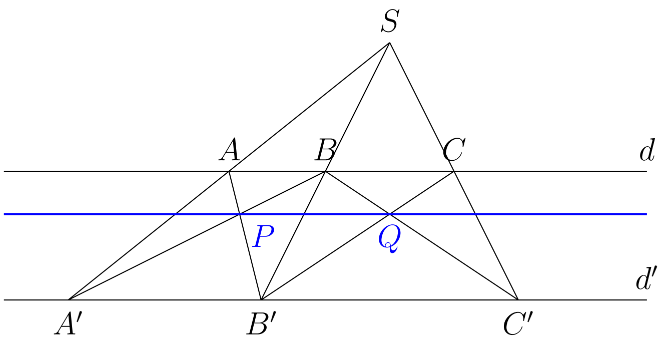
### 1.8.5 Triangles semblables, théorème de Thalès

Trois droites issues d'un point $S$ coupent deux droites parallèles $d$ et $d'$ en $A$, $B$, $C$ et $A'$, $B'$, $C'$ respectivement.

Démontrer que les points d'intersection $P$ et $Q$ des diagonales du trapèze $ABB'A'$ et de celles du trapèze $BCC'B'$ se trouvent sur une droite parallèle à $d$.

Solution

L'idée consiste à montrer que les triangles $BPQ$ et $BA'C'$ sont semblables ou, dans un cas plus général, que la droite $PQ$ découpe sur les droites $BA'$ et $BC'$ des segments homologues proportionnels (et application de la réciproque du théorème de Thalès).




Les triangles $SAB$ et $SA'B'$ sont semblables. En effet, les angles des triangles sont égaux deux à deux :
- $\widehat{ASB} = \widehat{A'SB'}$,
- $\widehat{SAB} = \widehat{SA'B'}$ et $\widehat{SBA} = \widehat{SB'A'}$ car ce sont des angles correspondants compris entre deux parallèles.

De ce fait, les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|SB|}{|SB'|} = \frac{|SA|}{|SA'|}.$$

Par un raisonnement strictement analogue, on montre que les triangles $SBC$ et $SB'C'$ sont semblables et on en déduit

$$\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|SB|}{|SB'|} = \frac{|SC|}{|SC'|}.$$

De ces relations, on peut écrire

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}. \qquad (\star)$$

Les triangles $APB$ et $B'PA'$ sont semblables. En effet, les angles des triangles sont égaux deux à deux :
- $\widehat{APB} = \widehat{A'PB'}$ car ce sont des angles opposés par le sommet,
- $\widehat{PAB} = \widehat{PB'A'}$ et $\widehat{PBA} = \widehat{PA'B'}$ car ce sont des angles alternes-internes compris entre deux parallèles.

De ce fait, les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|PB|}{|PA'|} = \frac{|PA|}{|PB'|}.$$

Par un raisonnement strictement analogue, on montre que les triangles $QBC$ et $QC'B'$ sont semblables et on en déduit

$$\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|BQ|}{|C'Q|} = \frac{|CQ|}{|B'Q|}.$$

En tenant compte de $(\star)$,

$$\frac{|PB|}{|PA'|} = \frac{|BQ|}{|C'Q|}.$$

Ainsi, la droite $PQ$ définit sur les droites $BA'$ et $BC'$ des segments homologues proportionnels de sorte que les triangles $BPQ$ et $BA'C'$ sont semblables. Par la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que la droite $PQ$ est parallèle aux droites $d$ et $d'$.

### 1.8.6 Hauteur, médiane d'un triangle, angles

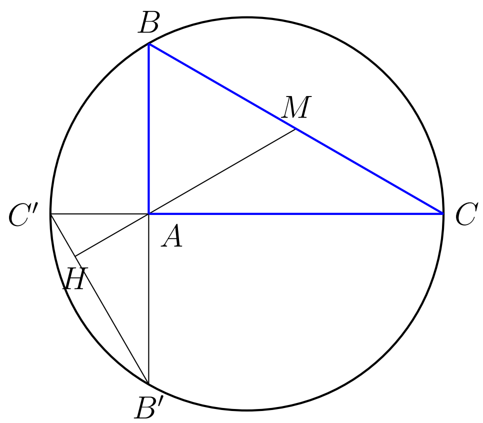
On considère un cercle passant par les extrémités $B$ et $C$ de l'hypoténuse d'un triangle rectangle $ABC$. Ce cercle coupe la droite $AB$ en $B$ et en un autre point noté $B'$. De même, il coupe la droite $AC$ en $C$ et en un autre point noté $C'$. Les points $B'$ et $C'$ sont distincts de $A$.

Démontrer que la médiane issue de $A$ du triangle $ABC$ est confondue avec la hauteur issue de $A$ du triangle $AB'C'$.

Solution

Deux situations sont possibles : soit le point $A$ est à l'extérieur du cercle passant par l'hypoténuse $[B, C]$, soit il est à l'intérieur. On propose d'examiner ce dernier cas (les démonstrations sont analogues).

On appelle $M$ le milieu de l'hypoténuse. Ainsi, la droite $AM$ est la médiane issue du point $A$ dans le triangle rectangle $ABC$. L'intersection de cette droite et de la droite $B'C'$ est notée $H$.



On propose donc de montrer que la droite $AH$ est perpendiculaire à la droite $B'C'$. Ce sera le cas si l'angle $\widehat{AHB'}$ est droit ou, de façon équivalente, si les angles $\widehat{HAB'}$ et $\widehat{HB'A}$ sont complémentaires.

Puisque dans tout triangle rectangle, la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse vaut la moitié de la longueur de celle-ci, on a alors

$$|AM| = \frac{|BC|}{2} = |BM|$$

de sorte que le triangle $ABM$ est isocèle. Les angles $\widehat{MBA}$ et $\widehat{BAM}$ sont donc égaux.

Les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{HAB'}$ sont égaux puisqu'ils sont opposés par le sommet. Par transitivité de l'égalité, les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{HAB'}$ sont égaux.

Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{HB'A}$ sont des angles inscrits dans un même cercle interceptant le même arc $BC'$ ; ils sont donc égaux.

Enfin, puisque le triangle $ABC$ rectangle en $A$, les angles aigus $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires.

Ainsi, on a

$$\begin{cases} \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ \\ \widehat{ABM} = \widehat{HAB'} \\ \widehat{ACB} = \widehat{HB'A} \end{cases} \qquad \text{ce qui entraîne que} \qquad \widehat{HAB'} + \widehat{HB'A} = 90^\circ.$$

Ce qui suffit à conclure que la droite $AM$ est la hauteur issue de $A$ dans le triangle $AB'C'$.

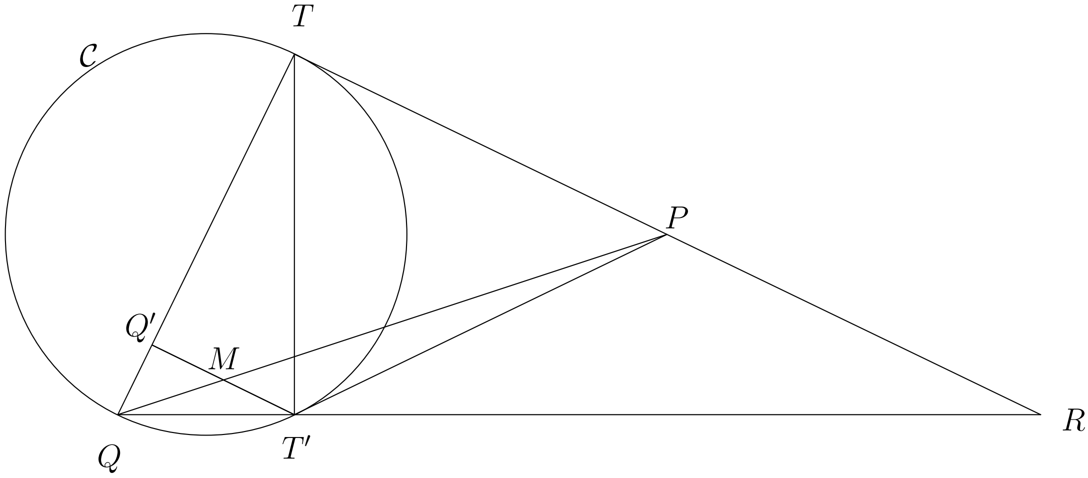
### 1.8.7 Triangle isocèle, milieu, perpendicularité

Par un point $P$ extérieur à un cercle $\mathcal{C}$, on mène les deux tangentes $t$ et $t'$ à ce cercle, les points de tangence étant $T$ et $T'$ respectivement.

Soient $Q$ le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à $T$, $Q'$ le pied de la perpendiculaire abaissée de $T'$ sur $QT$ et $R$ le point d'intersection de $QT'$ avec $t$.

1. Montrer que $TT' \perp QR$.
2. Montrer que le triangle $PT'R$ est isocèle.
3. Montrer que $P$ est le milieu de $[T, R]$.
4. Montrer que $QP$ coupe $[Q', T']$ en son milieu.

Solution




1. Les points $Q$, $T$ et $T'$ sont situés sur un même cercle et sont tels que $[T, Q]$ est un diamètre de ce cercle. Par conséquent, le triangle $QTT'$ est inscriptible dans un demi-cercle et est rectangle en $T'$. Les droites $TT'$ et $QT'$ sont donc perpendiculaires.

2. Pour montrer que le triangle $PT'R$ est isocèle, il suffit de montrer que deux de ses angles sont égaux. On propose de montrer que les angles $\widehat{PT'R}$ et $\widehat{PRT'}$ sont égaux.

   Les angles $\widehat{PTT'}$ et $\widehat{PT'T}$ sont égaux puisque ce sont des angles tangentiels au cercle $\mathcal{C}$ qui interceptent le même arc. Ainsi, puisque les droites $QT'$ et $TT'$ sont perpendiculaires, il vient que

   $$\widehat{PT'R} = 90° - \widehat{TT'P} = 90° - \widehat{T'TP}.$$

   Puisque le triangle $TT'R$ est rectangle en $T'$, les angles $\widehat{TT'R}$ et $\widehat{T'RT}$ sont complémentaires

   $$\widehat{PRT'} = 90° - \widehat{T'TR}.$$

   Par conséquent, les angles $\widehat{PT'R}$ et $\widehat{PRT'}$ sont égaux et le triangle $PT'R$ est isocèle en $P$.

3. Puisque les angles tangentiels $\widehat{PTT'}$ et $\widehat{PT'T}$ au cercle $\mathcal{C}$ sont égaux, le triangle $TT'P$ est isocèle et $|TP| = |PR|$.

   Du point 2., on a déduit que le triangle $PT'R$ est isocèle en $P$, soit $|T'P| = |PR|$.

   Par transitivité de l'égalité, on a $|PR| = |TP|$ de sorte que $P$ est le milieu du segment $[T, R]$.

4. Les droites $TR$ et $Q'T'$ sont parallèles puisque $TR$ est une tangente au cerle $\mathcal{C}$ perpendiculaire au diamètre $[T, Q]$ et que $Q'T'$ est aussi perpendiculaire au diamètre $[T, Q]$.

En montrant que les triangles $QQ'M$ et $QTP$ d'une part et $QMT'$ et $QPR$ d'autre part sont semblables (trois angles égaux chacun à chacun), on arrive à

$$\frac{|Q'M|}{|TP|} = \frac{|QM|}{|QP|} \quad \text{et} \quad \frac{|QM|}{|QP|} = \frac{|MT'|}{|PR|}$$

de sorte que

$$\frac{|Q'M|}{|TP|} = \frac{|MT'|}{|PR|}$$

ou, puisque par le point 3., le point $P$ est le milieu du segment $[T, R]$,

$$|Q'M| = |MT'|.$$

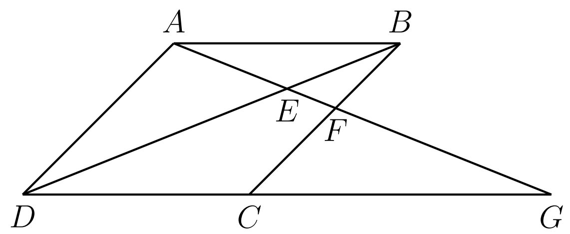
Par conséquent, le point $M$ est le milieu du segment $[Q', T']$.

### 1.8.8 Triangles semblables

On considère un parallélogramme $ABCD$. Une droite $d$ contenant $A$ intersecte $DB$ en $E$, $CB$ en $F$ et $DC$ en $G$. On suppose que $E$ est intérieur à $[D, B]$ et $F$ intérieur à $[B, C]$.

Montrer qu'on a $|\overrightarrow{AE}|^2 = |\overrightarrow{EF}|\,|\overrightarrow{EG}|$.

Solution




Les triangles $AEB$ et $DEG$ sont semblables puisque leurs trois angles sont égaux chacun à chacun (angles opposés par le sommet et angles alternes-internes compris entre deux droites parallèles). Par conséquent,

$$\frac{|AE|}{|EG|} = \frac{|EB|}{|DE|}. \qquad (\dagger)$$

On montre, en utilisant le même critère de similitude, que les triangles $AED$ et $BEF$ sont semblables. De là,

$$\frac{|EF|}{|AE|} = \frac{|EB|}{|DE|}. \qquad (\ddagger)$$

En égalant les relations (†) et (‡), on obtient

$$\frac{|EF|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|EG|}$$

soit

$$|AE|^2 = |EF||EG|.$$

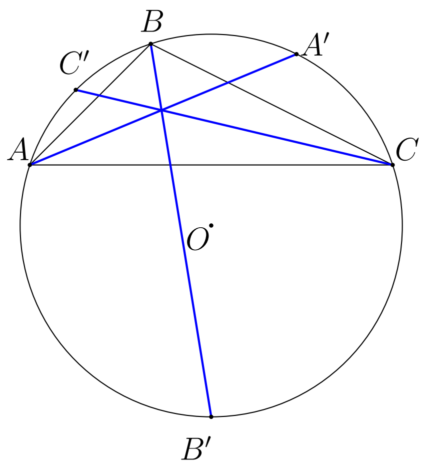
### 1.8.9 Droites concourantes, droites particulières d'un triangle

Soient $ABC$ un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit (c'est-à-dire le cercle passant par $A, B$ et $C$).

On note $A'$ le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la médiatrice du segment $[B, C]$ qui est tel que $A$ et $A'$ soient situés de part et d'autre de la droite $BC$.

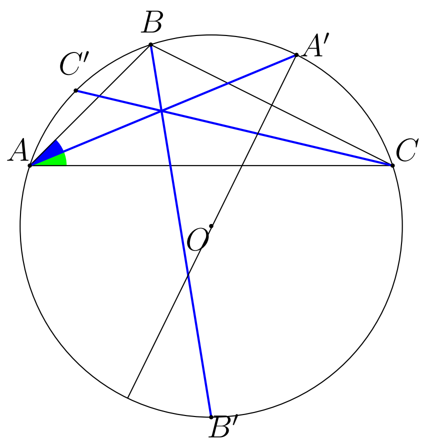
Les points $B'$ et $C'$ sont définis de façon analogue : $B'$ sur $\mathcal{C}$ et la médiatrice du segment $[A, C]$, $C'$ sur $\mathcal{C}$ et la médiatrice du segment $[B, C]$, $B$ et $B'$ de part et d'autre de $AC$, $C$ et $C'$ de part et d'autre de $AB$.

Prouver que les droites $AA'$, $BB'$ et $CC'$ sont concourantes.




Solution

Une solution consiste à montrer que les droites $AA'$, $BB'$ et $CC'$ sont des droites remarquables du triangle $ABC$. Ces droites passent par chacun des sommets du triangle $ABC$. Après quelques réflexions, on propose de montrer que ces droites sont les bissectrices des angles intérieurs du triangle $ABC$.




Puisque $OA'$ est la médiatrice du segment $[B, C]$, *i.e.* le lieu des points équidistants de deux points distincts, on a

$$|BA'| = |CA'|.$$

Comme deux cordes de même longueur interceptent dans un même cercle des arcs de même longueur, on a aussi

$$|\overset{\frown}{BA'}| = |\overset{\frown}{CA'}|.$$

Par conséquent,

$$\widehat{CAA'} = \widehat{BAA'}$$

car des angles inscrits interceptant des arcs de même longueur ont la même amplitude.

De là, on en déduit que $AA'$ est la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

Par un raisonnement analogue, on peut montrer que
- $BB'$ est la bissectrice de $\widehat{ABC}$,
- $CC'$ est la bissectrice de $\widehat{BCA}$.

Puisque dans un triangle, les bissectrices des angles intérieurs sont concourantes, on en déduit que les droites $AA'$, $BB'$ et $CC'$ le sont.

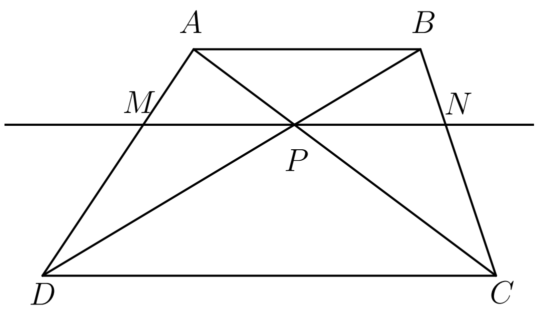
## 1.9 Exercices proposés

### 1.9.1 Triangles semblables, théorème de Thalès

Dans un trapèze convexe $ABCD$, les diagonales $AC$ et $BD$ se coupent en $P$. La parallèle à la base $CD$ passant par $P$ coupe $AD$ en $M$ et $BC$ en $N$.

1. Démontrer que $|MP| = |PN|$.
2. Démontrer que

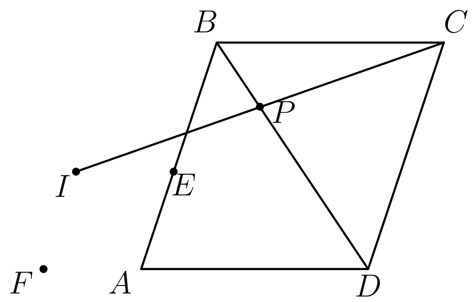
$$\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{2}{|MN|}.$$




### 1.9.2 Points alignés dans le plan, parallélogramme

On considère un parallélogramme $ABCD$. Soit $P$ un point de la diagonale $BD$ et $I$ un point tel que $P$ soit le milieu de $[C, I]$. Par $I$, on mène la parallèle à $AD$, qui coupe $AB$ en $E$, puis la parallèle à $AB$, qui coupe $AD$ en $F$.

1. Montrer que les points $P, E, F$ sont alignés.
2. Montrer que la direction de la droite $PEF$ reste constante lorsque $P$ parcourt la droite $BD$.

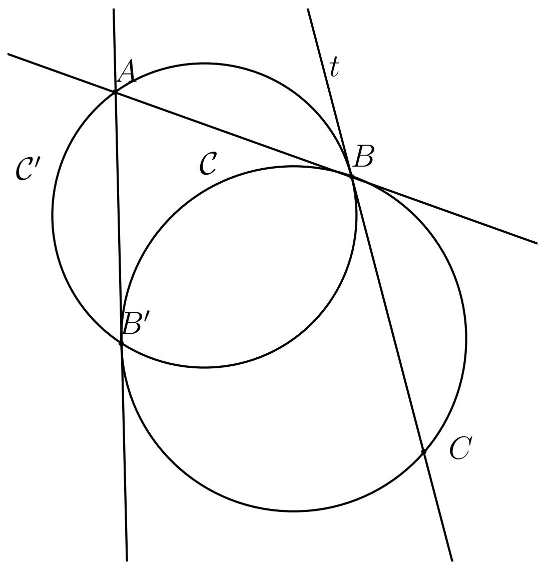



### 1.9.3 Angle tangentiel, angle inscrit

Par un point $A$ extérieur à un cercle $\mathcal{C}$, on mène les tangentes à celui-ci, qui rencontrent $\mathcal{C}$ aux deux points de tangence $B$ et $B'$.

Soient $\mathcal{C}'$ le cercle circonscrit au triangle $ABB'$ et $t$ la tangente à $\mathcal{C}'$ issue de $B$. La droite $t$ rencontre $\mathcal{C}$ en $B$ et en un deuxième point $C$.

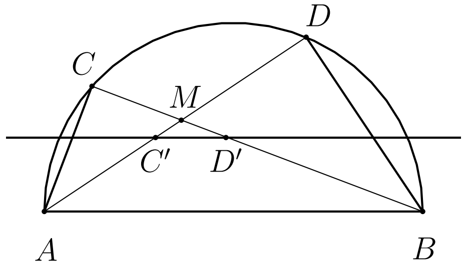
1. Démontrer que le triangle $CBB'$ est isocèle.
2. Démontrer que les hauteurs issues de $B$ dans les triangles $ABB'$ et $CBB'$ ont la même longueur.
3. Démontrer que le centre du cercle inscrit au triangle $AB'C$ est situé sur la droite $BB'$.




### 1.9.4 Triangles semblables, droites parallèles

Soient $\mathcal{C}$ un demi-cercle de diamètre $[A, B]$ et $C$, $D$ deux points de $\mathcal{C}$ distincts de $A$ et $B$. On suppose que les cordes $AD$ et $BC$ se coupent en $M$. On fixe $C'$ sur la corde $AD$ tel que $|AC'| = |AC|$ et $D'$ sur la corde $BC$ tel que $|BD'| = |BD|$.

Démontrer que les triangles $ACM$ et $BDM$ sont semblables et que $C'D'$ est parallèle à $AB$.

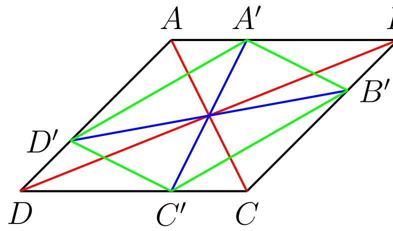



### 1.9.5 Parallélogramme, triangles isométriques

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On porte sur les côtés $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$, les points $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ tels que

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'|.$$

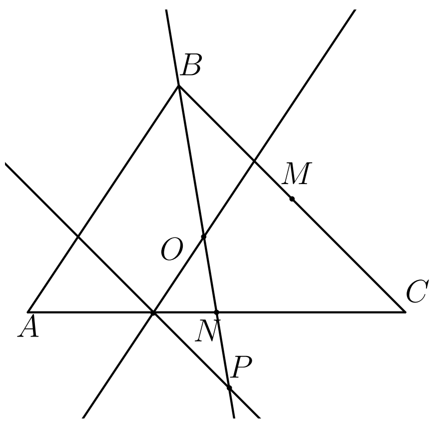
Démontrer que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme et que ses diagonales et celles de $ABCD$ sont concourantes.




### 1.9.6 Triangles et parallélogrammes dans le plan

Soit $ABC$ un triangle. On désigne par $M$ le milieu de $[B, C]$, par $N$ le milieu de $[A, C]$ et par $O$ le point d'intersection de $AM$ et $BN$. La droite $BN$ coupe la parallèle à $CO$ passant par $A$ en $P$.

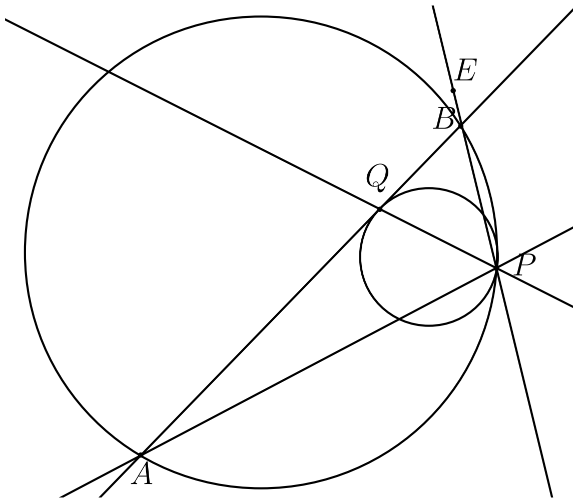
Démontrer que la parallèle à $AB$ passant par $O$ et la parallèle à $BC$ passant par $P$ se coupent en un point de $AC$.



### 1.9.7 Bissectrice d'un angle, cercles intérieurement tangents

Soit un cercle $\mathcal{C}$ tangent intérieurement à un autre cercle $\mathcal{C}'$, le point de tangence étant noté $P$. Par un point $Q$ de $\mathcal{C}$, on mène une tangente à $\mathcal{C}$ qui rencontre $\mathcal{C}'$ en deux points $A$ et $B$.

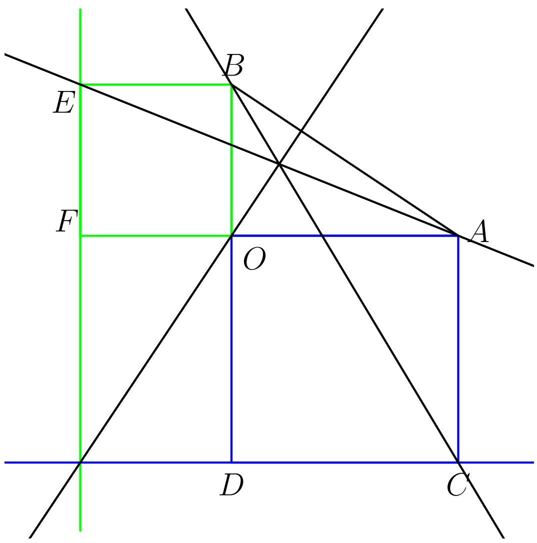
Démontrer que la droite $PQ$ est la bissectrice d'un des angles formés par les droites $PA$ et $PB$.




### 1.9.8 Triangle rectangle, droites concourantes

Sur les côtés $OA$ et $OB$ d'un triangle $OAB$ rectangle en $O$, on construit les carrés $OACD$ et $OBEF$ à l'extérieur du triangle $OAB$.

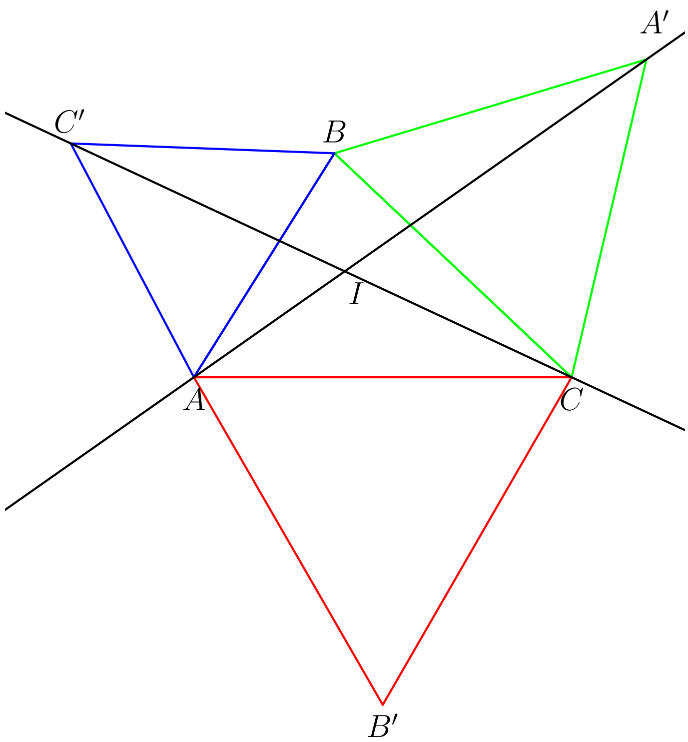
1. Démontrer que la hauteur du triangle issue de $O$ et les droites $EF$ et $CD$ sont concourantes.
2. Démontrer que cette hauteur est également concourante avec les droites $AE$ et $BC$.



### 1.9.9 Triangles isométriques, points alignés

On considère un triangle $ABC$ dont les angles sont inférieurs à 120°. On construit les triangles équilatéraux $ABC'$, $BCA'$ et $ACB'$ extérieurs à $ABC$. On note $I$ l'intersection de $AA'$ et $CC'$.

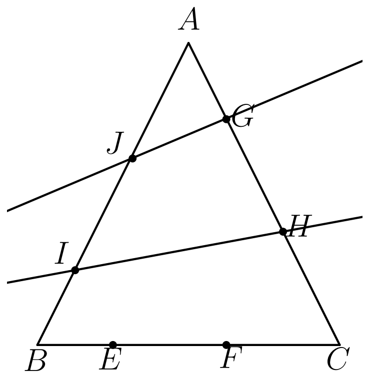
1. Démontrer que $|AA'| = |BB'| = |CC'|$.
2. Démontrer que $\widehat{BIC} = \widehat{BIA} = 120°$.
3. Démontrer que les droites $AA'$, $BB'$ et $CC'$ sont concourantes.




### 1.9.10 Parallélisme de droites dans le plan

Soit $ABC$ un triangle isocèle en $A$ (c'est-à-dire tel que les côtés $[A,B]$ et $[A,C]$ sont de même longueur). On considère deux points $E$ et $F$ distincts situés à l'intérieur du segment $[B,C]$. Les parallèles à $AB$ menées par $E$ et par $F$ coupent respectivement $[A,C]$ en $G$ et $H$. Les parallèles à $AC$ menées par $E$ et $F$ coupent respectivement $[A,B]$ en $I$ et $J$.

1. Démontrer que les segments $[I,J]$ et $[G,H]$ sont de même longueur.
2. Enoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les positions de $E$ et $F$ pour que les droites $JG$ et $IH$ soient parallèles.

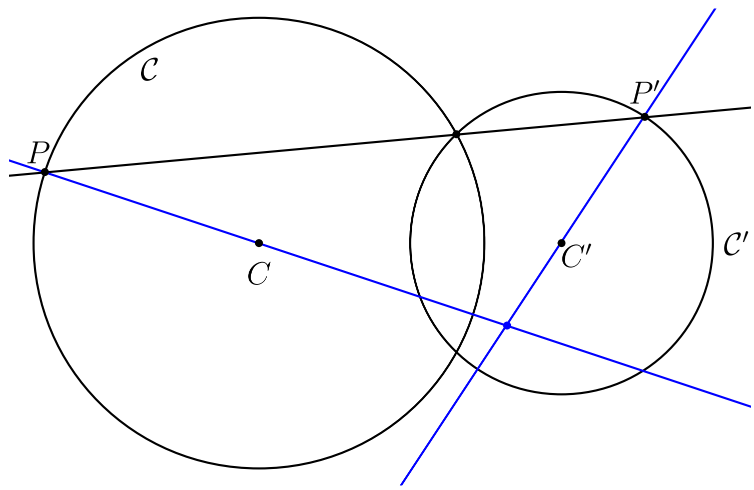



### 1.9.11 Arc capable

Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectivement de centres $C$ et $C'$. Les deux cercles sont non concentriques mais sécants en deux points.

Par un point d'intersection de ces deux cercles, on mène une droite mobile $d$ qui intercepte le cercle $\mathcal{C}$ en $P$ et le cercle $\mathcal{C}'$ en $P'$.

Quel est le lieu des points d'intersection des droites $CP$ et $C'P'$ ?

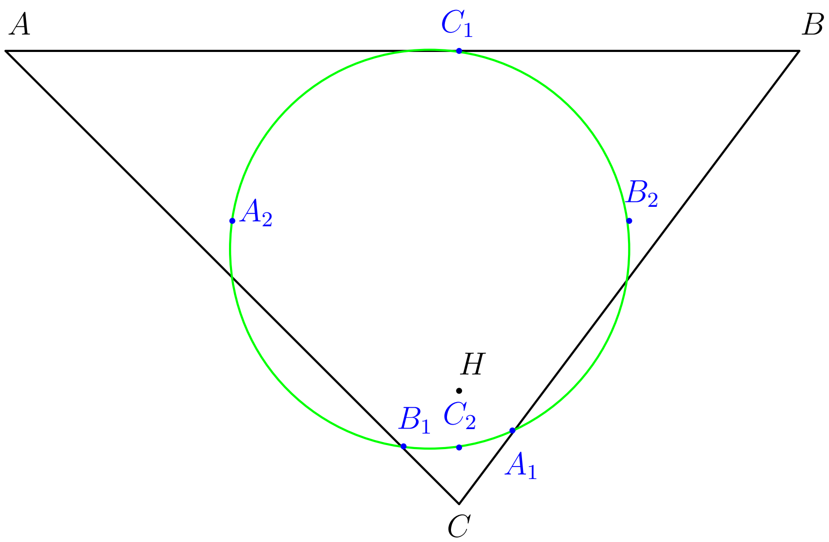



### 1.9.12 Points cocycliques

Dans un repère orthonormé du plan, on donne un triangle $ABC$ : $A(-4,0)$, $B(3,0)$ et $C(0,-4)$. On désigne par $H$ son orthocentre.

On note $A_1$ (resp. $B_1, C_1$) le pied de la hauteur issue de $A$ (resp. $B, C$) et $A_2$ (resp. $B_2, C_2$) le milieu de $AH$ (resp. $BH$, $CH$).

Vérifiez que les six points $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sont cocycliques.



$A$
$C_1$
$B$
$A_2$
$B_2$
$H$
$B_1$
$C_2$
$A_1$
$C$

# Chapitre 2

# Géométrie vectorielle

## 2.1 Notion d'espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble $E$ d'éléments appelés vecteurs si

- on définit une opération d'addition entre ces vecteurs telle que

$$\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E$$

  et jouissant des propriétés de commutativité

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$$

  et d'associativité

$$\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w},$$

- on définit une opération de multiplication par un scalaire telle que

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \overrightarrow{u} \in E$$

  et jouissant des propriétés de distributivité

$$\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{u} + \lambda \overrightarrow{v}$$

  et d'associativité

$$\lambda(\mu \overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u} = \lambda\mu \overrightarrow{u},$$

- il existe un vecteur neutre $\overrightarrow{0}$ appartenant à $E$ tel que

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u},$$

- à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ appartenant à $E$, on peut faire correspondre son opposé noté $-\overrightarrow{u}$,
- la multiplication d'un vecteur par l'unité laisse ce vecteur inchangé.

Les règles de calcul classiques de l'addition et du produit de nombres réels s'appliquent également aux éléments de l'espace vectoriel.

A titre d'exemples, l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication est un espace vectoriel et l'ensemble des vecteurs-colonnes à $n$ composantes réelles $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur le corps des nombres réels.

## 2.2 Généralités sur les vecteurs en géométrie

Soient deux points $P$ et $Q$ de l'espace. On appelle vecteur $\overrightarrow{PQ}$ le segment de droite orienté d'origine $P$ et d'extrémité $Q$ (figure 2.1).

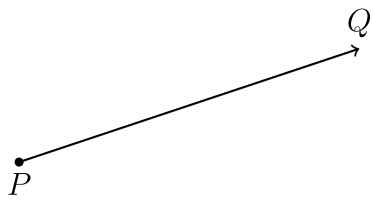



FIG. 2.1 – Vecteur d'origine $P$ et d'extrémité $Q$

La droite $PQ$ est le support du vecteur. Le sens du vecteur est donné par le sens de parcours du segment $[P, Q]$, de l'origine vers l'extrémité. La longueur du segment $[P, Q]$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ notée $||\overrightarrow{PQ}||$ ou encore $|PQ|$.

Si $P$ et $Q$ sont deux points confondus, ils définissent le vecteur nul $\overrightarrow{0}$.

## 2.3 Opérations sur les vecteurs

### 2.3.1 Egalité de deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont égaux si et seulement s'ils sont portés par des droites parallèles, s'ils sont dirigés dans le même sens et s'ils ont la même norme.

### 2.3.2 Multiplication d'un vecteur par un réel

Soient un réel $r$ non nul et un vecteur $\overrightarrow{PQ}$ non nul.

Le vecteur $\overrightarrow{PS} = r\overrightarrow{PQ}$ est le vecteur d'origine $P$ qui a
- le même support que $\overrightarrow{PQ}$,
- comme longueur celle de $\overrightarrow{PQ}$ multipliée par $|r|$,
- le même sens que $\overrightarrow{PQ}$ si $r > 0$ et le sens opposé si $r < 0$ (figure 2.2).

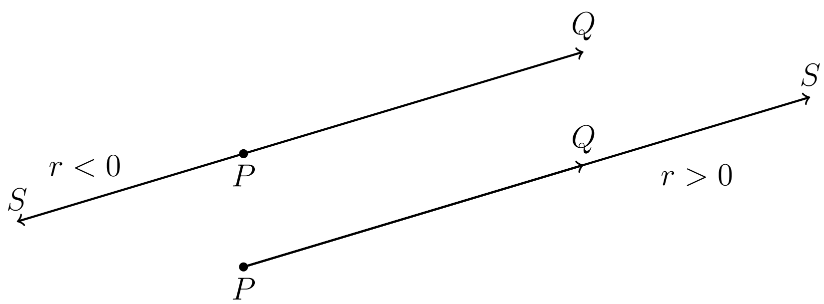



FIG. 2.2 – Multiplication d'un vecteur par un réel

Si $r = 0$ ou si $\overrightarrow{PQ}$ est le vecteur nul alors $\overrightarrow{PS}$ est le vecteur nul.

Deux vecteurs sont parallèles si l'un est multiple de l'autre.

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si les côtés opposés sont deux à deux parallèles (figure 2.3). Vectoriellement, la condition nécessaire et suffisante est

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

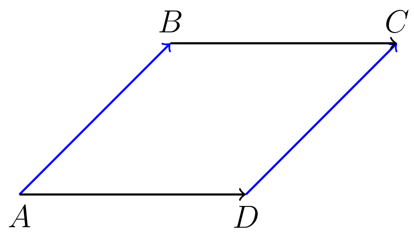



FIG. 2.3 – Vecteurs et parallélogramme

### 2.3.3 Somme de deux vecteurs

#### Vecteurs de même origine mais non parallèles

Dans ce cas, on applique la règle du parallélogramme (figure 2.4) : $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS}$.

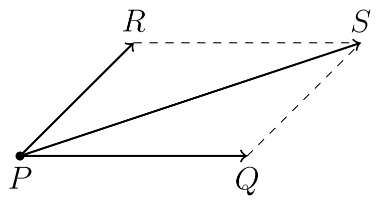



FIG. 2.4 – Règle du parallélogramme

#### Vecteurs d'origine différente et non parallèles

Lorsque l'on est en présence de tels vecteurs, on fait coïncider par translation l'origine du second avec l'extrémité du premier. De cette façon, le vecteur somme a alors pour origine l'origine du premier vecteur et pour extrémité celle du second translaté (figure 2.5).

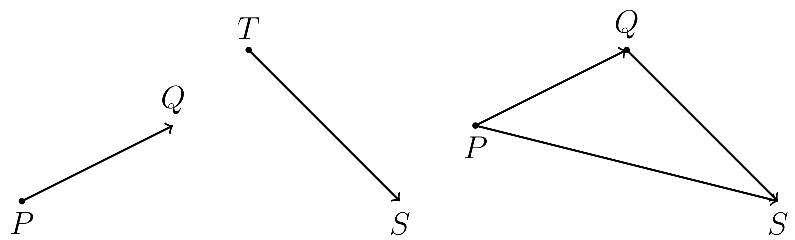



FIG. 2.5 – Multiplication d'un vecteur par un réel

#### Vecteurs de même origine et parallèles

Si les vecteurs sont de même sens, le vecteur somme a le même support et le même sens que les vecteurs à additionner. Sa norme est égale à la somme des normes de ceux-ci.

Si les vecteurs sont de sens opposés, le vecteur somme a
- le même support que les vecteurs à additionner,
- le sens de celui qui a la plus grande norme,
- comme norme la différence entre les normes de ceux-ci.

#### Vecteurs d'origine différente et parallèles

Dans ce cas, on fait coïncider les origines des deux vecteurs et on applique la régle ci-dessus (figure 2.6).

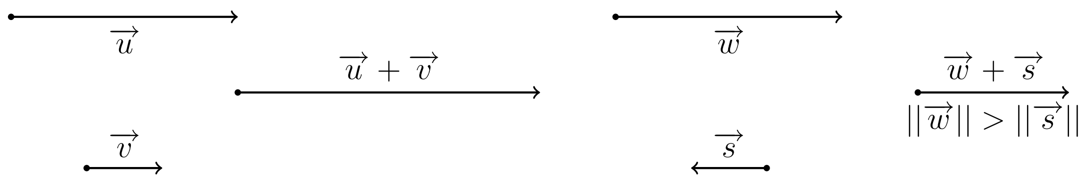



FIG. 2.6 – Vecteurs parallèles

## 2.4 Produit scalaire

### 2.4.1 Définition générale

Un produit scalaire, dans un espace vectoriel $E$, est une loi qui à deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ associe le nombre $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ ayant les propriétés suivantes
- positivité
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}\geq 0$$
l'égalité ayant lieu si et seulement si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$,
- symétrie
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u},$$
- bilinéarité
$$\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w},$$
- multiplication par un réel
$$r\,\overrightarrow{u}\cdot s\,\overrightarrow{v}=rs\;\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$$

où $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont quelconques dans $E$ et où $r$ et $s$ sont des nombres réels arbitraires.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est un espace vectoriel euclidien.

### 2.4.2 Définition adoptée

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls (figure 2.7) est défini par

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\cos\theta$$

où $||\overrightarrow{u}||, ||\overrightarrow{v}||$ désignent la norme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\theta$ est l'angle que font les vecteurs entre eux et est compris entre 0 et 180°.

Le produit scalaire de deux vecteurs dont un est nul est, par définition, nul.

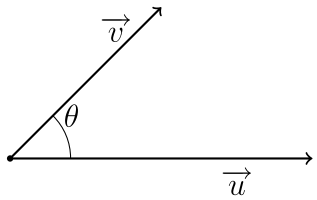



FIG. 2.7 – Produit scalaire de deux vecteurs

### 2.4.3 Propriétés

1. Il faut insister sur le fait qu'un produit scalaire représente un nombre réel.
2. La définition du produit scalaire est indépendant de l'orientation de l'angle $\theta$ ($\theta$, $-\theta$, $360° - \theta$, ...).
3. Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls est nul si et seulement si les vecteurs sont perpendiculaires.
4. Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls est égal au produit scalaire de l'un deux $\overrightarrow{u}$ et de la projection orthogonale $\overrightarrow{v'}$ de l'autre sur la droite supportant le premier vecteur (ou une droite parallèle à cette dernière)
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v'}.$$

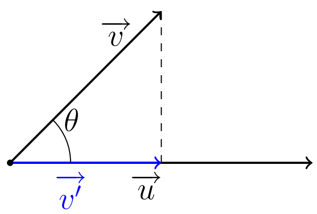



FIG. 2.8 – Produit scalaire et projection orthogonale

5. Le produit scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par lui même est parfois appelé carré scalaire
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2.$$
6. On définit les produits remarquables dans l'espace vectoriel
$$(\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 \pm 2\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2,$$
$$\overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}).$$
De façon analogue aux définitions qui ont été faites dans le corps des réels, on peut montrer les inégalités triangulaires suivantes
$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||,$$
$$||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|| \geq \left|\ ||\overrightarrow{u}|| - ||\overrightarrow{v}||\ \right|.$$

## 2.5 Théorème de la médiane

Dans un triangle quelconque $APB$ (figure 2.9), le théorème de la médiane, défini en géométrie synthétique plane, prend la forme vectorielle

$$||\overrightarrow{PA}||^2 + ||\overrightarrow{PB}||^2 = 2||\overrightarrow{PM}||^2 + \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}||^2$$

où $M$ est le milieu du segment $[A, B]$.

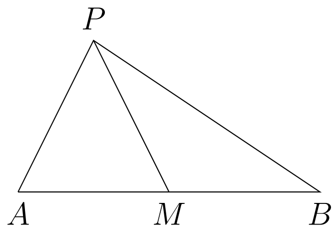



FIG. 2.9 – Théorème de la médiane

D'autres résultats dont la preuve est laissée à l'étudiant peuvent s'avérer utiles

$$||\overrightarrow{PA}||^2 - ||\overrightarrow{PB}||^2 = 2\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP},$$
$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = ||\overrightarrow{PM}||^2 - ||\overrightarrow{MA}||^2.$$

## 2.6 Centre de gravité

### 2.6.1 Définition

Soient $P_1$, $P_2$, ..., $P_k$ $k$ points de l'espace (figure 2.10).

Le point $G$ est le centre de gravité de ces $k$ points si et seulement si ce point satisfait à la relation

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{MP_2} + \ldots + \overrightarrow{MP_k}}{k}$$

où $M$ est un point quelconque de l'espace.

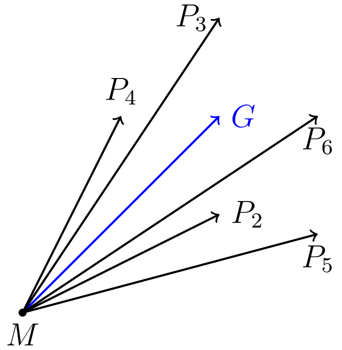



FIG. 2.10 – Centre de gravité d'un ensemble de points

Notons que cette définition est également valable dans le plan.

### 2.6.2 Cas particuliers

Dans un repère, le point $M$ peut correspondre à l'origine $O$ du repère. Dans ce cas, la relation vectorielle se réduit à

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_k}}{k}.$$

Puisque le point $M$ est un point quelconque de l'espace, il peut également coïncider avec le centre de gravité $G$ de cet ensemble de point. Il vient alors

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{GP_1} + \overrightarrow{GP_2} + \ldots + \overrightarrow{GP_k}.$$

### 2.6.3 Expression algébrique

Dans un repère d'origine $O$, les coordonnées du centre de gravité d'un ensemble de $k$ points $P_1$, $P_2$, ..., $P_k$ sont données par

$$x_G = \frac{x_{P_1} + x_{P_2} + \ldots + x_{P_k}}{k}$$
$$y_G = \frac{y_{P_1} + y_{P_2} + \ldots + y_{P_k}}{k}$$
$$z_G = \frac{z_{P_1} + z_{P_2} + \ldots + z_{P_k}}{k}$$

où $(x_K, y_K, z_K)$ sont les coordonnées du point $K$ dans ce repère.

En particulier, le milieu d'un segment $[A, B]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

et le centre de gravité d'un triangle $ABC$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

Ces définitions sont bien entendu valables dans le plan en ne considérant que deux coordonnées.

## 2.7 Puissance d'un point par rapport à un cercle

### 2.7.1 Définition

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et de rayon $r$, et un point $P$. Une droite $d$ issue de $P$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points $A$ et $B$ (figure 2.11).

On appelle la puissance du point $P$ par rapport au cercle $\mathcal{C}$ le nombre noté $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P)$ égal au le produit scalaire

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}.$$

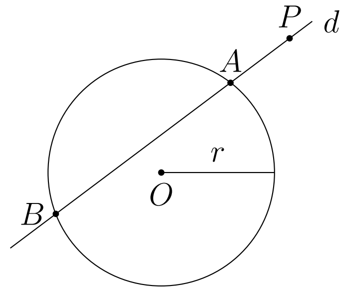



FIG. 2.11 – Puissance d'un point $P$ par rapport à un cercle

### 2.7.2 Propriétés

1. La puissance d'un point ne dépend pas de l'inclinaison de la droite $d$ passant par le point $P$
$$\mathcal{P}_\mathcal{C}(P) = ||\overrightarrow{PO}|| - r^2.$$
Ce résultat se montre facilement par géométrie vectorielle.

   Remarque : en fonction de la position du point $P$ par rapport au cercle $\mathcal{C}$, on peut distinguer trois cas :
   - si le point $P$ est extérieur au cercle $\mathcal{C}$, la puissance $\mathcal{P}_\mathcal{C}(P)$ de ce point par rapport au cercle $\mathcal{C}$ est positive,
   - si le point $P$ est sur cercle $\mathcal{C}$, la puissance $\mathcal{P}_\mathcal{C}(P)$ de ce point par rapport au le cercle $\mathcal{C}$ est nulle,
   - si le point $P$ est intérieur au cercle $\mathcal{C}$, la puissance $\mathcal{P}_\mathcal{C}(P)$ de ce point par rapport au le cercle $\mathcal{C}$ est négative.

2. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et de rayon $r$, et un point $P$ extérieur au cercle $\mathcal{C}$ (figure 2.12). On appelle $T$ et $T'$ les points de contact des tangentes au cercle $\mathcal{C}$ issues du point $P$. On a
$$\mathcal{P}_\mathcal{C}(P) = ||\overrightarrow{PT}||^2 = ||\overrightarrow{PT'}||^2.$$
Ce résultat se démontre facilement en utilisant le théorème de Pythagore.

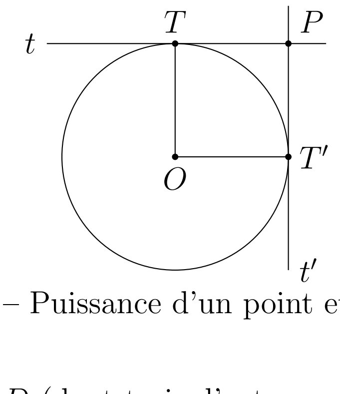



FIG. 2.12 – Puissance d'un point et tangentes

3. Quatre points $A, B, C$ et $D$ (dont trois d'entre eux ne sont pas alignés) sont cocycliques si et seulement si
$$|PA||PB| = |PC||PD|$$
où le point $P$ est l'intersection des droites $AB$ et $CD$.

Remarque : la démonstration de cette proposition peut être un bon exercice pour s'entraîner.

4. Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ non concentriques (figure 2.13). Le lieu des points $P$ tels que
$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}'}(P).$$
est une droite perpendiculaire à la droite joignant les centres des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et passant par les éventuels points communs des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Cette droite est appelée l'axe radial des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

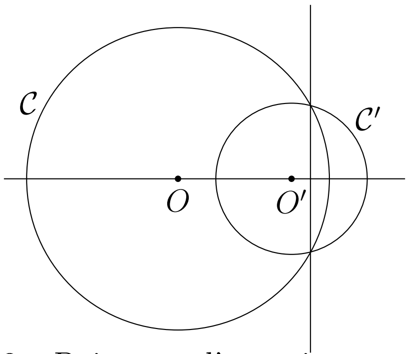



FIG. 2.13 – Puissance d'un point et axe radial

Remarque : la démonstration de cette proposition peut être un bon exercice pour s'entraîner.

## 2.8 Applications

### 2.8.1 Indépendance d'un vecteur et d'un nombre par rapport à un point

On donne quatre points $A, B, C, D$ dans le plan.

1. Montrer que si $M$ est un point du plan, le vecteur
$$\overrightarrow{v} = 4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$$
est indépendant du point $M$.
2. Montrer que si le vecteur $\overrightarrow{v}$ de 1. est nul, le nombre
$$x = 4|\overrightarrow{MA}|^2 + 3|\overrightarrow{MB}|^2 - 5|\overrightarrow{MC}|^2 - 2|\overrightarrow{MD}|^2$$
est aussi indépendant de $M$.

Solution

1. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est indépendant du point $M$

   L'idée est d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{v}$ en fonction d'une combinaison linéaire des vecteurs constitués des points $A$, $B$, $C$ et $D$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MD}$ vont être décomposés par la relation de Chasles en utilisant le point $A$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= 4\,\overrightarrow{MA} + 3\,\overrightarrow{MB} - 5\,\overrightarrow{MC} - 2\,\overrightarrow{MD} \\
&= 4\,\overrightarrow{MA} + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) - 5\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) - 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right) \\
&= 3\,\overrightarrow{AB} - 5\,\overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{AD}.
\end{aligned}$$

   On a donc bien exprimé le vecteur $\overrightarrow{v}$ en une combinaison linéaire de vecteurs indépendants du point $M$.

2. Le nombre $x$ est indépendant du point $M$ si le vecteur $\overrightarrow{v}$ est nul

   Comme pour la première partie de la question, les vecteurs $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MD}$ vont être décomposés par la relation de Chasles en utilisant le point $A$.

$$\begin{aligned}
x &= 4\,\overrightarrow{MA}^2 + 3\,\overrightarrow{MB}^2 - 5\,\overrightarrow{MC}^2 - 2\,\overrightarrow{MD}^2 \\
&= 4\,\overrightarrow{MA}^2 + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)^2 - 5\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}\right)^2 \\
&= 3\,\overrightarrow{MA}^2 + 3\,\overrightarrow{AB}^2 + 6\,\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB} - 5\,\overrightarrow{MA}^2 - 5\,\overrightarrow{AC}^2 - 10\,\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC} \\
&\quad -2\,\overrightarrow{MA}^2 - 2\,\overrightarrow{AD}^2 - 4\,\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AD} \\
&= 2\,\overrightarrow{MA}\cdot\left(3\,\overrightarrow{AB} - 5\,\overrightarrow{AC} - 2\,\overrightarrow{AD}\right) + 3\,\overrightarrow{AB}^2 - 5\,\overrightarrow{AC}^2 - 2\,\overrightarrow{AD}^2 \\
&= 3\,\overrightarrow{AB}^2 - 5\,\overrightarrow{AC}^2 - 2\,\overrightarrow{AD}^2
\end{aligned}$$

   puisque le vecteur $\overrightarrow{v}$ est nul.

   Ainsi, le nombre $x$ est bien indépendant du point $M$.

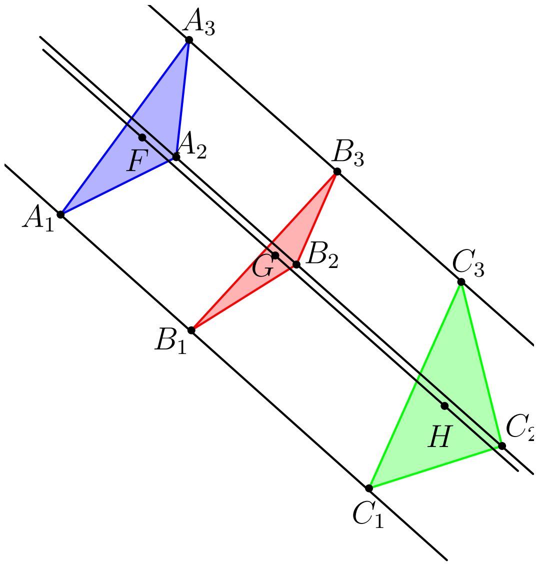
### 2.8.2 Centre de gravité, méthode vectorielle

Soient $d_1, d_2, d_3$ trois droites parallèles et distinctes.

On prend sur $d_1$ trois points $A_1, B_1, C_1$, sur $d_2$ trois points $A_2, B_2, C_2$ et sur $d_3$ trois points $A_3, B_3, C_3$. On appelle $F$ (resp. $G$ et $H$) le centre de gravité des trois points $A_1, A_2, A_3$ (resp. $B_1, B_2, B_3$ et $C_1, C_2, C_3$).

Démontrer que

1. $3\,\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{A_3B_3}$
2. $F$, $G$ et $H$ sont alignés.

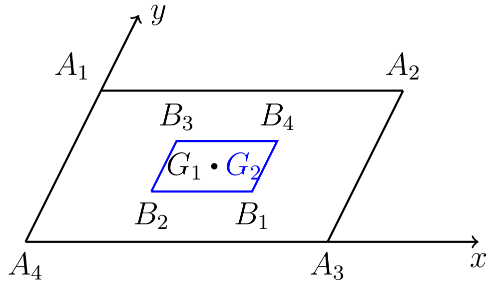



Solution

1. Puisque le point $G$ est le centre de gravité du triangle $B_1B_2B_3$, on a, pour tout point $M$ de l'espace
$$\overrightarrow{MG} = \frac{\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MB_3}}{3}.$$
En particulier, en prenant $M = F$, on a
$$\begin{array}{rcl} 3\overrightarrow{FG} & = & \overrightarrow{FB_1} + \overrightarrow{FB_2} + \overrightarrow{FB_3} \\ & = & \overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{FA_2} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{FA_3} + \overrightarrow{A_3B_3}. \end{array}$$
Or, le point $F$ est le centre de gravité du triangle $A_1A_2A_3$. Par conséquent,
$$\overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FA_2} + \overrightarrow{FA_3} = \overrightarrow{0}.$$
On en déduit alors que
$$3\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{A_3B_3}.$$
2. Les points $F$, $G$ et $H$ sont alignés si et seulement s'il existe un réel $k$ tel que
$$\overrightarrow{GF} = k\overrightarrow{GH}.$$
En utilisant le point 1. de cet exercice,
$$3\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{A_3B_3},$$
$$3\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{C_2B_2} + \overrightarrow{C_3B_3}.$$
Les vecteurs $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\overrightarrow{A_3B_3}$ et $\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{C_2B_2}+\overrightarrow{C_3B_3}$ sont deux vecteurs parallèles aux droites $d_1$, $d_2$ et $d_3$. Par conséquent, comme ils ont un point en commun, les points $F$, $H$ et $G$ sont alignés.

### 2.8.3 Centre de gravité, méthode analytique

Dans le plan, on considère quatre points $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ formant un parallélogramme. On définit quatre autres points $B_1$, $B_2$, $B_3$ et $B_4$ où, pour $i = 1, \ldots, 4$, $B_i$ est le centre de gravité du triangle formé des points $A_k$, $k \neq i$. Montrer que les centres de gravité des quadrilatères $A_1A_2A_3A_4$ et $B_1B_2B_3B_4$ coïncident.




Solution

Le problème n'est pas euclidien : il ne fait pas intervenir de notions de distance, d'angle ou de produit scalaire. On peut choisir un repère non orthonormé tel que les points $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ aient pour coordonnées respectivement $(0, b)$, $(a, b)$, $(a, 0)$ et $(0, 0)$.

Ainsi, le centre de gravité $G_1$ du parallélogramme $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ a pour coordonnées dans ce repère

$$x_{G_1} = \frac{x_{A_1} + x_{A_2} + x_{A_3} + x_{A_4}}{4} = \frac{a}{2},$$
$$y_{G_1} = \frac{y_{A_1} + y_{A_2} + y_{A_3} + y_{A_4}}{4} = \frac{b}{2}.$$

On considère à présent le triangle $A_2A_3A_4$. Le centre de gravité de ce triangle est noté $B_1$ et a pour coordonnées

$$x_{B_1} = \frac{x_{A_2} + x_{A_3} + x_{A_4}}{3} = \frac{2a}{3},$$
$$y_{B_1} = \frac{y_{A_2} + y_{A_3} + y_{A_4}}{3} = \frac{b}{3}.$$

De façon strictement analogue, les centres de gravité $B_2$, $B_3$ et $B_4$ des triangles $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ et $A_1A_2A_3$ ont respectivement pour coordonnées

$$\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right), \quad \left(\frac{a}{3}, \frac{2b}{3}\right) \text{ et } \left(\frac{2a}{3}, \frac{2b}{3}\right).$$

Finalement, les coordonnées du centre de gravité $G_2$ du quadrilatère $B_1B_2B_3B_4$ valent, dans ce repère,

$$x_{G_2} = \frac{x_{B_1} + x_{B_2} + x_{B_3} + x_{B_4}}{4} = \frac{a}{2},$$
$$y_{G_2} = \frac{y_{B_1} + y_{B_2} + y_{B_3} + y_{B_4}}{4} = \frac{b}{2},$$

ce qui suffit à conclure.

Alternative

Une autre solution est basée sur l'interprétation géométrique du centre de gravité d'un triangle et des propriétés des parallélogrammes :
- le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux-tiers à partir du sommet des médianes d'un triangle,
- les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

### 2.8.4 Théorème de la médiane

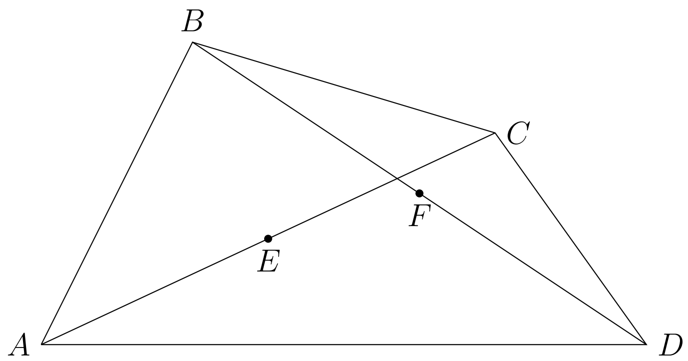
On considère un quadrilatère convexe $ABCD$. On note $E$ le milieu de $[A, C]$ et $F$ le milieu de $[B, D]$.

Démontrer que

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 + 4|\overrightarrow{EF}|^2.$$

Solution

Le problème se résoud facilement en utilisant le théorème de la médiane.




En se positionnant dans le triangle $ABC$ et en considérant le milieu $E$ de $[A, C]$, on a

$$\overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 = 2\overrightarrow{BE}^2 + 2\overrightarrow{AE}^2.$$

En se positionnant dans le triangle $ACD$ et en considérant le milieu $E$ de $[A, C]$, on a

$$\overrightarrow{DC}^2 + \overrightarrow{DA}^2 = 2\overrightarrow{DE}^2 + 2\overrightarrow{AE}^2.$$

Ainsi, en sommant les relations membre à membre,

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 = 2\left(\overrightarrow{BE}^2 + \overrightarrow{DE}^2\right) + 4\overrightarrow{AE}^2.$$

Ainsi, puisque $E$ est le milieu de $[A, C]$, on peut écrire

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\left|\overrightarrow{AE}\right|.$$

Il vient alors

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 = 2\left(\overrightarrow{BE}^2 + \overrightarrow{DE}^2\right) + \overrightarrow{AC}^2.$$

En notant que $F$ est le milieu de $[B, D]$, on applique le théorème de la médiane dans le triangle $BED$

$$\overrightarrow{BE}^2 + \overrightarrow{DE}^2 = 2\overrightarrow{EF}^2 + 2\overrightarrow{FD}^2$$

et, par ailleurs

$$\left|\overrightarrow{FD}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD}\right|,$$

il vient

$$\overrightarrow{BE}^2 + \overrightarrow{DE}^2 = 2\overrightarrow{EF}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}^2.$$

Finalement,

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + 4\overrightarrow{EF}^2.$$

<u>Alternative</u>

On propose de développer le second membre de l'égalité. On développe le terme $4\ \overrightarrow{EF}^2$ sachant que $E$ et $F$ sont les milieux respectifs des segments $[A, C]$ et $[B, D]$

$$\begin{aligned}
2\ \overrightarrow{EF} &= 2\ (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) \\
&= 2\ \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right) \\
&= \overrightarrow{CA} + 2\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \\
&= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \\
&= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}.
\end{aligned}$$

On trouve donc que

$$\begin{aligned}
4\ \overrightarrow{EF}^2 &= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD})^2 \\
&= \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\ \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD}.
\end{aligned}$$

Les autres termes se développent en utilisant la relation de Chasles et les produits remarquables

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}^2 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 \\
&= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{BD}^2 &= (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2 \\
&= \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}.
\end{aligned}$$

En regroupant les trois expressions, le second membre devient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + 4\ \overrightarrow{EF}^2 &= (\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{CD}^2) + 2\ \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}) \\
&= (\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{CD}^2) + 2\ \overrightarrow{BC} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})}_{\overrightarrow{0}} \\
&= (\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{CD}^2).
\end{aligned}$$

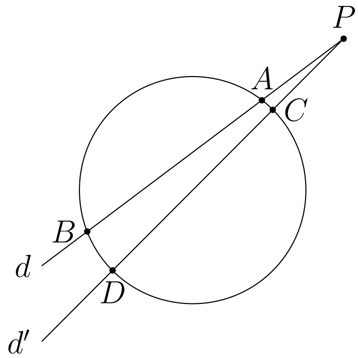
### 2.8.5 Puissance d'un point

Dans un plan euclidien, soient un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et de rayon $r$, et un point $P$. Une droite $d$ issue de $P$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points $A$ et $B$.

Montrer que la puissance $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P)$ du point $P$ pour le cercle $\mathcal{C}$ est indépendant de l'inclinaison de la droite $d$.

Solution

On considère deux droites distinctes $d$ et $d'$ intersectant le cercle respectivement en $A$ et $B$, et en $C$ et $D$.




Les triangles $PBC$ et $PAD$ sont semblables puisqu'ils possèdent deux angles homologues égaux

- les angles $\widehat{DPA}$ et $\widehat{BPC}$ sont égaux (car l'angle $\widehat{P}$ est commun aux deux triangles),
- les angles $\widehat{PDA}$ et $\widehat{PBC}$ sont égaux car ce sont des angles inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$ interceptant le même arc.

Par conséquent, les côtés homologues sont proportionnels

$$\frac{|PB|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PA|}$$

ou encore

$$|PA||PB| = |PC||PD|.$$

Puisque les points $P$, $A$, $B$ et $P$, $C$, $D$ sont alignés trois à trois, on a

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}.$$

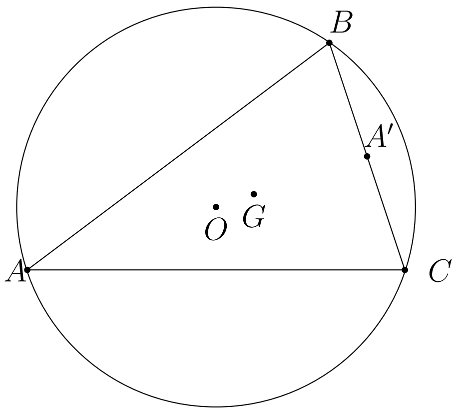
On montre ainsi que la puissance $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(P)$ du point $P$ pour le cercle $\mathcal{C}$ est indépendant de l'inclinaison de la droite $d$.

### 2.8.6 Centre du cercle circonscrit à un triangle

On note $O$ le centre du cercle circonscrit à un triangle $ABC$, et $A'$ le pied de la médiane issue de $A$ de ce triangle. On note $G$ le centre de gravité du triangle $AA'B$.

Démontrer que les droites $AA'$ et $OG$ sont perpendiculaires si et seulement si le triangle $ABC$ est isocèle en $B$.

Suggestion : calculer $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{OG}$.




Solution

Une idée est d'exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{OG}$ en fonction des sommets $A$, $B$ et $C$ du triangle et en fonction du centre $O$ du cercle circonscrit.

Puisqu'on sait que le point $G$ est le centre de gravité du triangle $AA'B$, le vecteur $\overrightarrow{OG}$ peut alors s'exprimer par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left[\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB}\right].$$

De la même façon, puisque le point $A'$ est le milieu du segment $[B, C]$ (soit, en d'autres mots, le centre de gravité du segment $[B, C]$), on peut écrire

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right].$$

De plus, par la relation de Chasles, on peut décomposer le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ en

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA'}.$$

Par conséquent, le produit scalaire suggéré s'écrit

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{OG} = \left[\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA'}\right] \cdot \left[\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right]$$

soit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{OG} &= \left[-\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right] \cdot \left[\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\right] \\ &= -\frac{1}{3}|OA|^2 + \frac{1}{4}|OB|^2 + \frac{1}{12}|OC|^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

La relation précédente se simplifie en notant que le point $O$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$, soit

$$|OA| = |OB| = |OC|.$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \cdot \left[-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right]$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \cdot \left[-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right] \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{OG}$ est nulle si et seulement si la droite $OB$ est perpendiculaire à la droite $AC$.

Puisque le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$ est l'intersection des médiatrices et appartient donc à la médiatrice du segment $[A, C]$, ce sera la cas si et seulement si $B$ appartient aussi à cette médiatrice.

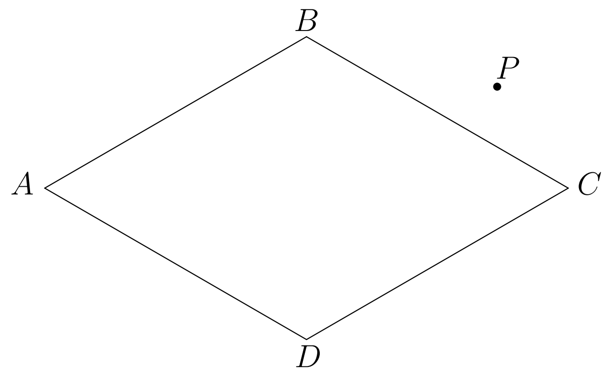
Par conséquent, on a $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{OG} = 0$ si et seulement si le triangle $ABC$ est isocèle en $B$ puisque la médiatrice d'une segment est définie comme étant le lieu des points équidistants des extrémités de ce segment.

### 2.8.7 Losange, triangle équilatéral

On considère un losange $ABCD$ tel que le triangle $BCD$ est équilatéral et un point $P$ quelconque.

Démontrer que l'on a

$$|PA|^2 + |PC|^2 = |AB|^2 + |PB|^2 + |PD|^2.$$



Solution

En partant du membre de gauche de l'égalité,

$$\begin{aligned}
|PA|^2 + |PC|^2 &= \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PC}^2 \\
&= (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA})^2 + (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC})^2 \\
&= (\overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{BA}^2 + 2\ \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{PD}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + 2\ \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{DC}) \\
&= (\overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PD}^2) + \overrightarrow{DC}^2 + (2\ \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{BA} + 2\ \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{DC}).
\end{aligned}$$

On propose de montrer que

$$\overrightarrow{DC}^2 + (2\ \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{BA} + 2\ \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{DC}) = 0.$$

Puisque le quadrilatère $ABCD$ est un losange, on a

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DC}^2 + (2\ \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CD} + 2\ \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{DC}) &= \overrightarrow{DC}^2 - 2\ \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{DC} + 2\ \overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{DC}^2 + 2\ \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PB}) \\
&= \overrightarrow{DC}^2 + 2\ \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{BP}) \\
&= \overrightarrow{DC}^2 + 2\ \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{DC}^2 - 2\ \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} \\
&= |\overrightarrow{DC}|^2 - 2\ |\overrightarrow{DC}|\ |\overrightarrow{DB}|\ \cos \hat{D}.
\end{aligned}$$

Puisque le quadrilatère $ABCD$ est losange et que le triangle $BCD$ est équilatéral, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\hat{D} &= 60°, \\
|DC| &= |DB|.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{DC}|^2 - 2\ |\overrightarrow{DC}|\ |\overrightarrow{DB}|\ \cos \hat{D} &= |\overrightarrow{DC}|^2 - 2\ |\overrightarrow{DC}|\ |\overrightarrow{DC}|\ \cos(60°) \\
&= |\overrightarrow{DC}|^2 - 2\ |\overrightarrow{DC}|^2\ \frac{1}{2} \\
&= |\overrightarrow{DC}|^2 - |\overrightarrow{DC}|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a donc bien le résultat annoncé.

Remarque : cet exercice se résoud facilement en utilisant un répère judicieux.

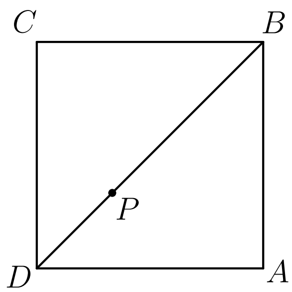
### 2.8.8 Perpendicularité de droites

Un point $P$ appartient à la diagonale $BD$ d'un carré $ABCD$.

Démontrer l'égalité

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP} = |AP|^2 - c^2,$$

où $c$ désigne la longueur d'un côté du carré, et où $|XY|$ représente la longueur du segment $[X, Y]$.




Solution

Puisque deux côtés successifs d'un carré sont perpendiculaires, on propose d'utiliser la relation de Chasles afin d'introduire le point $A$ pour former les droites perpendiculaires $AB$ et $AD$. Il vient successivement

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DP} &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}\right) \cdot \overrightarrow{AP} \ + \ |AP|^2 \\
&= |AP|^2 \ - \ \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= |AP|^2 \ - \ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= |AP|^2 - |AB|^2 \\
&= |AP|^2 - c^2.
\end{aligned}$$

Remarque : cet exercice se résoud facilement en utilisant un répère judicieux.

## 2.9 Exercices proposés

### 2.9.1 Vrai ou faux

Répondre par vrai ou faux et justifier.

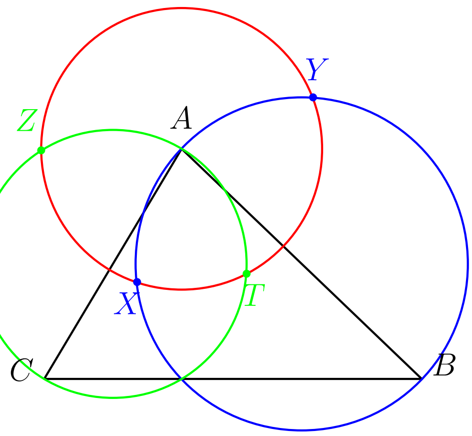
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

1. Si $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = 0$ alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont parallèles.
2. Si $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$ alors les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.
3. $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$ si et seulement si $||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{v}|| = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.
4. $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires.
5. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leurs normes sont égales.

### 2.9.2 Points cocycliques

Soit $ABC$ un triangle dont l'angle en $A$ est aigu. Le cercle de diamètre $AB$ coupe la hauteur issue de $C$ en des points $X$ et $Y$ ; le cercle de diamètre $AC$ coupe la hauteur issue de $B$ en des points $Z$ et $T$.

1. Montrer que $|\overrightarrow{AX}|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que les points $X, Y, Z$ et $T$ sont sur un même cercle, dont on déterminera le centre.

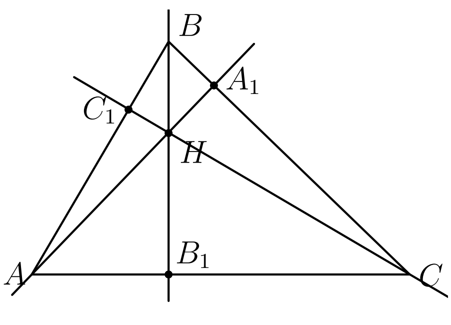



### 2.9.3 Orthocentre, perpendicularité de droites

Soit $ABC$ un triangle d'orthocentre $H$. On note respectivement $A_1$, $B_1$ et $C_1$ les pieds des hauteurs issues de $A$, $B$ et $C$. On note $|\overrightarrow{XY}|$ la longueur du vecteur $\overrightarrow{XY}$.

Démontrer la relation

$$\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2) = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CC_1}.$$

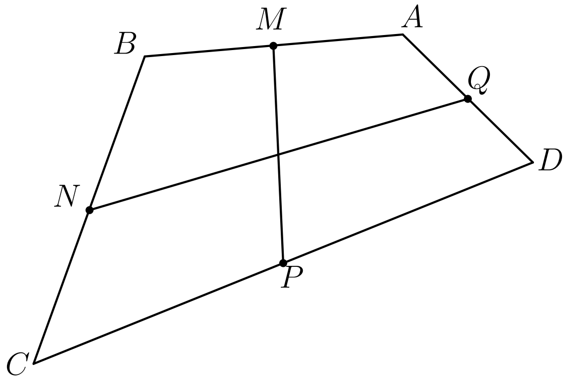



### 2.9.4 Quadrilatère, milieux de segments

Soient $A$, $B$, $C$, $D$ quatre points de l'espace et soient $M$, $N$, $P$ et $Q$ les milieux respectifs des segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$.

Démontrer que

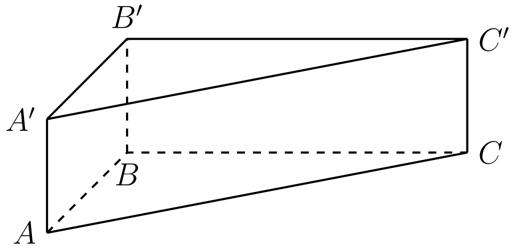
$$2\left( |\overrightarrow{MP}|^2 + |\overrightarrow{NQ}|^2 \right) = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2.$$




### 2.9.5 Centre de gravité

Soit $ABCA'B'C'$ un prisme.

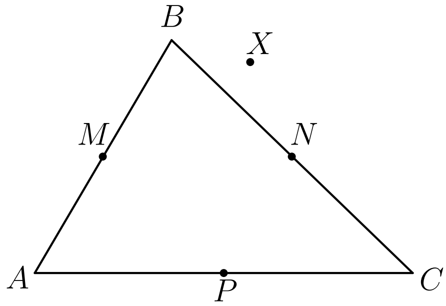
Démontrer de deux façons différentes (méthode analytique et méthode vectorielle) que les triangles $A'BC$ et $B'CA$ ont le même centre de gravité.




### 2.9.6 Triangles, théorème de Thalès

Soient $ABC$ un triangle et $M, N, P$ les milieux de $[A, B]$, $[B, C]$ et $[C, A]$. Démontrer que, quel que soit $X$,

$$(|XA|^2 + |XB|^2 + |XC|^2) - (|XM|^2 + |XN|^2 + |XP|^2) = |MN|^2 + |NP|^2 + |PM|^2.$$

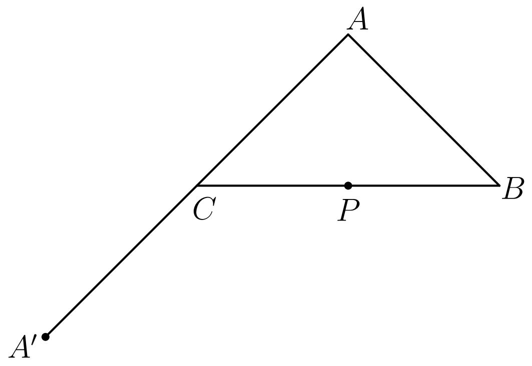



### 2.9.7 Triangle isocèle, égalité

Soient $ABC$ un triangle isocèle de base $BC$ ($|AB| = |AC|$) et $A'$ le point de $AC$ tel que $|A'C| = |AC|$ et $A' \neq A$.

Démontrer que, si $P$ est le milieu de $[B, C]$,

$$|A'P|^2 = |AP|^2 + 4|PC|^2.$$




### 2.9.8 Egalités, produits remarquables

Si les quatre points $A, B, C, H$ vérifient

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

et si $X$ est tel que

$$2\,\overrightarrow{XH} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH},$$

démontrer que

$$|\,\overrightarrow{AX}\,|^2 = |\,\overrightarrow{BX}\,|^2 = |\,\overrightarrow{CX}\,|^2.$$

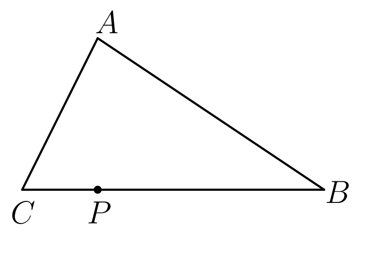
### 2.9.9 Indépendance d'une expression par rapport à un triangle et un point

On considère un triangle $ABC$, et un point $P$ arbitraire appartenant à son côté $[B, C]$, distinct de $B$ et $C$.

Démontrer que la valeur de

$$\frac{\overrightarrow{AB}^2}{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BP}} + \frac{\overrightarrow{AC}^2}{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CP}} + \frac{\overrightarrow{AP}^2}{\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PB}}$$

est indépendante de $P$ et des dimensions du triangle.



### 2.9.10 Tétraèdre

Soit un tétraèdre $ABCD$ de l'espace.

1. Démontrer les relations

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{DA}|^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB},$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{DA}|^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}.$$

2. En déduire que les arêtes opposées d'un tétraèdre sont orthogonales si et seulement si les sommes des carrés des longueurs de chacune de ses paires d'arêtes opposées sont égales.

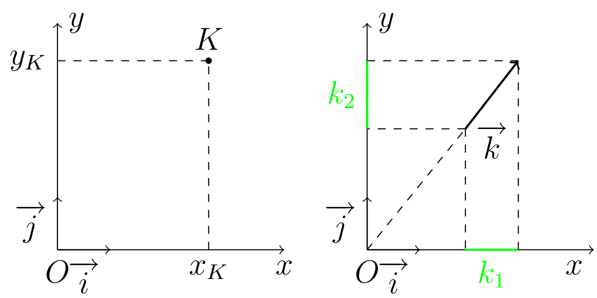
# Chapitre 3

# Géométrie analytique dans le plan

## 3.1 Repère du plan

### 3.1.1 Définition

Une base du plan constituée par deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ linéairement indépendants (*i.e.* non parallèles et non nuls) et un point $O$ forment un repère du plan. Le point $O$ est l'origine du repère. Les droites passant par l'origine et dont des vecteurs directeurs sont les vecteurs de base sont appelées axes du repère.




(a) (b)

FIG. 3.1 – Coordonnées d'un point et composantes d'un vecteur dans un repère orthonormé

### 3.1.2 Composantes d'un vecteur et coordonnées d'un point

Dans le repère choisi, tout vecteur $\overrightarrow{k}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$

$$\overrightarrow{k} = k_1 \overrightarrow{i} + k_2 \overrightarrow{j}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Le couple $(k_1, k_2)$ représente les composantes du vecteur $\overrightarrow{k}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $(x_K, y_K)$ sont les coordonnées d'un point $K$ quelconque du plan si

$$\overrightarrow{OK} = x_K \overrightarrow{i} + x_K \overrightarrow{j}.$$

La première coordonnée $x_K$ est l'abscisse du point $K$ et la seconde $y_K$ en est l'ordonnée.

Un repère est orthonormé si les vecteurs de base sont perpendiculaires et de norme unitaire (figure 3.1).

### 3.1.3 Produit scalaire dans un repère orthonormé

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vaut

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

où $(u_1, u_2)$ et $(v_1, v_2)$ sont respectivement les composantes des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ de composantes $(u_1, u_2)$ dans un repère orthonormé vaut

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

## 3.2 La droite dans le plan

### 3.2.1 Définition vectorielle d'une droite

Soient un point $A$ et un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul.

La droite $d$ passant par le point $A$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points $P$ du plan pour lesquels il existe un réel $r$ tel que $\overrightarrow{AP} = r\,\overrightarrow{u}$.

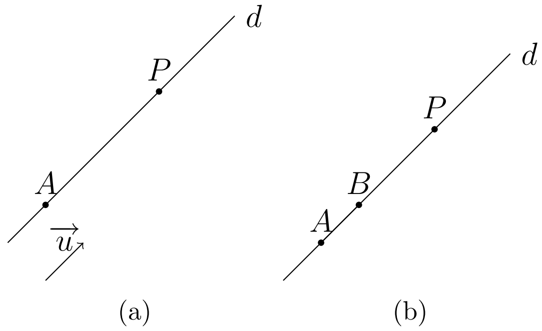



Fig. 3.2 – Définition vectorielle d'une droite

Si $A$ et $B$ sont deux points distincts, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite $d$ et on peut définir cette droite comme l'ensemble des points $P$ pour lesquels il existe un réel $r$ tel que $\overrightarrow{AP} = r\ \overrightarrow{AB}$.

La relation $\overrightarrow{AP} = r\ \overrightarrow{u}$, $r \in \mathbb{R}$, est une équation paramétrique vectorielle de la droite $d$. Elle permet d'obtenir des équations paramétriques de la droite $d$

$$P : (x, y) \in d \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + r u_1 \\ y = y_A + r u_2, \end{array} \right. \quad r \in \mathbb{R}.$$

### 3.2.2 Equation cartésienne d'une droite

Une équation cartésienne de la droite $d$ s'obtient en éliminant le paramètre $r$ des équations paramétriques. Dans un repère du plan, toute droite a une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0).$$

Cela signifie qu'un point appartient à une droite si et seulement si ses coordonnées sont solutions de l'équation de la droite. Inversément, toute équation de ce type est l'équation cartésienne d'une droite.

Plusieurs cas particuliers de droite peuvent alors être observés :

1. une droite parallèle à l'axe des abscisses (figure 3.3(a)) a pour équation
$$y = b, \qquad b \in \mathbb{R};$$
2. une droite parallèle à l'axe des ordonnées (figure 3.3(b)) a pour équation
$$x = a, \qquad a \in \mathbb{R};$$
3. une droite non parallèle à aucun des deux axes (figure 3.3(c)) a pour équation
$$y = mx + p, \qquad m, p \in \mathbb{R}$$
où $m$ est appelé coefficient directeur de la droite et $p$ est l'ordonnée à l'origine ;
4. une droite passant par le point $A$ de coordonnées $(x_A, y_A)$ et de coefficient directeur $m$ a pour équation
$$y - y_A = m(x - x_A).$$

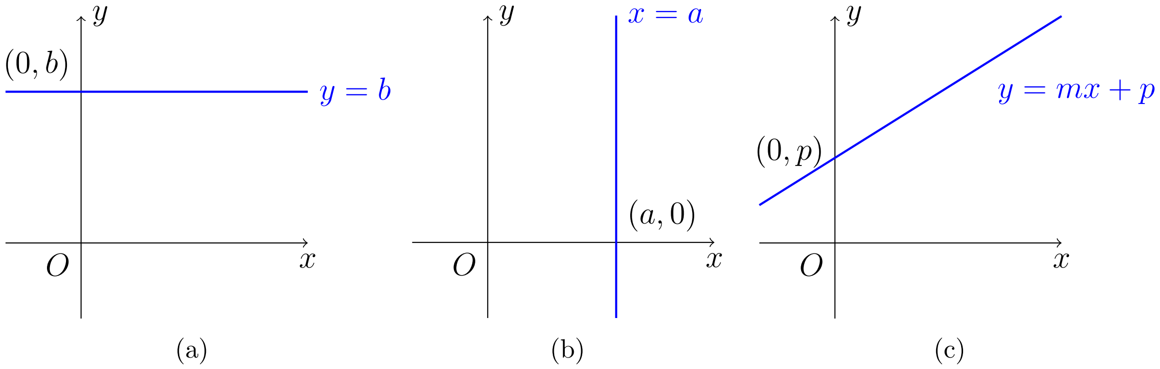



FIG. 3.3 – Droites dans le plan

### 3.2.3 Angle entre deux droites

Soient $d$ et $d'$ deux droites sécantes de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ respectivement.

La mesure de l'angle non orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ est le réel $\theta$ appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$ tel que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u'} = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{u'}|| \cos \theta.$$

L'angle entre les droites $d$ et $d'$ est, par définition, le plus petit des angles $\theta$ et $\pi - \theta$ de sorte qu'il appartienne toujours à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

### 3.2.4 Lien entre vecteur directeur et coefficient directeur d'une droite

1. Si un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ d'une droite $d$ a pour composantes $(u_1, u_2)$ alors le coefficient directeur de la droite $d$ vaut
$$m = \frac{u_2}{u_1} \quad \text{si} \quad u_1 \neq 0.$$
La condition $u_1 \neq 0$ signifie que la droite $d$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

2. Si les points $A$ et $B$ appartiennent à une droite $d$, un vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de la droite $d$ a pour composantes $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. Dès lors, le coefficient directeur de la droite $d$ vaut
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{si} \quad x_A \neq x_B.$$
La condition $x_A \neq x_B$ signifie que la droite $d$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

3. Une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$, admet un vecteur directeur $(-b, a)$.

4. Si le repère est orthonormé, le coefficient directeur d'une droite $d$ est la tangente de l'angle entre un vecteur directeur de la droite $d$ et le vecteur de base $\overrightarrow{i}$. On peut alors l'appeler coefficient angulaire.

## 3.3 Positions relatives de deux droites

### 3.3.1 Intersection

De façon générale, déterminer l'intersection de deux courbes données par leurs équations cartésiennes consiste à résoudre le système formé par leurs équations. Dès lors, l'intersection de deux droites est donnée par la solution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

Trois cas peuvent se présenter (figure 3.4) :

1. le système admet une seule solution : les deux droites sont sécantes ;
2. le système n'admet pas de solution : les deux droites sont parallèles et distinctes ;
3. le système admet une infinité de solutions (système simplement indéterminé) : les deux droites sont parallèles et confondues.

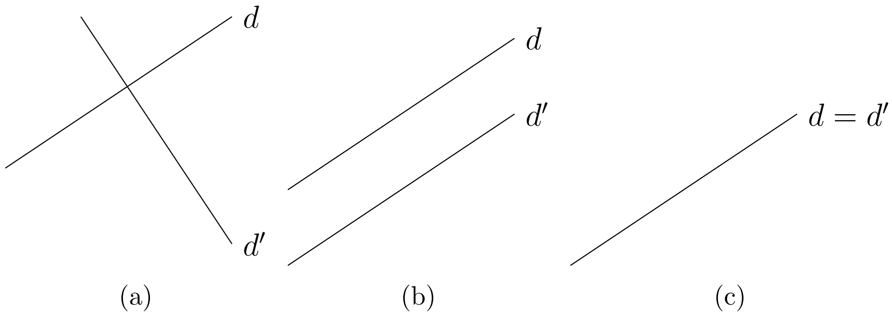



FIG. 3.4 – Positions relatives de deux droites : (a) sécantes, (b) parallèles, (c) confondues

### 3.3.2 Droites parallèles

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont parallèles, ou de façon équivalente, si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux (s'ils existent).

Si deux droites $d_1$ et $d_2$ ont respectivement pour équation cartésienne

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

avec $(a_1, b_1) \neq (0,0)$ et $(a_2, b_2) \neq (0,0)$, alors la droite $d_1$ est parallèle à la droite $d_2$ si et seulement si

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

en considérant $a_2$ et $b_2$ non nuls.

### 3.3.3 Droites perpendiculaires

1. Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

2. Dans un repère orthonormé du plan, deux droites non parallèles aux axes sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients angulaires vaut $-1$.

3. Si une droite $d$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0,0)$, alors toute droite perpendiculaire à $d$ a pour vecteur directeur un vecteur de composantes $(a, b)$.

4. La droite perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ de composantes $(a, b)$ passant par le point $A$ de coordonnées $(x_A, y_A)$ a pour équation

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$

## 3.4 Régions du plan par rapport à une droite

Soit une droite $d$ d'équation cartésienne $y = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$.

Considérons trois points du plan de même abscisse, $P_1$ situé sur $d$, $P_2$ et $P_3$ situés de part et d'autre de $d$ (figure 3.5). Dès lors, l'ordonnée de $P_1$ vaut $mx_{P_1} + p$, celle de $P_2$ est supérieure à $mx_{P_1} + p$ tandis que celle de $P_3$ est inférieure à $mx_{P_1} + p$. Il en va de même quelle que soit l'abscisse considérée.

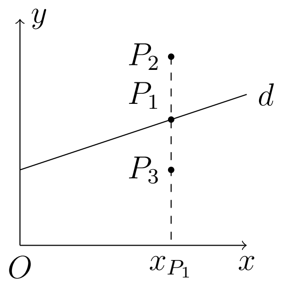



FIG. 3.5 – Régions du plan par rapport à une droite

Ainsi, tous les points situés « au-dessus » de la droite $d$ sont ceux de l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - mx_{P_1} - p > 0\}$$

et ceux situés « en dessous » de la droite $d$ sont ceux de l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - mx_{P_1} - p < 0\}.$$

## 3.5 Distances dans le plan

### 3.5.1 Distance entre deux points

**Définition**

La distance entre deux points $A$ et $B$ distincts est la longueur du segment $[A, B]$.

**Propriété**

Si, dans un repère orthonormé du plan, les points $A$ et $B$ ont respectivement pour coordonnées $(x_A, y_A)$ et $(x_B, y_B)$ alors la distance entre les points $A$ et $B$ est donnée par

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

### 3.5.2 Distance d'un point à une droite

**Définition**

La distance d'un point $A$ à une droite $d$ est la longueur du segment délimité par le point $A$ et sa projection orthogonale sur la droite $d$.

**Propriété**

Dans un repère orthonormé, la distance du point $A$ de coordonnées $(x_A, y_A)$ à la droite $d$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ est donnée par

$$\operatorname{dist}(A, d) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

## 3.6 Faisceaux de droites dans un plan

Les faisceaux de droites sont utiles lorsqu'il s'agit d'établir l'équation d'une droite passant par un point donné ou de coefficient directeur fixé.

On distingue deux types de faisceaux de droites (figure 3.6) :

- un faisceau de droites concourantes en un point $P$ est un ensemble de droites passant par ce point $P$,
- un faisceau de droites parallèles à une droite $d$ est un ensemble de droites parallèles à cette droite $d$.

L'équation cartésienne d'une droite quelconque d'un faisceau de droites concourantes en un point $P$ de coordonnées $(x_P, y_P)$ est

$$y = m(x - x_P) + y_P$$

où $m$ est un réel.

De la même façon, l'équation cartésienne d'une droite quelconque d'un faisceau de droites parallèles à une droite $d$ de coefficient directeur $m$ est

$$y = mx + p$$

où $p$ est un réel.

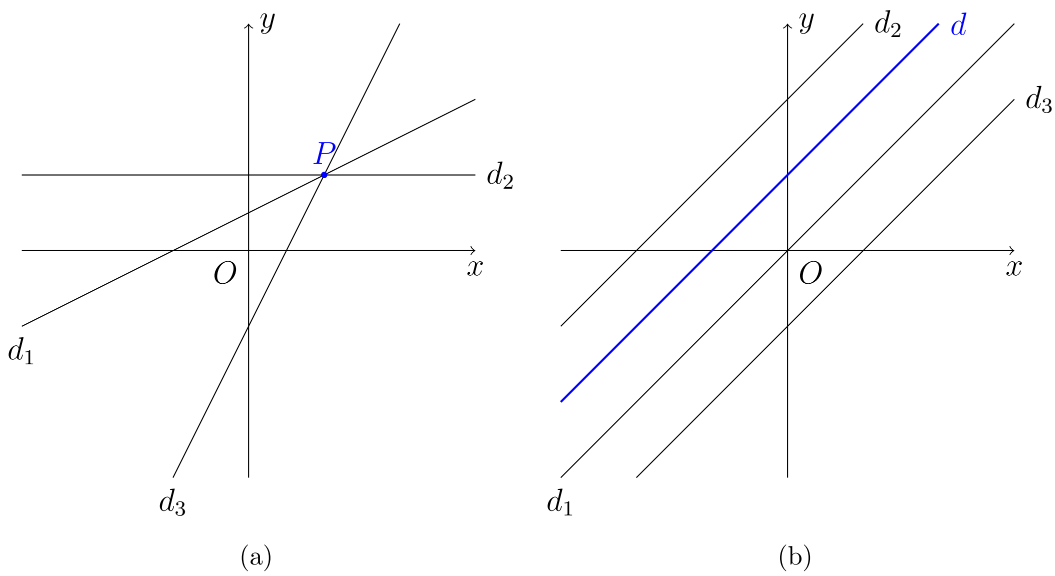



FIG. 3.6 – Faisceaux de droites : (a) concourantes, (b) parallèles

# 3.7 Les coniques

Les coniques peuvent être vues comme l'intersection d'un double cône circulaire droit et d'un plan. Dans les cas dits « dégénérés », l'intersection est une droite, deux droites ou encore un point. Dans les autres cas, dits « non dégénérés », les intersections (qui diffèrent selon l'inclinaison du plan) sont appelées ellipse, hyperbole ou parabole, le cercle étant un cas particulier d'une ellipse.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, une conique (dégénérée ou non) peut être décrite par une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $a, b, c$ sont des réels non simultanément nuls.

Dans ces notes, on ne s'intéresse qu'aux coniques dont l'axe (ou les axes de symétrie) est (sont) parallèle(s) aux axes du repère (on supposera le repère orthonormé). Dans une première partie, on décrira les coniques comme étant des lieux géométriques du plan. Dans une seconde partie, on les définira en utilisant un paramètre commun : l'excentricité.

## 3.7.1 Le cercle

Soient un point $P_0$ du plan et un réel $r$ strictement positif.

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $P_0$ et de rayon $r$ est le lieu des points du plan dont la distance au point $P_0$ vaut $r$. Ainsi,

$$P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |PP_0| = r.$$

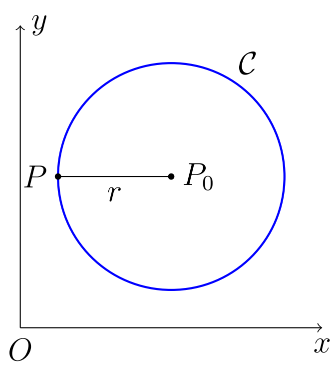



FIG. 3.7 – Cercle $\mathcal{C}$ de centre $P_0$ et de rayon $r$

Dans un repère orthonormé, si le point $P_0$ a pour coordonnées $(x_0, y_0)$, un point $P$ de coordonnées $(x, y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Cette dernière équation est une équation cartésienne du cercle de centre $P_0$ et de rayon $r$ dans le repère donné.

Si le cercle est centré à l'origine du repère, son équation cartésienne est $x^2 + y^2 = r^2$.

Remarque : sous sa forme développée, on reconnaît l'équation d'un cercle lorsque les coefficients de $x^2$ et de $y^2$ sont égaux, et lorsque le coefficient de $xy$ est nul.

### 3.7.2 L'ellipse

Soient deux points distincts $F$ et $F'$ du plan, appelés foyers, et un réel $2a$ strictement positif et strictement plus grand que la distance entre les points $F$ et $F'$.

L'ellipse $\mathcal{E}$ définie par ces données est le lieu des points du plan dont la somme des distances aux points $F$ et $F'$ vaut $2a$. Ainsi,

$$P \in \mathcal{E} \Leftrightarrow |PF| + |PF'| = 2a.$$

Le milieu du segment $[F, F']$ est le centre de symétrie de l'ellipse. La droite joignant les foyers et la médiatrice du segment joignant les foyers sont les axes de symétrie de l'ellipse. Ils sont respectivement appelés axe focal et axe non focal de l'ellipse.

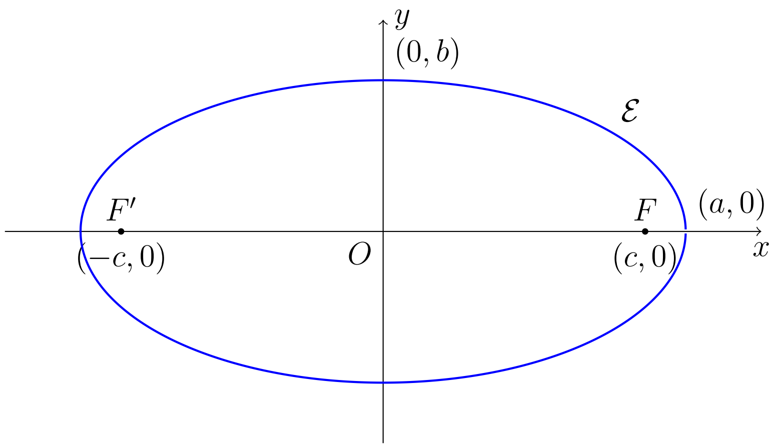



FIG. 3.8 – Ellipse $\mathcal{E}$ de foyers $F$ et $F'$ sur l'axe des abscisses

Considérons un repère orthonormé dont l'axe des abscisses passe par les foyers et dont l'axe des ordonnées passe par le milieu du segment $[F, F']$ défini par les foyers (figure 3.8). Dans ce repère, les points $F$ et $F'$ ont respectivement pour coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ avec $c > 0$.

Un point $P$ de coordonnées $(x, y)$ appartient à l'ellipse $\mathcal{E}$ si et seulement si

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{avec} \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2}. \qquad (\spadesuit)$$

Cette équation est une équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$.

Les caractéristiques de l'ellipse $\mathcal{E}$ dont une équation cartésienne est $(\spadesuit)$ sont les suivantes :

- le centre a pour coordonnées $(0, 0)$ ;
- les axes de symétrie ont pour équation $x = 0$ et $y = 0$ ;
- les sommets (les sommets d'une conique sont les points d'intersection de la conique avec son (ses) axe(s) de symétrie) ont pour coordonnées $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ et $(0, -b)$ ;
- le demi-petit axe est le plus petit segment de droite joignant le centre de l'ellipse à un de ses points. Dans ce cas-ci, la longueur du demi-petit axe est $b$ ;

- le demi-grand axe est le plus grand segment de droite joignant le centre de l'ellipse à un de ses points. Dans ce cas-ci, la longueur du demi-petit axe est $a$.

Si on place les foyers sur l'axe des ordonnées (figure 3.9), l'axe des abscisses passe par le milieu du segment $[F, F']$ et l'ellipse $\mathcal{E}$ a pour équation cartésienne

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{avec} \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

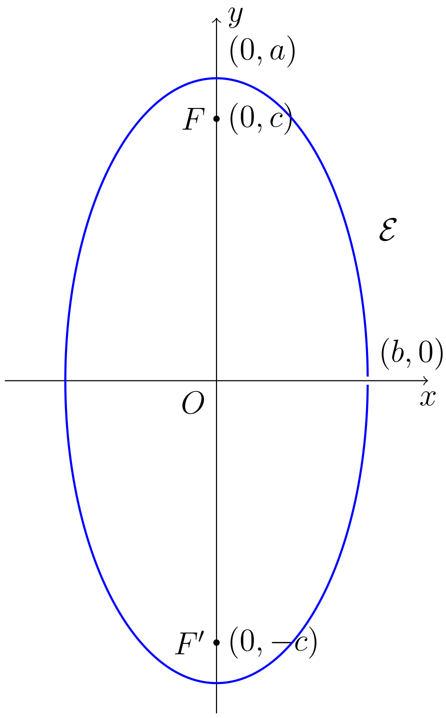



FIG. 3.9 – Ellipse $\mathcal{E}$ de foyers $F$ et $F'$ sur l'axe des ordonnées

Si les foyers $F$ et $F'$ coïncident, alors $c = 0$ et on obtient l'équation d'un cercle.

Remarque : sous sa forme développée, on reconnaît l'équation d'une ellipse lorsque les coefficients de $x^2$ et de $y^2$ sont différents et de même signe, et lorsque le coefficient de $xy$ est nul.

### 3.7.3 L'hyperbole

Soient deux points distincts $F$ et $F'$ du plan, appelés foyers, et un réel $2a$ strictement positif et strictement plus petit que la distance entre les points $F$ et $F'$.

L'hyperbole $\mathcal{H}$ définie par ces données est le lieu des points du plan dont la valeur absolue de la différence entre les distances aux points $F$ et $F'$ vaut $2a$. Ainsi,

$$P \in \mathcal{H} \Leftrightarrow ||PF| - |PF'|| = 2a.$$

Le milieu du segment $[F, F']$ est le centre de symétrie de l'hyperbole. L'hyperbole possède deux axes de symétrie : la droite $FF'$ et la médiatrice du segment $[F, F']$ joignant les deux foyers.

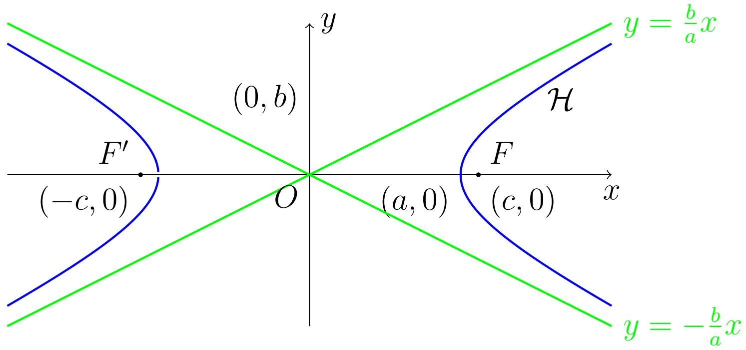



FIG. 3.10 – Hyperbole $\mathcal{H}$ de foyers $F$ et $F'$ sur l'axe des abscisses

Considérons un repère orthonormé dont l'axe des abscisses passe par les foyers et dont l'axe des ordonnées passe par le milieu du segment $[F, F']$ défini par les foyers (figure 3.10). Dans ce repère, les points $F$ et $F'$ ont respectivement pour coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ avec $c > 0$.

Un point $P$ de coordonnées $(x, y)$ appartient à l'hyperbole $\mathcal{H}$ si et seulement si

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{avec} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}. \tag{$\clubsuit$}$$

Cette équation est une équation cartésienne de l'hyperbole $\mathcal{H}$.

Les caractéristiques de l'hyperbole $\mathcal{H}$ dont une équation cartésienne est ($\clubsuit$) sont les suivantes :

- le centre a pour coordonnées $(0, 0)$ ;
- les axes de symétrie ont pour équation $x = 0$ et $y = 0$ ;
- les sommets ont pour coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$ ;
- les droites d'équation
$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{b}{a}x$$
sont les asymptotes à l'hyperbole $\mathcal{H}$.

Si on place les foyers sur l'axe des ordonnées (figure 3.11), l'axe des abscisses passe par le milieu du segment $[F, F']$. L'hyperbole $\mathcal{H}$ a pour équation cartésienne

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1 \qquad \text{avec} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Dans ce cas, les asymptotes ont pour équation

$$y = \frac{a}{b}x \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{a}{b}x.$$

Une hyperbole est dite équilatère lorsque ses asymptotes sont orthogonales. Comme les coefficients angulaires de ces droites sont respectivement $b/a$ et $-b/a$, cela correspond à $a^2 = b^2$ ou encore à $a = b$ puisque ces réels sont strictements positifs.

Remarque : sous sa forme développée, on reconnaît l'équation d'une hyperbole lorsque les coefficients de $x^2$ et de $y^2$ sont différents et de signes opposés, et lorsque le coefficient de $xy$ est nul.

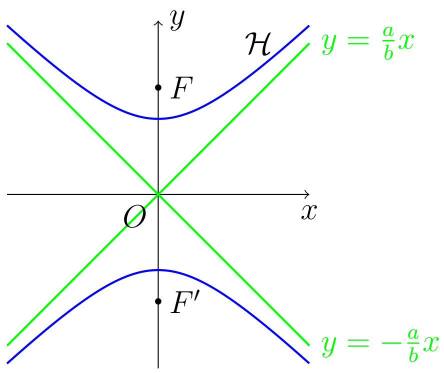



FIG. 3.11 – Hyperbole $\mathcal{H}$ de foyers $F$ et $F'$ sur l'axe des abscisses

### 3.7.4 La parabole

Dans le plan, on considère une droite $d$, appelée directrice, et un point $F$, appelé foyer, n'appartenant pas à la droite $d$.

La parabole $\mathcal{P}$ définie par ces données est le lieu des points du plan dont la distance au point $F$ est égale à la distance à la droite $d$. Ainsi,

$$P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow |PF| = \text{dist}(P, d).$$

L'axe de la parabole est la droite passant par le point $F$ et orthogonale à la droite $d$. Le sommet de la parabole est le point milieu du segment joignant le foyer $F$ à sa projection orthogonale sur la droite $d$.

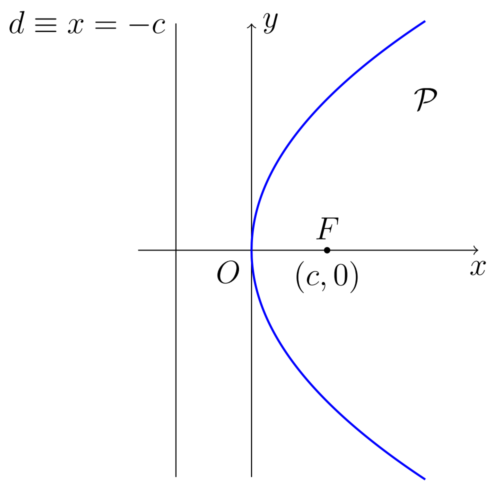



FIG. 3.12 – Parabole $\mathcal{P}$ de foyer $F$ sur l'axe des abscisses et de directrice parallèle à l'axe des ordonnées

Considérons un repère orthonormé dont l'axe des abscisses est la perpendiculaire à la droite $d$ passant par le point $F$ et dont l'axe des ordonnées passe par le sommet de la parabole (figure 3.13). Dans ce repère, le point $F$ a pour coordonnées $(c, 0)$ avec $c > 0$ et la droite $d$ a pour équation $x = -c$. Un point $P$ de coordonnées $(x, y)$ appartient à la parabole $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$y^2 = 4cx. \qquad (\diamondsuit)$$

Cette équation est une équation cartésienne de la parabole $\mathcal{P}$.

Les caractéristiques de la parabole $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est $(\diamondsuit)$ sont les suivantes :
- le sommet a pour coordonnées $(0, 0)$ ;
- l'axe de symétrie a pour équation $y = 0$.

Si la droite passant par le foyer et perpendiculaire à la directrice est l'axe des ordonnées et si l'axe des abscisses passe par le sommet de la parabole (figure 3.12) alors la parabole $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne

$$x^2 = 4cy \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4c}.$$

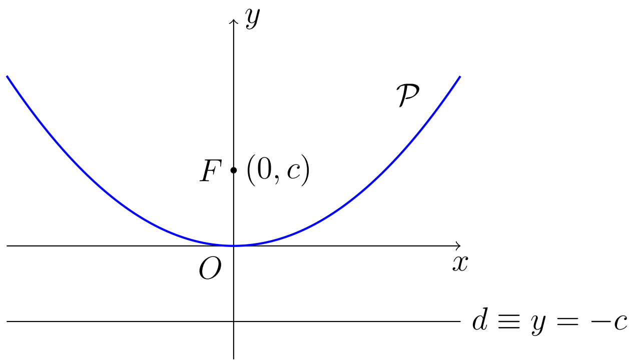



FIG. 3.13 – Parabole $\mathcal{P}$ de foyer $F$ sur l'axe des ordonnées et de directrice parallèle à l'axe des abscisses

Remarque : sous sa forme développée, on reconnaît l'équation d'une parabole lorsque le coefficient de $x^2$ ou de $y^2$ est nul et lorsque le coefficient de $xy$ est nul.

### 3.7.5 Définitions basées sur l'excentricité

Soient un réel $e$ strictement positif, une droite $d$ et un point $F$ n'appartenant pas à cette droite. L'ensemble des points $P$ du plan tels que

$$|PF| = e \operatorname{dist}(P, d)$$

est
- une ellipse si $0 < e < 1$,
- une parabole si $e = 1$,
- une hyperbole si $e > 1$.

Le réel $e$ est appelé excentricité de la conique, le point $F$ est appelé foyer et la droite $d$ est appelée directrice de la conique.

Un cercle ne possède pas d'excentricité.

L'excentricité $e$ d'une hyperbole est donnée par

$$e = \frac{c}{a},$$

rapport de la distance entre les foyers à la distance entre les points d'intersection de l'hyperbole avec la droite passant par les foyers. Ce réel est bien strictement supérieur à 1 puisque $|FF'| = 2c > 2a$.

L'excentricité $e$ d'une ellipse est donnée par

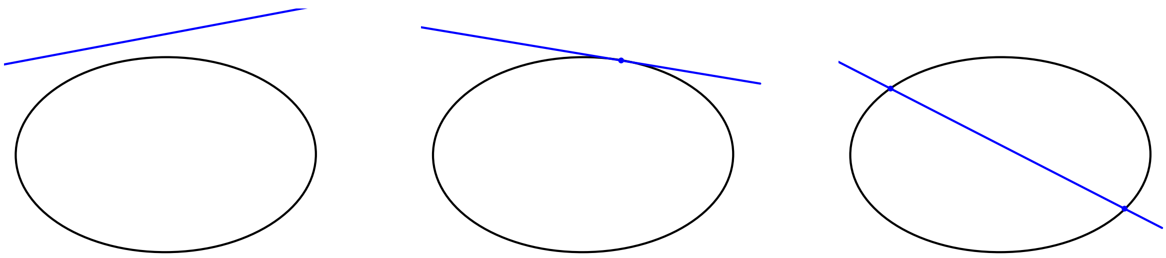
$$e = \frac{c}{a},$$

rapport de la distance entre les foyers à la distance entre les points d'intersection de l'ellipse avec la droite passant par les foyers. Ce réel est bien strictement compris entre 0 et 1 puisque $|FF'| = 2c < 2a$.

## 3.8 Intersection d'une droite et d'une conique

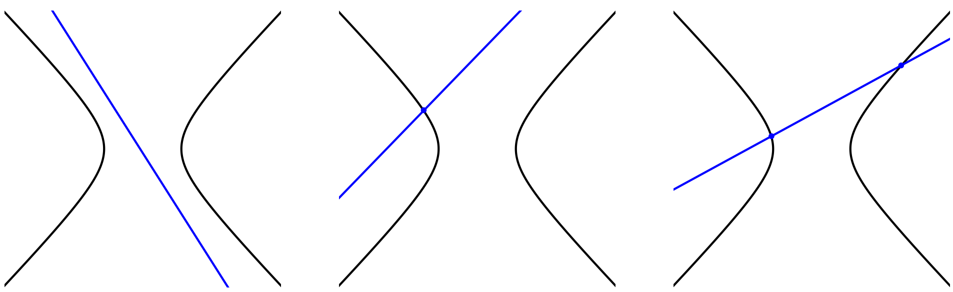
Dans le plan, on considère les trois cas suivants (figures 3.14, 3.15, 3.16) :

1. la droite et la conique ne se rencontrent pas (on dit aussi que la droite est extérieure à la conique),
2. la droite est tangente à la conique,
3. la droite et la conique sont sécantes en un ou deux points.



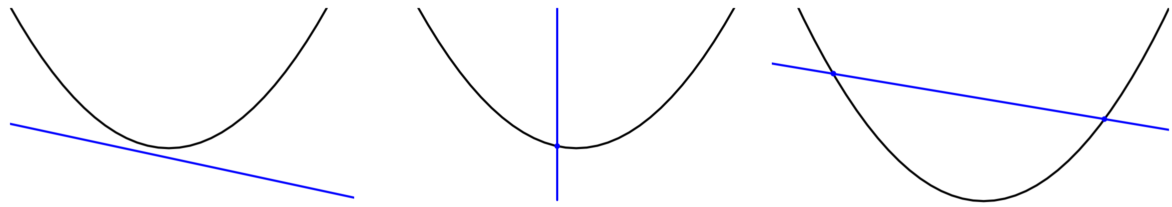
(a) (b) (c)

FIG. 3.14 – Intersection d'une ellipse et d'une droite



(a) (b) (c)

FIG. 3.15 – Intersection d'une hyperbole et d'une droite



(a) (b) (c)

FIG. 3.16 – Intersection d'une parabole et d'une droite

## 3.9 Tangente à une conique

On propose d'établir l'équation d'une tangente à une conique passant par un point de la conique, par un point quelconque du plan ou de coefficient directeur fixé.

### 3.9.1 Tangente passant par un point de la conique

**Tangente à une ellipse passant par un de ses points**

Soit l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b > 0.$$

L'ellipse $\mathcal{E}$ est l'union des graphes des fonctions suivantes, définies pour $x \in [-a, a]$,

$$y(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{et} \quad y(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des abscisses. On étudie uniquement le cas $y \geq 0$.

La fonction $y$ est indéfiniment continûment dérivable sur l'intervalle $]-a, a[$ et sa dérivée première est donnée par

$$y'(x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Dès lors, comme la dérivée de la fonction $y$ en un point de l'ellipse est le coefficient directeur de la tangente à l'ellipse en ce point, une équation cartésienne de la tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ au point $(x_P, y_P)$ est du type

$$y - y_P = y'(x_P)(x - x_P).$$

Après quelques développements, on montre que, quels que soient les coordonnées des points $P$ de l'ellipse, l'équation cartésienne de la tangente en un point est

$$b^2 x_P x + a^2 y_P y - a^2 b^2 = 0$$

ou encore
$$\frac{xx_P}{a^2} + \frac{yy_P}{b^2} = 1. \tag{$\flat$}$$

On note qu'aux points de coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$, points à l'extérieur du domaine de dérivabilité, les tangentes sont les droites verticales respectivement d'équation
$$x = a \quad \text{et} \quad x = -a$$
qui vérifient l'équation ($\flat$).

Remarque : on laisse à l'étudiant le soin d'établir l'équation générale d'une tangente à une ellipse dont une équation cartésienne est de la forme
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad b > a > 0.$$

**Tangente à une hyperbole passant par un de ses points**

Soit l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2},\ c > 0,\ a > 0.$$

L'hyperbole $\mathcal{H}$ est l'union des graphes des fonctions suivantes, définies pour $x \in [-a, a]$,
$$y(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{et} \quad y(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$
qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des abscisses. On étudie uniquement le cas $y \geq 0$.

La fonction $y$ est indéfiniment continûment dérivable sur l'intervalle $[-\infty, -a[\cup]a, +\infty]$ et sa dérivée première est donnée par
$$y'(x) = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Dès lors, comme la dérivée de la fonction $y$ en un point de l'hyperbole est le coefficient directeur de la tangente à l'hyperbole en ce point, une équation cartésienne de la tangente à l'hyperbole $\mathcal{H}$ au point $(x_P, y_P)$ est du type
$$y - y_P = y'(x_P)(x - x_P).$$

Après quelques développements, on montre que, quels que soient les coordonnées des points $P$ de l'hyperbole, l'équation cartésienne de la tangente en un point est
$$b^2 x_P x - a^2 y_P y - a^2 b^2 = 0$$
ou encore
$$\frac{xx_P}{a^2} - \frac{yy_P}{b^2} = 1. \tag{$\natural$}$$

On peut vérifier que les tangentes à l'hyperbole aux points de coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$, points à l'extérieur du domaine de dérivabilité, ont respectivement d'équation
$$x = a \quad \text{et} \quad x = -a$$

et vérifient l'équation ($\natural$).

Remarque : on laisse à l'étudiant le soin d'établir l'équation générale d'une tangente à une hyperbole dont une équation cartésienne est de la forme

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2},\ c > 0,\ a > 0.$$

**Tangente à une parabole passant par un de ses points**

Soit la parabole $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne

$$y^2 = 4cx, \quad c > 0.$$

La parabole $\mathcal{P}$ est l'union des graphes des fonctions suivantes, définies pour $x \in [-a, a]$,

$$y(x) = 2\sqrt{cx} \quad \text{et} \quad y(x) = -2\sqrt{cx}$$

qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des abscisses. On étudie uniquement le cas $y \geq 0$.

La fonction $y$ est indéfiniment continûment dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty]$ et sa dérivée est donnée par

$$y'(x) = \frac{c}{\sqrt{cx}}.$$

Dès lors, comme la dérivée de la fonction $y$ en un point de la parabole est le coefficient directeur de la tangente à la parabole en ce point, l'équation cartésienne de la tangente à la parabole $\mathcal{P}$ au point $(x_P, y_P)$ est du type

$$y - y_P = y'(x_P)(x - x_P).$$

Après quelques développements, on montre que, quels que soient les coordonnées des points $P$ de la parabole, une équation cartésienne de la tangente passant par un de ses points est

$$2cx - y_P y + 2cx_P = 0$$

ou encore

$$yy_P = 2c(x + x_P). \tag{$\square$}$$

Au point de coordonnées $(0, 0)$, point à l'extérieur du domaine de dérivabilité, la tangente est une droite verticale l'équation

$$x = 0$$

vérifiant l'équation ($\square$).

Remarque : on laisse à l'étudiant le soin d'établir l'équation générale d'une tangente à une parabole dont une équation cartésienne est de la forme

$$x^2 = 4cy, \quad c > 0.$$

### 3.9.2 Tangente à une conique issue d'un point extérieur à une conique

Soit un point $P$ de coordonnées $(x_P, y_P)$ extérieur à une conique.

La tangente recherchée est une droite appartenant au faisceau de droites concourantes passant par le point $P$

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

où $m$ un réel.

Rechercher l'équation cartésienne de la tangente revient à rechercher l'équation cartésienne de la droite du faisceau de droites issues du point $P$ telle qu'elle n'ait qu'un et un seul point d'intersection avec la conique.

Soit la conique d'équation cartésienne

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $a, b$ et $c$ sont des réels non simultanément nuls et le faisceau de droites issues du point $P$

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

où $m$ un réel.

L'intersection entre la conique et la famille de droites revient à résoudre le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ y = m(x - x_P) + y_P. \end{array} \right.$$

En introduisant l'expression de $y$ dans l'équation de la conique, on obtient une équation du second degré en la variable $x$

$$f_1(m)x^2 + f_2(m)x + f_3(m) = 0. \qquad (\odot)$$

Pour que la droite soit tangente, il faut que l'équation $(\odot)$ n'admet qu'une solution double. Autrement dit,

$$\Delta = f_2^2(m) - 4f_1(m)f_3(m) = 0.$$

Dans de nombreux cas, il se peut qu'il y ait deux valeurs du coefficient angulaire $m$ chacun déterminant une droite. En effet, à partir d'un point, on peut mener deux tangentes à la conique. Dans certains cas, une des valeurs de $m$ correspond à une des asymptotes à la conique (si elle admet des asymptotes) et est à rejeter puisque l'asymptote n'intersecte pas la conique.

Remarque : ce n'est pas parce qu'une droite intersecte une conique en un point qu'elle est tangente. Exemples : 3.15(b) et 3.16(b).

### 3.9.3 Tangente à une conique de coefficient directeur fixé

Lorsqu'on connait le coefficient directeur $m$ de la tangente à une conique, on reproduit les étapes du cas précédent en considérant le faisceau de droites d'équation générique

$$y = mx + p$$

où $p$ un réel.

La démarche est exactement la même que la précédente et on renvoie à la section 3.9.2 pour plus de détails.

## 3.10 Les lieux géométriques

Dans le plan, un lieu géométrique est une courbe ou une droite formée par tous les points du plan qui possèdent une même propriété.

Il existe principalement trois méthodes de recherche d'un lieu : la méthode synthétique, la méthode de traduction et la méthode des génératrices. Dans ces notes, seules les deux dernières méthodes seront explicitées.

### 3.10.1 Méthode de traduction

Comme son nom l'indique, la méthode de traduction consiste à traduire la propriété d'appartenance des points à un lieu dans un repère fixé.

La recherche d'un lieu par cette méthode se fait en trois étapes principales.

Tout d'abord, il est nécessaire de choisir un repère du plan dans lequel seront exprimés les éléments géométriques. On pourra opter pour un repère orthonormé ou un repère non orthonormé en fonction des données de l'énoncé. Si le problème fait intervenir la notion de distance, d'angle ou de perpendicularité d'éléments (ou plus généralement de produit scalaire), on dira que le problème est euclidien et on préfèrera un repère orthonormé. Dans les autres cas, on pourra opter pour un repère non orthonormé.

Ensuite, on exprime la propriété d'appartenance des points au lieu. Cela se fait en utilisant un paramètre ou en utilisant des formules de géométrie analytique (*e.g.* la formule donnant la distance entre deux points). De ce fait, on arrive à une équation cartésienne ou à un système d'équations dans lesquelles intervient le paramètre choisi. Dans ce dernier cas, on peut obtenir une équation cartésienne du lieu en éliminant le paramètre.

Finalement, on étudie l'équation cartésienne obtenue et le domaine sur lequel la courbe ou la droite est définie. Il se peut que l'on doive restreindre le domaine en fonction des développements et des conditions formulées dans l'étape de traduction. On décrit alors la nature du lieu (*e.g.* le lieu est un cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon 3).

### 3.10.2 Méthode des génératrices

Cette méthode trouve son nom dans le fait que le lieu se trouve être à l'intersection de deux courbes ou droites.

On appelle donc génératrices les courbes ou droites qui définissent le lieu. Leurs équations cartésiennes s'expriment en fonction d'un ou de plusieurs paramètres.

Le principe de la méthode des génératrices consiste à traduire l'appartenance des points d'un lieu à ses deux génératrices.

Tout comme pour la méthode de traduction, on commence par choisir un repère.

Ensuite, les coordonnées de points non mobiles sont exprimées dans le repère. Il est conseillé de choisir le repère de manière judicieuse afin d'éviter de laborieux développements. On fixe également à cette étape un ou plusieurs paramètres. Ces paramètres expriment le fait qu'un élement du plan est variable : un point qui se déplace, une droite qui « bouge », ...Parmi les paramètres couramment employés, on trouve :
- l'abscisse et/ou l'ordonnée d'un point,
- le coefficient directeur d'une droite,
- l'ordonnée à l'origine d'une droite,
- un angle.

Les équations cartésiennes des droites et courbes sont décrites en fonction du (des) paramètre(s) et des coordonnées des éléments fixes. Le système composé des équations des deux génératrices est le système d'équations paramétriques du lieu recherché.

A partir de ce système, on élimine le(s) paramètre(s) afin d'obtenir une équation cartésienne du lieu. Comme pour la méthode de traduction, il est possible qu'il faille restreindre le domaine de définition du lieu en fonction de valeurs non permises du paramètre.

# 3.11 Applications

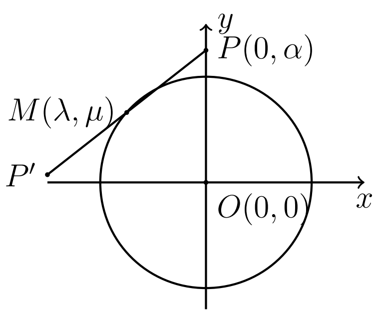
## 3.11.1 Cercle, point symétrique

Soient un cercle $\mathcal{C}$ et un point $P$ de l'espace.

Quel est le lieu du symétrique de $P$ par rapport à un point $M$ qui décrit $\mathcal{C}$ ?

<u>Solution</u>

On choisit un repère orthonormé du plan tel que l'origine des axes coïncide avec le centre du cercle $\mathcal{C}$ et tel qu'un des axes passe par le point $P$.




Dans ce repère, le cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ de coordonnées $(0,0)$ et de rayon $r$ a pour équation

$$x^2 + y^2 = r^2$$

et le point $P$ a pour coordonnées $(0, \alpha)$.

Considérons un point $M$ du cercle $\mathcal{C}$ dont les coordonnées sont $(\lambda, \mu)$. Puisque ce point appartient au cercle, ses coordonnées doivent vérifier l'équation du cercle, soit

$$\lambda^2 + \mu^2 = r^2. \tag{$\dagger$}$$

Soient les coordonnées $(x_{P'}, y_{P'})$ du point $P'$, symétrique du point $P$ par rapport au point $M$. Puisque l'on sait que le point $M$ est le milieu du segment $[P, P']$, on peut écrire

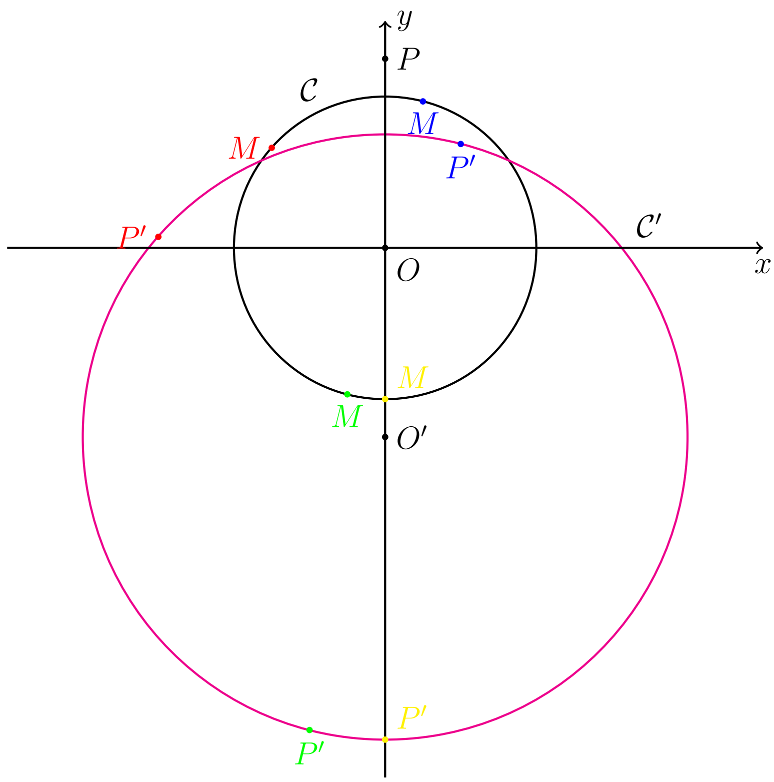
$$(\lambda, \mu) = \left(\frac{x_{P'}}{2}, \frac{\alpha + y_{P'}}{2}\right). \tag{$*$}$$

En introduisant les valeurs de $\lambda$ et de $\mu$ trouvées en $(*)$ dans $(\dagger)$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_{P'}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha + y_{P'}}{2}\right)^2 &= r^2 \\
x_{P'}^2 + (y_{P'} + \alpha)^2 &= 4r^2 \\
x_{P'}^2 + (y_{P'} - (-\alpha))^2 &= (2r)^2.
\end{aligned}$$

Cette équation est celle d'un cercle de centre $(0, -\alpha)$ et de rayon $2r$.

Le lieu décrit par le point $P'$ est donc un cercle $\mathcal{C}'$ dont le centre $O'$ est le symétrique du point $P$ par rapport au centre $O$ du cercle $\mathcal{C}$ et dont le rayon est le double de celui du cercle $\mathcal{C}$.

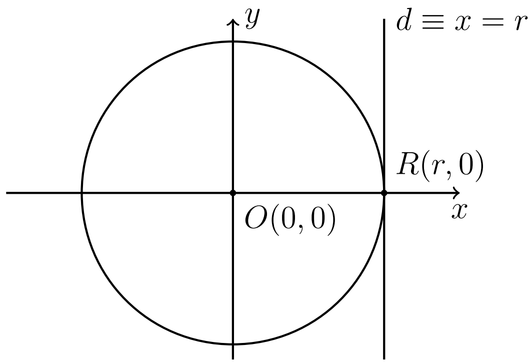


### 3.11.2 Cercle et droite tangents

On donne un cercle $\mathcal{C}$ et une droite $d$ tangente à $\mathcal{C}$. Quel est le lieu des points dont la distance à $\mathcal{C}$ est égale à la distance à $d$ ?

Solution

On choisit un repère orthonormé du plan tel que l'origine des axes coïncide avec le centre du cercle $\mathcal{C}$ et tel qu'un des axes soit parallèle à la tangente $d$ au cercle en $(r, 0)$.




Dans ce repère, le cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ de coordonnées $(0, 0)$ et de rayon $r$ a pour équation

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad r > 0$$

et la tangente au cercle en $(r, 0)$ a pour équation $x = r$.

Un point $P$ de coordonnées $(x, y)$ appartient au lieu recherché si et seulement si la distance de ce point au cercle $\mathcal{C}$ est égale à la distance de ce point à la droite $d$, *i.e.* si et seulement si

$$\operatorname{dist}(P, d) = \operatorname{dist}(P, \mathcal{C}).$$

La distance du point $P$ au cercle $\mathcal{C}$ s'exprime en fonction du rayon $r$ et de la distance du point au centre du cercle

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(P, \mathcal{C}) &= ||OP| - r| \\ &= \left|\sqrt{x^2 + y^2} - r\right|, \end{aligned}$$

et puisque la tangente au cercle est représentée par une droite verticale dans le repère, la distance du point $P$ à la droite $d$ est

$$\operatorname{dist}(P, d) = |x - r|.$$

Par conséquent, un point $P$ de coordonnées $(x, y)$ appartient au lieu recherché si et seulement si

$$\left|\sqrt{x^2 + y^2} - r\right| = |x - r|$$

Si le point $P$ a une abscisse supérieure à celle du point de tangence de la droite $d$ au cercle, *i.e.* si

$$x - r \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2+y^2} - r \geq 0,$$

le point $P$ est extérieur au cercle et on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2} &= x - r + r \\
\sqrt{x^2+y^2} &= x \\
x^2+y^2 &= x^2 \\
y &= 0.
\end{aligned}$$

Cette équation est celle de l'axe des abscisses. Puisque nous sommes dans le cas $x-r \geq 0$, une première partie du lieu est la droite d'équation $y = 0$ avec $x \geq r$.

Si le point $P$ a une abscisse inférieure à celle du point de tangence de la droite $d$ au cercle et si le point $P$ est extérieur au cercle, *i.e.* si

$$x - r < 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2+y^2} - r \geq 0,$$

on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2} &= -x + r + r \\
\sqrt{x^2+y^2} &= 2r - x.
\end{aligned}$$

La condition d'élévation au carré s'exprime par la relation $2r \geq x$. Elle est satisfaite puisque l'on est dans le cas $x - r < 0$. Ainsi, en élevant au carré les deux membres de l'équation, il vient

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= 4r^2 - 4rx + x^2 \\
y^2 &= 4r^2 - 4rx \\
y^2 &= 4r(r-x).
\end{aligned}$$

Cette équation est celle d'une parabole d'axe horizontal. Puisque nous sommes dans le cas $x-r < 0$ avec le point $P$ extérieur au cercle, une seconde partie du lieu est la parabole d'équation $y^2 = 4r(r-x)$ avec $x < r$ et $x^2+y^2 \geq r^2$.

Si le point $P$ a une abscisse inférieure à celle du point de tangence de la droite $d$ au cercle et si le point $P$ est intérieur au cercle, *i.e.* si

$$x - r < 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2+y^2} - r < 0,$$

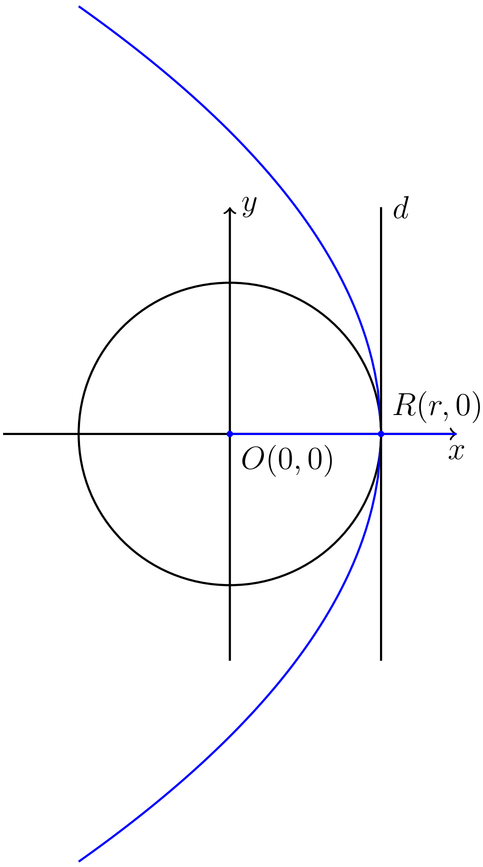
on a

$$\begin{aligned}
-\sqrt{x^2+y^2} + r &= -x + r \\
\sqrt{x^2+y^2} &= x.
\end{aligned}$$

La condition d'élévation au carré est $x \geq 0$. Ainsi, pour des points $P$ dont l'abscisse est comprise entre 0 et $r$, une troisième partie du lieu est la portion de la droite d'équation $y = 0$ comprise entre $x = 0$ et $x = r$.

Le lieu recherché est constitué de deux parties

- la parabole ayant pour sommet le point de tangence, pour axe le diamètre du cercle passant par ce point de tangence et pour foyer le point $(-r, 0)$,
- la demi-droite ayant pour origine le centre du cercle et passant par le point de tangence.




### 3.11.3 Distance d'un point à un cercle

Dans un plan muni d'un repère orthonormé d'origine $O$ et d'axes $x$ et $y$, on considère les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tels que

- $\mathcal{C}_1$ passe par l'origine et est centré au point de coordonnées $(3, 0)$,
- $\mathcal{C}_2$ est centré à l'origine et contient le point de coordonnées $(0, 4)$.

Déterminer une équation cartésienne du lieu des points situés à égale distance des deux cercles.

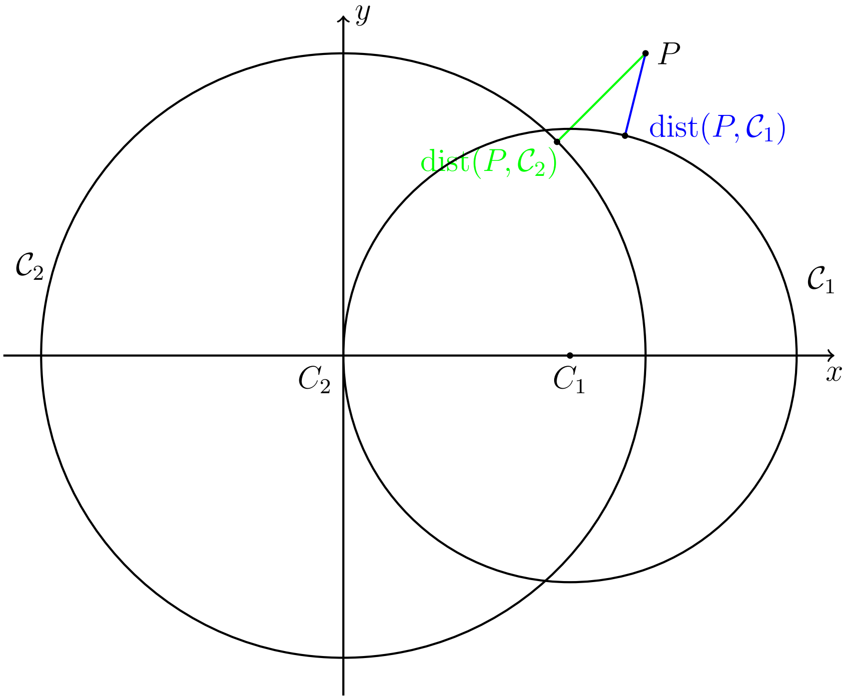
Solution

Dans un premier temps, on recherche des équations cartésiennes des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Le centre $C_1$ du cercle $\mathcal{C}_1$ a pour coordonnées $(3, 0)$ et le rayon $r_1$ est donné par la distance entre ce point et l'origine puisqu'elle appartient au cercle, soit $r_1 = 3$. Ainsi, une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ est

$$(x - 3)^2 + y^2 = 9.$$

Le centre $C_2$ du cercle $\mathcal{C}_2$ a pour coordonnées $(0, 0)$ et le rayon $r_2$ est donné par la distance entre ce point et le point de coordonnées $(0, 4)$, soit $r_2 = 4$. Ainsi, une équation du cercle $\mathcal{C}_2$ est

$$x^2 + y^2 = 16.$$




La distance du point $P$ de coordonnées $(x, y)$ au cercle $\mathcal{C}_i$ s'exprime en fonction du rayon $r_i$ et de la distance du point $P$ au centre $C_i$ du cercle $\mathcal{C}_i$

$$\mathrm{dist}(P, \mathcal{C}_i) = ||C_iP| - r_i|\,.$$

Par conséquent, un point $P$ appartient au lieu recherché si et seulement si

$$\begin{array}{rcl} ||C_1P| - r_1| & = & ||C_2P| - r_2| \\ \left|\sqrt{(x-3)^2 + y^2} - 3\right| & = & \left|\sqrt{x^2 + y^2} - 4\right|. \end{array}$$

Si le point $P$ est à l'extérieur des deux cercles ou si le point $P$ appartient à la zone d'intersection des deux cercles, on a

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{(x-3)^2 + y^2} - 3 & = & \sqrt{x^2 + y^2} - 4 \\ \sqrt{(x-3)^2 + y^2} & = & \sqrt{x^2 + y^2} - 1. \end{array}$$

La condition d'élévation au carré est $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$.

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} (x-3)^2 + y^2 & = & x^2 + y^2 + 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + 9 - 6x + y^2 & = & x^2 + y^2 + 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ 8 - 6x & = & -2\sqrt{x^2 + y^2} \\ 3x - 4 & = & \sqrt{x^2 + y^2}. \end{array}$$

La condition d'élévation au carré est $x \geq \frac{4}{3}$ (cette condition est plus restrictive que la première). Ainsi,

$$\begin{aligned} 9x^2 + 16 - 24x &= x^2 + y^2 \\ 8x^2 - 24x - y^2 + 16 &= 0 \\ \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} &= 1. \end{aligned}$$

Cette équation est celle d'une hyperbole dont les foyers sont situés sur l'axe des abscisses. En reprenant les conditions d'élévation au carré, on ne considèrera que la branche d'hyperbole située à droite de l'axe des ordonnées puisque le centre de l'hyperbole a une abscisse supérieure à $\frac{4}{3}$ et que le sommet de cette branche a pour abscisse 2.

Si le point $P$ est à l'intérieur des cercles mais n'appartient pas à leur zone d'intersection, on a

$$\begin{aligned} -\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + 3 &= \sqrt{x^2 + y^2} - 4 \\ -\sqrt{(x-3)^2 + y^2} &= \sqrt{x^2 + y^2} - 7 \\ \sqrt{(x-3)^2 + y^2} &= -\sqrt{x^2 + y^2} + 7. \end{aligned}$$

La condition d'élévation au carré est $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 7$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + y^2 &= x^2 + y^2 + 49 - 14\sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + 9 - 6x + y^2 &= x^2 + y^2 + 49 - 14\sqrt{x^2 + y^2} \\ 14\sqrt{x^2 + y^2} &= 40 + 6x \\ 7\sqrt{x^2 + y^2} &= 20 + 3x. \end{aligned}$$

La condition d'élévation au carré est $x \geq -\frac{20}{3}$.

En élevant les deux membres au carré, on arrive à

$$\begin{aligned} 49x^2 + 49y^2 &= 400 + 9x^2 + 120x \\ 40x^2 - 120x + 49y^2 &= 400 \\ \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{7}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{10}\right)^2} &= 1. \end{aligned}$$

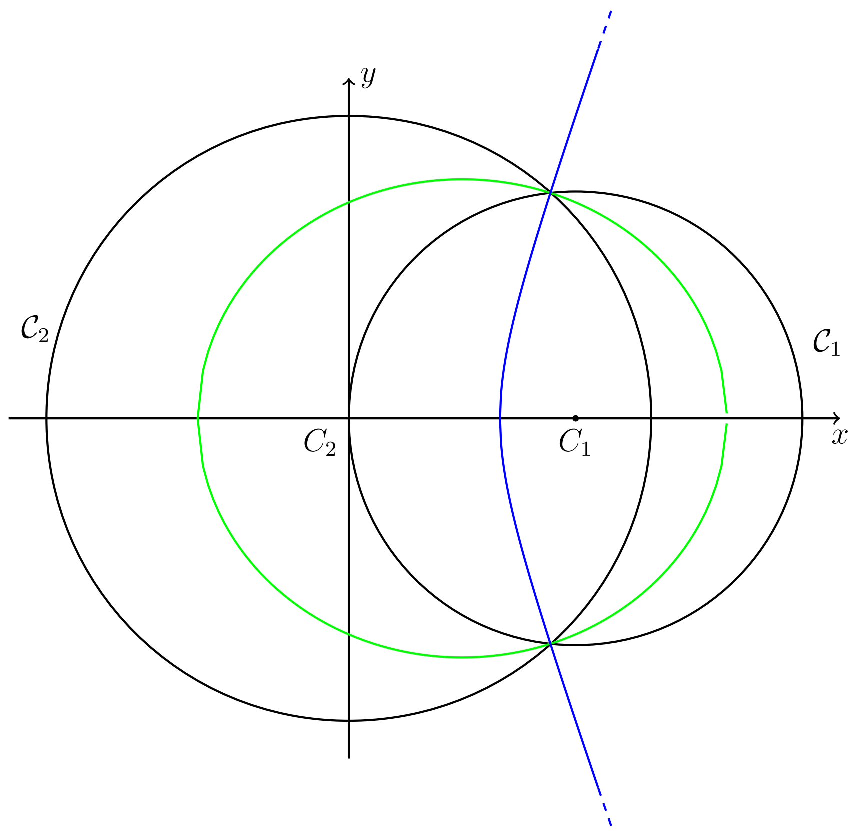
Cette équation est celle d'une ellipse dont les foyers sont situés sur l'axe des abscisses et dont le centre a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}\right)$. En reprenant les conditions d'élévation au carré, on peut considérer toute l'ellipse.

Le lieu recherché est une branche d'hyperbole dont le centre et le sommet ont respectivement pour coordonnées $(\frac{3}{2}, 0)$ et $(2, 0)$ et ayant pour équation cartésienne

$$\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1$$

et l'ellipse d'équation cartésienne

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{7}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{10}\right)^2}=1.$$



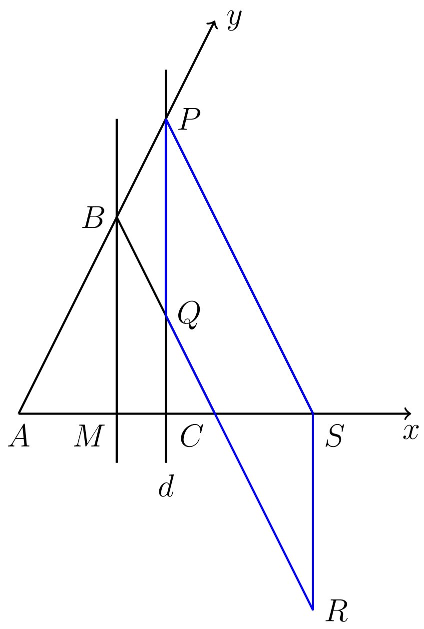

### 3.11.4 Parallélogramme, centre de gravité, repère non orthonormé

On considère un triangle $ABC$ et on note $M$ le milieu de $[A, C]$. Une droite variable $d$ parallèle à $BM$ intersecte $AB$ en $P$ et $BC$ en $Q$. La parallèle à $BC$ passant par $P$ coupe $AC$ en $S$. La parallèle à $d$ passant par $S$ coupe $BC$ en $R$.

Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité du parallélogramme $PQRS$ quand la droite $d$ varie.

<u>Solution</u>

Le problème ne nécessite pas le choix d'un repère orthonormé : on ne parle pas d'éléments qui nécessiteraient la définition de distance, d'angle ou de produit scalaire. Par conséquent, notre choix se porte sur un repère non orthonormé tel que l'origine corresponde au point $A$ et tel que les axes $x$ et $y$ soient respectivement portés par les droites $AB$ et $AC$. Les coordonnées des points $B$ et $C$ sont respectivement fixées à $(0, 1)$ et $(1, 0)$.




Dans ce repère, le point $M$, milieu du segment $[A, C]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Le coefficient de la droite $d$ est le même que celui de la droite $BM$ puisqu'elles sont parallèles. Dès lors, la droite $d$ a pour équation

$$y = -2x + \lambda$$

où $\lambda$ est un paramètre réel. On a fait le choix de l'ordonnée à l'origine $\lambda$ comme paramètre puisque la droite $d$ varie et conditionne la définition des autres éléments du problème.

Le point $P$ est l'intersection des droites $d$ et $AB$ et a pour coordonnées

$$(0, \lambda).$$

Le point $Q$ est l'intersection des droites $d$ et $BC$

$$\begin{cases} y = -2x + \lambda \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

et a pour coordonnées

$$(\lambda - 1, 2 - \lambda).$$

L'équation de la droite $d'$ parallèle à la droite $BC$ passant par le point $P$ a pour équation

$$y = -x + \lambda.$$

Les coordonnées du point $S$ défini comme l'intersection des droites $d'$ et $AC$ sont

$$(\lambda, 0).$$

L'équation de la droite $d''$ parallèle à la droite $d$ passant par le point $S$ a pour équation

$$y = -2x + 2\lambda.$$

Les coordonnées du point $R$ défini comme l'intersection des droites $d''$ et $BC$ sont

$$(2\lambda - 1, 2 - 2\lambda).$$

Les coordonnées du centre de gravité $G$ du parallélogramme $PQRS$ sont

$$x_G = \frac{x_P + x_Q + x_R + x_S}{4} = \lambda - \frac{1}{2},$$

$$y_G = \frac{y_P + y_Q + y_R + y_S}{4} = 1 - \frac{\lambda}{2}.$$

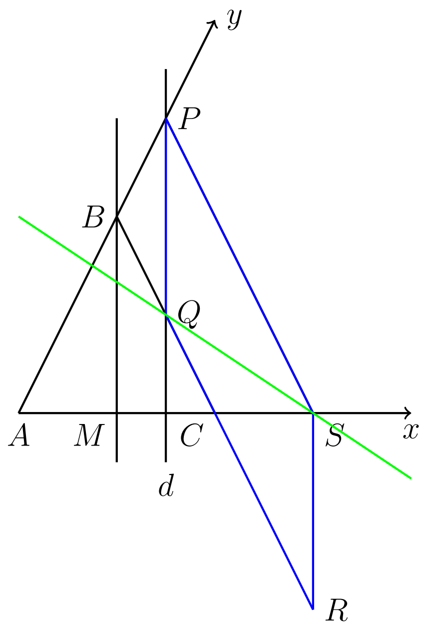
Ainsi, un point de coordonnées $(x, y)$ du plan est dans le lieu si et seulement s'il existe une valeur réelle de $\lambda$ telle que

$$x = \lambda - \frac{1}{2},$$

$$y = 1 - \frac{\lambda}{2}.$$

En éliminant le paramètre $\lambda$, on obtient une équation cartésienne de la droite

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{4}.$$



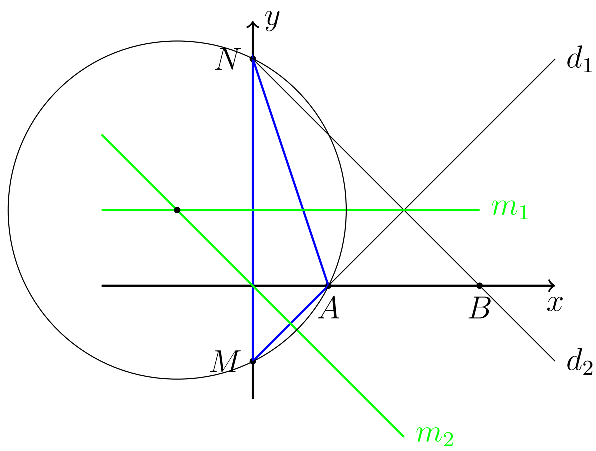
### 3.11.5 Centre du cercle circonscrit à un triangle

On considère deux points distincts $A$ et $B$ du plan et une droite $d$ perpendiculaire à $AB$. On suppose en outre que l'intersection de $d$ et $AB$ n'appartient pas au segment $[A, B]$. Par $A$, on mène une droite $d_1$ qui coupe $d$ en $M$. Par $B$, on mène une droite $d_2$ perpendiculaire à $d_1$. On note $N$ l'intersection de $d$ et $d_2$.

Déterminer le lieu du centre circonscrit au triangle $MNA$ quand $d_1$ varie.

Solution

On propose de choisir un repère tel que l'axe des ordonnées coïncide avec la droite $d$. L'axe des abscisses coïncide avec la droite $AB$. Dans ce repère, les points $A$ et $B$ ont respectivement pour coordonnées $(a, 0)$ et $(b, 0)$ et la droite $d$ a pour équation $x = 0$.




L'élément variable du problème est la droite $d_1$. Cette droite passe par un point fixe $A$. On propose donc de choisir $\lambda$, le coefficient directeur de la droite $d_1$, comme paramètre. Une équation cartésienne de cette droite est

$$y = \lambda\ (x - a).$$

Les coordonnées du point $M$, intersection des droites $d$ et $d_1$, sont les solutions du système suivant

$$\begin{cases} y = \lambda\ (x - a) \\ x = 0. \end{cases}$$

Le point $M$ a alors pour coordonnées $(0, \lambda a)$.

Comme la droite $d_2$ est perpendiculaire à la droite $d_1$, le coefficient directeur de la droite $d_2$ est égal à l'opposé de l'inverse du coefficient directeur de la droite $d_1$. Ainsi, une équation cartésienne de la droite $d_2$ est

$$y = \frac{-1}{\lambda}\ (x - b), \qquad \lambda \neq 0.$$

Les coordonnées du point $N$, intersection des droites $d$ et $d_2$, sont les solutions du système suivant

$$\begin{cases} y = \dfrac{-1}{\lambda}\ (x - b) \\ x = 0. \end{cases}$$

Le point $N$ a alors pour coordonnées $\left(0, \frac{b}{\lambda}\right)$.

Le centre du cercle circonscrit à un triangle est l'intersection des médiatrices de ce triangme. Comme les trois médiatrices sont concourantes, on peut se limiter à déterminer l'intersection de deux d'entre elles uniquement.

On choisit deux médiatrices dont les équations s'écrivent facilement dans le repère choisi. L'équation de la médiatrice du segment $[M, N]$ est triviale car elle est parallèle à l'axe $Oy$ et passe par le milieu du segment $[M, N]$ qui a pour coordonnées

$$\left(0, \frac{b - a\lambda^2}{2\lambda}\right).$$

Donc, la droite $m_1$, médiatrice du segment $[M, N]$, a pour équation

$$y = \frac{b - a\lambda^2}{2\lambda}.$$

La médiatrice du segment $[A, M]$, notée $m_2$, s'écrit également rapidement. En effet, on connaît son coefficient directeur puisqu'elle est perpendiculaire à la droite $d_1$ : il vaut $-1/\lambda$. Cette médiatrice passe par le milieu du segment $[A, M]$, dont les coordonnées sont

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{-a\ \lambda}{2}\right).$$

Une équation cartésienne de la droite $m_2$ est

$$y = \frac{-1}{\lambda}\ x + \frac{a}{2\lambda} - \frac{a\lambda}{2}.$$

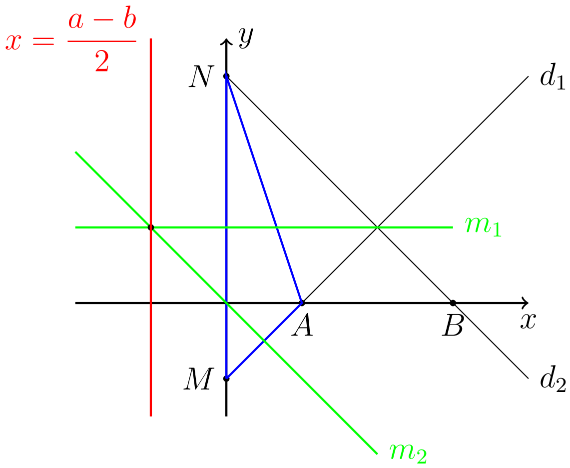
Le centre du cercle circonscrit, noté $P$, a donc pour coordonnées

$$\left(\frac{a - b}{2}, \frac{b - a\lambda^2}{2\lambda}\right).$$

Un point $P$ du plan de coordonnées $(x, y)$ appartient donc au lieu si et seulement si il existe une valeur non nulle du paramètre $\lambda$ telle que $P$ soit à l'intersection des médiatrices des segments $[A, M]$ et $[M, N]$ correspondant à cette valeur de $\lambda$. Le lieu recherché est donc la droite d'équation

$$x = \frac{a - b}{2}.$$

Dans le cas où $\lambda = 0$, la droite $d_2$ est parallèle à la droite $d$. Par conséquent, $N$ n'est pas déterminé.




### 3.11.6 Coniques

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine $O$ et d'axes $x$ et $y$, on donne les points $M : (1, 2)$ et $N : (9, -6)$.

On demande de

1. déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ passant par les points $O$, $M$ et $N$, ainsi que les coordonnées de son centre et la mesure de son rayon ;
2. déterminer une équation cartésienne de la parabole $\mathcal{P}$ d'axe horizontal passant par les points $M$, $N$ et $O$, ainsi que les coordonnées du quatrième point $P$, d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ ;
3. montrer que les normales à $\mathcal{P}$ en $M$, $N$ et $P$ sont concourantes et déterminer les coordonnées de leur point commun.

Solution

1. Une équation cartésienne d'un cercle de centre $(a, b)$ et de rayon $r$ est

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \qquad r > 0.$$

Puisque les points $M$, $N$ et $O$ appartiennent au cercle $\mathcal{C}$, leurs coordonnées doivent vérifier l'équation du cercle. Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{l} a^2+b^2=r^2 \\ (1-a)^2+(2-b)^2=r^2 \\ (9-a)^2+(-6-b)^2=r^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2+b^2=r^2 \\ a^2+b^2-2a-4b+5=r^2 \\ a^2+b^2-18a+12b+117=r^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2+b^2=r^2 \\ -2a-4b+5=0 \\ -18a+12b+117=0. \end{array}\right.$$

En soustrayant 9 fois la deuxième équation à la troisième, il vient

$$48b + 72 = 0 \quad \text{soit} \quad b = -\frac{3}{2}$$

et

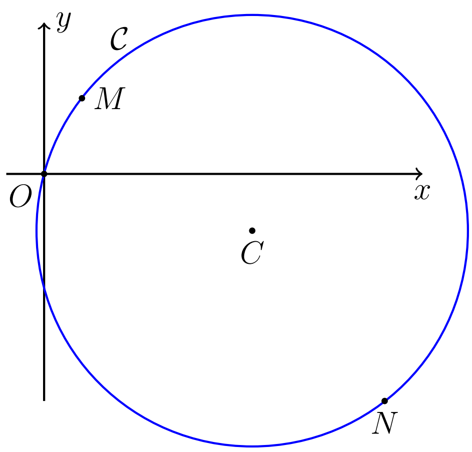
$$a = \frac{5}{2} - 2b \quad \text{soit} \quad a = \frac{11}{2}.$$

On peut ensuite en déduire le rayon $r$ du cercle

$$r^2 = a^2 + b^2 \quad \text{soit} \quad r = \frac{\sqrt{130}}{2}.$$

Par conséquent, une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}.$$




2. L'équation générale d'une parabole d'axe horizontal est

$$y^2 + ay + bx + c = 0, \qquad b \neq 0.$$

Puisque les points $M$, $N$ et $O$ appartiennent à la parabole $\mathcal{P}$, leurs coordonnées doivent vérifier l'équation de la parabole. Ainsi,

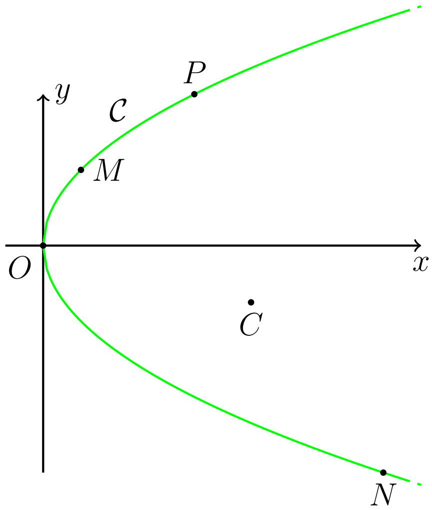
$$\begin{cases} c = 0 \\ 4 + 2a + b + c = 0 \\ 36 - 6a + 9b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4 + 2a + b + c = 0 \\ 48 + 12b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -4 \\ a = 0. \end{cases}$$

Une équation cartésienne de la parabole $\mathcal{P}$ est

$$y^2 = 4x.$$

Les coordonnées du point $P$ s'obtiennent en résolvant le système

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}. \end{cases}$$




En remplaçant la variable $x$ de l'équation du cercle par $\frac{y^2}{4}$, on arrive à l'équation suivante

$$y(y^3 - 28y + 48) = 0. \qquad (\diamond)$$

Comme les points $M$ et $N$ respectivement de coordonnées $(1, 2)$ et $(9, -6)$ sont des points d'intersection, en effectuant une division par Hörner par $(y-2)$ et par $(y-6)$, on factorise le polynôme $(\diamond)$ en

$$y(y-2)(y-6)(y-4) = 0.$$

Ainsi, le point $P$ a pour coordonnées $(4, 4)$.

3. La normale à une courbe en un point est la perpendiculaire à la courbe en ce point. Dans le système d'axes, la parabole $\mathcal{P}$ a pour équation

$$y^2 = 4x.$$

On peut exprimer $y$ en fonction de $x$ en distinguant deux cas en fonction de l'endroit où l'on se trouve sur la parabole

- pour la portion de la parabole dont les ordonnées sont positives,

$$y = 2\sqrt{x}, \qquad x \geq 0,$$

- pour la portion de la parabole dont les ordonnées sont négatives,

$$y = -2\sqrt{x}, \qquad x \geq 0.$$

Le coefficient directeur de la tangente en un point d'une courbe régulière $f$ est la dérivée $f'$ de l'expression de la courbe. Par conséquent, le coefficient directeur d'une perpendiculaire à la tangente est

$$-\frac{1}{f'}.$$

De là,

- pour les points $M$ et $P$, les coefficients directeurs des normales sont respectivement $-1$ et $-2$, et les normales en $M$ et en $P$ ont respectivement pour équation

$$y = -x + 3 \quad \text{et} \quad y = -2x + 12,$$

- pour le point $N$, le coefficient directeur de la normale vaut 3 et la normale en $N$ a pour équation

$$y = 3x - 33.$$

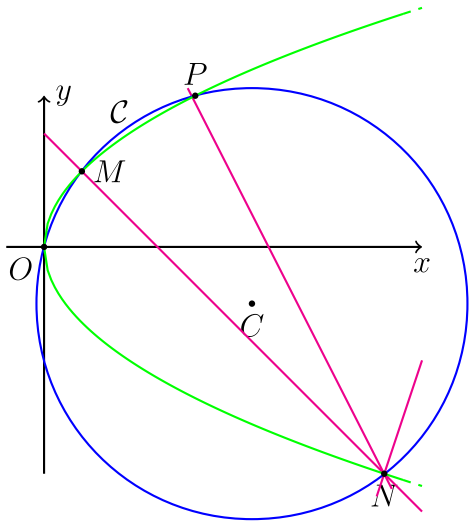



FIG. 3.17 – Intersection des normales à la parabole

Pour montrer que les droites sont concourantes, il suffit de déterminer les coordonnées du point d'intersection des normales en $M$ et en $P$ et de vérifier ensuite l'équation de la normale en $N$. L'intersection des normales en $M$ et en $P$ est la solution du système suivant

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -2x + 12, \end{cases}$$

soit le point de coordonnées $(-6, 9)$ qui correspond au point $N$.

### 3.11.7 Coniques, tangentes

Pour les coniques suivantes, déterminer une équation cartésienne des tangentes satisfaisant les conditions correspondantes

1. tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne

$$x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

passant par le point $P$ de coordonnées $(0, 3)$ ;

2. tangente à l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = -1$$

passant par le point $P$ de coordonnées $(4, 3)$ ;

3. tangente à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne

$$y^2 = 4x$$

ayant un coefficient directeur égal à 2.

Solution

1. Le point $P$ de coordonnées $(0,3)$ n'appartient pas à l'ellipse $\mathcal{E}$ puisque ses coordonnées ne vérifient pas l'équation de l'ellipse.

   Par conséquent, on recherche l'équation d'une ou de deux tangentes à l'ellipse passant par le point $P$ extérieur à l'ellipse.

   L'équation du faisceau de droites concourantes passant par le point $P$ est

   $$y = mx + 3$$

   où $m$ est un réel.

   L'intersection entre l'ellipse $\mathcal{E}$ et le faisceau de droites s'obtient en résolvant le système

   $$\begin{cases} y = mx + 3 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{2^2} = 1. \end{cases}$$

   En remplaçant la variable $y$ de l'équation de l'ellipse $\mathcal{E}$ par $mx+3$, on arrive à

   $$(4+m^2)x^2 + 6mx + 5 = 0. \qquad (\ominus)$$

   Une droite du faisceau est tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$ si et seulement si elle l'intersecte en un point unique, *i.e.* si et seulement si le réalisant de l'équation $(\ominus)$ est nul

   $$36m^2 - 20(4+m^2) = 16m^2 - 80 = 0$$

   soit $m = \sqrt{5}$ ou $m = -\sqrt{5}$.

   Ainsi, les tangentes à l'ellipse $\mathcal{E}$ passant par le point $P$ de coordonnées $(0,3)$ ont pour équation cartésienne

   $$y = \sqrt{5}x + 3 \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{5}x + 3.$$

2. Le point $P$ de coordonnées $(4,3)$ n'appartient pas à l'hyperbole $\mathcal{H}$ puisque ses coordonnées ne vérifient pas l'équation de l'hyperbole.

   Par conséquent, on recherche l'équation d'une ou de deux tangentes à l'hyperbole passant par le point $P$ extérieur à l'hyperbole.

   L'équation du faisceau de droites concourantes passant par le point $P$ est

   $$y = m(x-4) + 3$$

   où $m$ est un réel.

   L'intersection entre l'hyperbole $\mathcal{H}$ et le faisceau de droites s'obtient en résolvant le système

   $$\begin{cases} y = m(x-4) + 3 \\ \dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = -1. \end{cases}$$

En remplaçant la variable $y$ de l'équation de l'hyperbole $\mathcal{H}$ par $m(x-4)+3$, on arrive à

$$(9-16m^2)x^2 - 32m(3-4m)mx + 384m - 256m^2 = 0. \qquad (\oplus)$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection de la droite avec l'hyperbole $(\oplus)$ est une équation du second degré sauf si le coefficient de $x^2$ est nul, *i.e.* si $m = \frac{3}{4}$ ou $m = -\frac{3}{4}$.

Donc, on envisage trois cas :

(a) soit $m \neq \frac{3}{4}$ et $m \neq -\frac{3}{4}$, l'équation est du second degré et son delta

$$m(3-4m) = 0$$

est nul si et seulement si $m = 0$ ou $m = \frac{3}{4}$ (que l'on doit rejeter) ;

(b) soit $m = \frac{3}{4}$, l'équation n'est plus une équation du second degré. Elle devient même une équation impossible $(0 = -1)$ ;

(c) soit $m = -\frac{3}{4}$, l'équation n'est plus une équation du second degré. Mais elle reste une équation du 1er degré qui admet une solution. La droite est sécante à l'hyperbole, mais en un seul point car elle est parallèle à une asymptote oblique de l'hyperbole.

3. On recherche l'équation d'une tangente à la parabole de coefficient directeur égal à 2.

L'équation du faisceau de droites parallèles à la droite de coefficient directeur égal à 2 est

$$y = 2x + p$$

où $p$ est un réel.

L'intersection entre la parabole $\mathcal{P}$ et le faisceau de droites s'obtient en résolvant le système

$$\begin{cases} y = 2x + p \\ y^2 = 4x. \end{cases}$$

En remplaçant la variable $y$ de l'équation de la parabole $\mathcal{P}$ par $2x+p$, on arrive à

$$4x^2 + 4(p-1)x + p^2 = 0. \qquad (\oslash)$$

Une droite du faisceau est tangente à la parabole $\mathcal{P}$ si et seulement si elle l'intersecte en un point unique, *i.e.* si et seulement si le réalisant de l'équation $(\oslash)$ est nul

$$-2p + 1 = 0$$

soit $p = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la tangente à la parabole $\mathcal{P}$ de coefficient directeur égal à 2 pour équation cartésienne

$$y = 2x + \frac{1}{2}.$$

### 3.11.8 Coniques, équations

Pour chacune des coniques dont les équations sont données ci-dessous,

1. $y^2 = 4x$,
2. $4x^2 + 9y^2 = 36$,
3. $x^2 + 2y^2 = 0$,
4. $x^2 + y^2 - 9 = 0$,
5. $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$,
6. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$,
7. $4x^2 = 25y^2$,
8. $16y^2 - 9x^2 = 144$,
9. $16x^2 + 25y^2 = 100$,

déterminer

- si l'équation est celle d'un cercle, d'une ellipse, d'une hyperbole ou d'une parabole,
- une équation réduite des coniques,
- les caractéristiques des coniques.

Solution

1. L'équation $y^2 = 4x$ est l'équation d'une parabole dont le paramètre $c$ est égal à 1 et dont l'axe de symétrie est l'axe des abscisses.

   Le sommet a pour coordonnées $(0, 0)$, le foyer a pour coordonnées $(1, 0)$ et la directrice a pour équation $x = -1$.

2. L'équation $4x^2 + 9y^2 = 36$ est celle d'une ellipse car les coefficients de $x^2$ et de $y^2$ sont différents et de même signe et puisque le coefficient du terme en $xy$ est nul. Une équation cartésienne de cette ellipse est
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$
   Le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse valent respectivement 3 et 2.

   Les sommets de l'ellipse ont respectivement pour coordonnées $(3, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, 2)$ et $(0, -2)$. Les foyers de l'ellipse sont sur l'axe des abscisses et ont respectivement pour coordonnées $(-\sqrt{5}, 0)$ et $(\sqrt{5}, 0)$. Les axes de symétrie sont les droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$.

3. L'équation $x^2+2y^2 = 0$ est celle d'une conique dégénérée en un point de coordonnées $(0, 0)$. En effet, il s'agit d'une somme de deux carrés qui n'est nulle que si chaque terme est nul.

4. L'équation $x^2 + y^2 - 9 = 0$ est celle d'un cercle puisque les coefficients de $x^2$ et $y^2$ sont égaux et puisque le coefficient du terme en $xy$ est nul. Une équation cartésienne de ce cercle est
$$x^2 + y^2 = 3^2.$$
   Le centre de ce cercle a pour coordonnées $(0, 0)$ et son rayon est de 3.

5. L'équation $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ est celle d'une hyperbole puisque les coefficients de $x^2$ et de $y^2$ sont différents et de signe opposés et puisque le coefficient du terme en $xy$ est nul. Une équation cartésienne de cette hyperbole est
$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1.$$
Le centre de cette hyperbole a pour coordonnées $(0, 0)$, ses sommets et ses foyers, situés sur l'axe des abscisses, ont respectivement pour coordonnées $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(-5, 0)$ et $(5, 0)$. Les axes de symétrie ont respectivement pour équation $x = 0$ et $y = 0$.

   Les asymptotes obliques à cette hyperbole ont respectivement pour équation
$$y = \frac{3}{4}x \quad \text{et} \quad y = -\frac{3}{4}x.$$

6. L'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ est celle d'un cercle puisque les coefficients de $x^2$ et de $y^2$ sont égaux et puisque le coefficient de $xy$ est nul. Une équation cartésienne du cercle est
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5^2.$$
Le centre du cercle a pour coordonnées $(1, -2)$ et le rayon vaut 5.

7. L'équation $4x^2 = 25y^2$ est celle de deux droites sécantes puisque les coefficients des termes en $x$, $y$, $xy$ et du terme indépendant sont nuls.

   Les droites ont respectivement pour équation
$$y = \frac{2}{5}x \quad \text{et} \quad y = -\frac{2}{5}x.$$

8. L'équation $16y^2 - 9x^2 = 144$ est celle d'une hyperbole puisque les coefficients des termes en $x^2$ et $y^2$ sont différents et de signes opposés et puisque le coefficient du terme en $xy$ est nul. Une équation cartésienne de cette hyperbole est
$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = -1.$$
Le centre de cette hyperbole a pour équation $(0, 0)$, ses sommets et ses foyers, situés sur l'axe des ordonnées, ont respectivement pour coordonnées $(0, -4)$, $(0, 4)$, $(0, -5)$ et $(0, 5)$. Les axes de symétrie ont respectivement pour équation $x = 0$ et $y = 0$.

   L'hyperbole admet deux asymptotes obliques ayant respectivement pour équation
$$y = \frac{3}{4}x \quad \text{et} \quad y = -\frac{3}{4}x.$$

9. L'équation $16x^2 + 25y^2 = 100$ est celle d'une ellipse puisque les coefficients des termes en $x^2$ et en $y^2$ sont différents et de même signe et puisque le coefficient du terme en $xy$ est nul. Une équation cartésienne de cette ellipse est

$$\frac{x^2}{2.5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Les sommets de l'ellipse ont respectivement pour coordonnées $(-2.5, 0), (2.5, 0), (0, -2)$ et $(0, 2)$. Les foyers sont situés sur l'axe des abscisses et ont respectivement pour coordonnées $(-1.5, 0)$ et $(1.5, 0)$. Le demi-grand axe et le demi-petit axe valent respectivement 2.5 et 2. Les axes de symétrie de cette ellipse ont respectivement pour équation $x = 0$ et $y = 0$.

### 3.11.9 Tangentes à un cercle

Déterminer le lieu du centre des cercles qui passent par le point $A$ de coordonnées $(1, 0)$ et qui possèdent deux tangentes perpendiculaires qui se coupent en l'origine du repère.

Solution

Une équation cartésienne d'un cercle dont le centre $C$ a pour coordonnées $(a, b)$ et ayant pour rayon $r$ est

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Puisque le point $A$ appartient au cercle, ses coordonnées doivent vérifier l'équation du cercle, soit

$$(1 - a)^2 + b^2 = r^2.$$

On considère la droite $d$ passant par l'origine d'équation cartésienne

$$y = mx.$$

Cette droite sera tangente au cercle si

$$\text{dist}(C, d) = R$$

soit

$$\frac{(ma - b)^2}{1 + m^2} = R^2 = (1 - a^2) + b^2$$

ou encore

$$(2a - b^2 - 1)m^2 - 2abm - (1 - a)^2 = 0. \qquad (\spadesuit)$$

Puisque l'on souhaite avoir deux droites perpendiculaires tangentes au cercle, l'équation $(\spadesuit)$ doit avoir deux solutions distinctes et le produit de ces solutions doit être égal à $-1$.

On doit donc avoir

$$2a - b^2 - 1 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{-(1 - a)^2}{2a - b^2 - 1} = -1.$$

soit

$$2a - b^2 - 1 > 0 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 - 4a = -2$$

ou encore

$$(a-2)^2 + b^2 = 2.$$

Ainsi, un point $P$ de coordonnées $(x, y)$ appartient au lieu recherché si et seulement si ses coordonnées vérifient

$$(x-2)^2 + y^2 = 2 \quad \text{avec} \quad 2x - y^2 - 1 > 0.$$

La condition $2x - y^2 - 1 > 0$ demande d'exclure les points du cercle qui ont pour coordonnées $(1, 1)$ et $(1, -1)$ (ils correspondent à l'intersection entre le cercle et la parabole dont les équations sont reprises ci-avant). Cependant, à partir de ces deux points, il est possible de mener deux tangentes perpendiculaires à un cercle passant par le point $A$. Ces tangentes sont les axes du repère.

Le lieu est donc le cercle de centre $(2, 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

### 3.11.10 Point équidistant d'une famille de droites

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la droite $d_\lambda$ d'équation cartésienne $(1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$.

Montrer qu'il existe un point $P$ équidistant de toutes les droites $d_\lambda$.

<u>Solution</u>

Dans un repère orthonormé, la distance du point $P$ de coordonnées $(x_P, y_P)$ à la droite $d$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ est donnée par

$$\operatorname{dist}(P, d) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

En l'appliquant à l'énoncé, la distance du point $P$ de coordonnées $(x_P, y_P)$ à la droite $d_\lambda$ d'équation cartésienne $(1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$ est

$$\operatorname{dist}(P, d) = \frac{|(1-\lambda^2)x_P + 2\lambda y_P - 4\lambda - 2|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\lambda)^2}} = \frac{|(1-\lambda^2)x_P + 2\lambda y_P - 4\lambda - 2|}{1 + \lambda^2}.$$

En appelant $p$ ($p > 0$) la distance du point $P$ à la droite $d_\lambda$, il vient

$$p = \frac{|(1-\lambda^2)x_P + 2\lambda y_P - 4\lambda - 2|}{1 + \lambda^2}.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{l} p + p\lambda^2 = x_P - x_P\lambda^2 + 2\lambda y_P - 4\lambda - 2 \\ -p - p\lambda^2 = x_P - x_P\lambda^2 + 2\lambda y_P - 4\lambda - 2 \end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{l} \underbrace{(p + x_P)}_{C_1}\lambda^2 + \underbrace{2(2 - y_P)}_{C_2}\lambda + \underbrace{(p - x_P + 2)}_{C_3} = 0. \\ \underbrace{(-p + x_P)}_{D_1}\lambda^2 + \underbrace{2(2 - y_P)}_{D_2}\lambda + \underbrace{(-p - x_P + 2)}_{D_3} = 0 \end{array}\right.$$

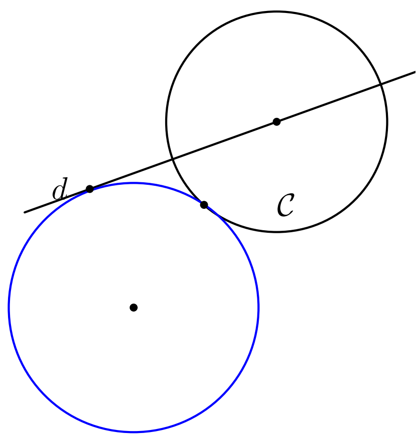
Ces équations sont vraies quelque soit la variable $\lambda$ si les coefficients $C_1$, $C_2$ et $C_3$, et $D_1$, $D_2$ et $D_3$ sont nuls. De là, on a $y_P = 2$, $x_P = 1$ et $p = -1$ pour la première équation, et $y_P = 2$, $x_P = 1$ et $p = 1$ pour la seconde équation. Puisque le réel $p$ doit être positif, on montre que les droites sont équidistantes du point $P$ de coordonnées $(1, 2)$.

## 3.12 Exercices proposés

### 3.12.1 Cercles extérieurement tangents

Quel est le lieu des centres des cercles tangents à une droite donnée $d$ et tangents extérieurement à un cercle donné $\mathcal{C}$ dont le centre est sur la droite $d$ ?

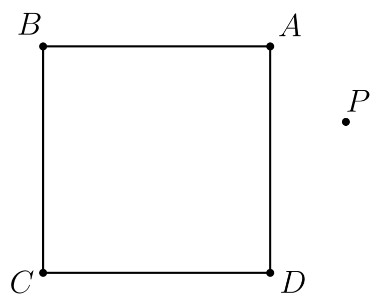
Rappel : deux cercles sont tangents extérieurement s'ils admettent une même tangente en un de leurs points communs et s'ils sont situés de part et d'autre de cette tangente.




### 3.12.2 Carré, distance entre deux points

On donne un carré $ABCD$ ($A$ et $C$ sont des sommets opposés). Quel est le lieu des points $P$ tels que $|PA| + |PC| = |PB| + |PD|$ ?

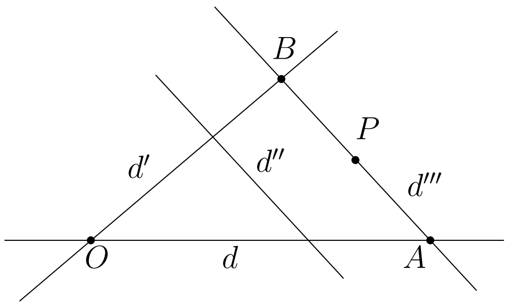
En déduire que $|PA| + |PC| = |PB| + |PD|$ implique $|PA| = |PB|$ ou $|PA| = |PD|$.



### 3.12.3 Milieu d'un segment, repère non orthonormé

On considère deux droites $d$ et $d'$ du plan qui s'intersectent en un point $O$. On considère une droite $d''$ qui n'est parallèle ni à $d$ ni à $d'$. Une droite $d'''$ parallèle à $d''$ intersecte $d$ en $A$ et $d'$ en $B$.

Déterminer l'équation cartésienne du lieu géométrique du milieu $P$ de $[A, B]$ quand $d'''$ varie.




### 3.12.4 Distance entre deux points

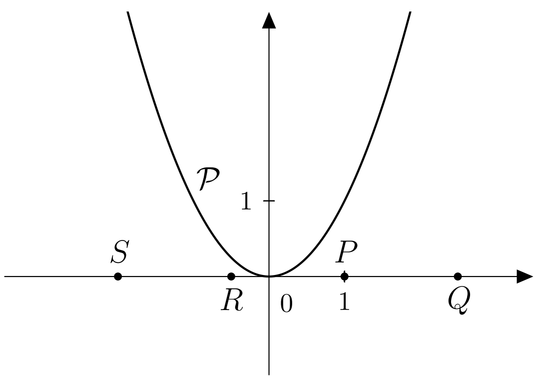
Dans le plan, on se donne deux points $P_1$ et $P_2$. Soit également $a$ un nombre strictement positif.

Déterminer le lieu des points $P$ du plan dont le rapport des distances à $P_1$ et $P_2$ vaut $a$. Déterminer la nature du lieu.

### 3.12.5 Tangentes, parabole, lieu

Dans un repère orthonormé, on considère une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et le point $P$ (1,0). Si $Q$ est un point de l'axe $Ox$, on note $R$ le symétrique de $Q$ par rapport à $P$ et $S$ le symétrique de $P$ par rapport à $R$.

1. Si $Q$ est de coordonnées $(\alpha, 0)$, quelles sont les coordonnées de $R$ ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$ les points $Q$ et $S$ coïncident-ils ?
3. Quelles sont les équations des tangentes à $\mathcal{P}$ issues de $Q$ ?
4. Quelles sont les équations des tangentes à $\mathcal{P}$ issues de $S$ ?
5. Quel est le lieu des points communs aux tangentes à $\mathcal{P}$ menées par $Q$ et par $S$ et ne passant pas par le sommet de $\mathcal{P}$ ?



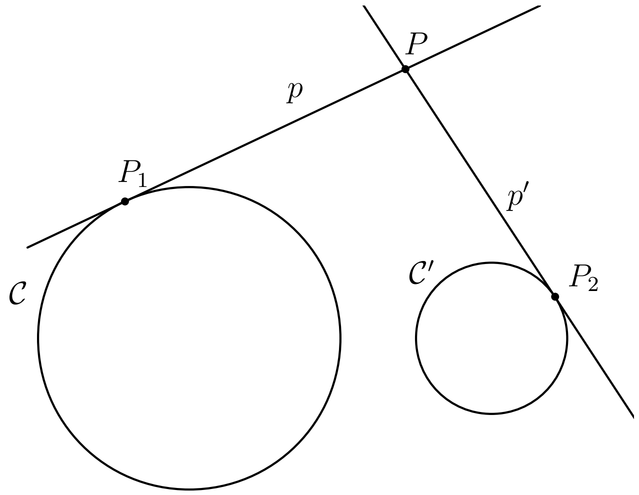
### 3.12.6 Cercles non concentriques

Soient deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ non concentriques. Par tout point $P$ du plan extérieur à ces deux cercles, on peut mener une tangente $p$ à $\mathcal{C}$ et une tangente $p'$ à $\mathcal{C}'$. La droite $p$ rencontre alors $\mathcal{C}$ au point de tangence $P_1$, et $p'$ rencontre $\mathcal{C}'$ en $P_2$.

Déterminer le lieu géométrique des points $P$ du plan tels que

$$|\overrightarrow{PP_1}|^2 - |\overrightarrow{PP_1'}|^2 = k$$

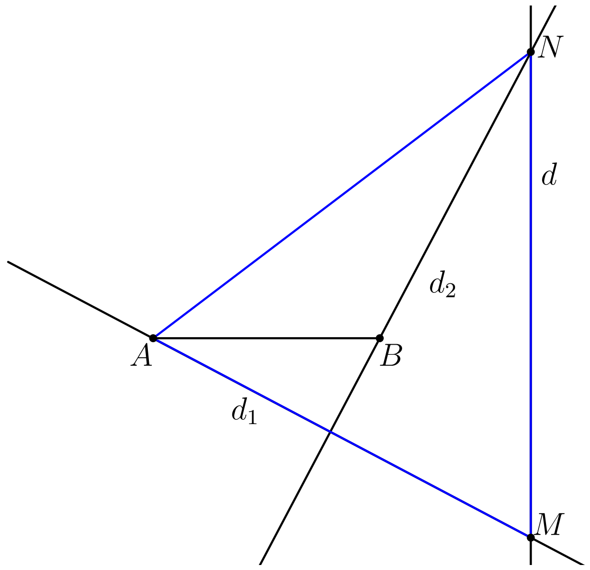
où $k$ est un nombre réel donné.




### 3.12.7 Centre du cercle circonscrit à un triangle

On considère deux points distincts $A$ et $B$ du plan et une droite $d$ perpendiculaire à $AB$. On suppose en outre que l'intersection de $d$ et $AB$ n'appartient pas au segment $[A, B]$. Par $A$, on mène une droite $d_1$ qui coupe $d$ en $M$. Par $B$, on mène une droite $d_2$ perpendiculaire à $d_1$. On note $N$ l'intersection de $d$ et $d_2$.

Déterminer le lieu du centre circonscrit au triangle $MNA$ quand $d_1$ varie.



### 3.12.8 Droite variable, triangle d'aire fixée

Quel est le lieu des points du premier quadrant par lesquels passe une et une seule droite déterminant, avec les axes, un triangle contenu dans le premier quadrant et d'aire égale à 4 ?

### 3.12.9 Cercles, droites parallèles

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $Oxy$. On considère la famille de cercles d'équation

$$x^2 + y^2 - 2my - 1 = 0$$

où $m$ est un paramètre réel variable.

Quel est le lieu des extrémités du diamètre parallèle à l'axe $Ox$ pour tous ces cercles ?

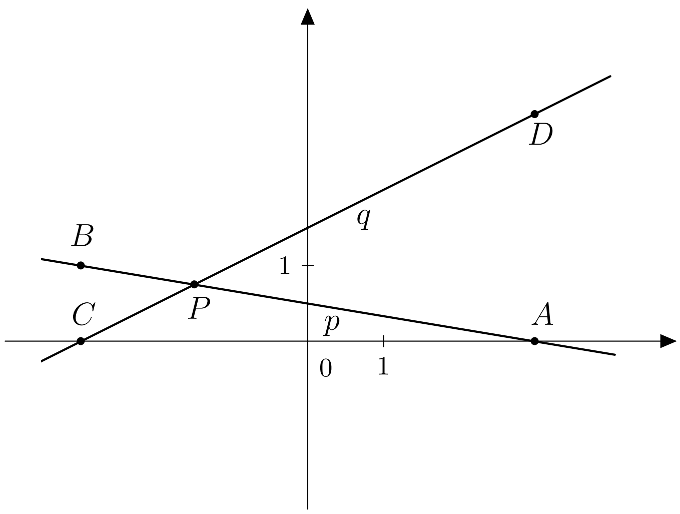
### 3.12.10 Intersection de droites

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $Oxy$, on considère les éléments suivants

- la droite $p$ passant par les points $A$ et $B$ respectivement de coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, b)$,
- la droite $q$ passant par les points $C$ et $D$ respectivement de coordonnées $(-a, 0)$ et $(a, d)$

où $a$, $b$ et $d$ sont trois paramètres non nuls.

Quelle est l'équation cartésienne du lieu de l'intersection des droites $p$ et $q$ si le produit des ordonnées des points $B$ et $D$ vaut une constante non nulle ?




### 3.12.11 Droites perpendiculaires, segments proportionnels

Soient deux droites perpendiculaires $x$ et $y$, sécantes en $O$. Sur $x$, on fixe les points $A$ et $B$, différents de $O$, de telle sorte que l'on ait $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB}$. Pour tout point $P$ de $y$, on définit le point $Q$ tel que $3\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP}$.

Déterminer le lieu des points communs aux droites $AP$ et $BQ$ lorsque $P$ parcourt $y$.

### 3.12.12 Parabole, tangentes

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole $\mathcal{P}$ par son équation cartésienne

$$x^2 = 4y.$$

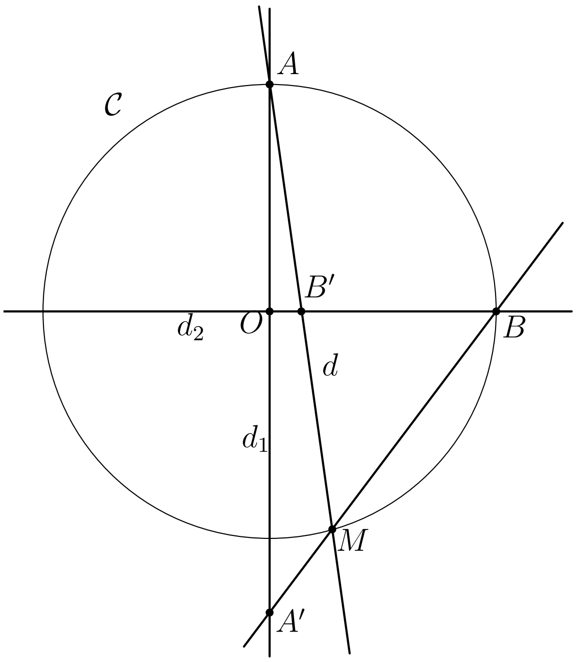
On demande de déterminer

1. l'équation cartésienne d'une tangente quelconque à la courbe $\mathcal{P}$.
2. le lieu des points à partir desquels les tangentes menées à la courbe $\mathcal{P}$ sont orthogonales entre elles.

### 3.12.13 Produit de longueurs

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et deux droites perpendiculaires $d_1$ et $d_2$ passant par $O$. On note $A$ une des intersections de $d_1$ avec $\mathcal{C}$ et $B$ une des intersections de $d_2$ avec $\mathcal{C}$. Par $A$ on mène une droite variable $d$ qui coupe $\mathcal{C}$ en un point $M$ distinct de $B$. La droite $AM$ coupe $d_2$ en $B'$ et la droite $BM$ coupe $d_1$ en $A'$.

Démontrer que le produit des longueurs des segments $[A, A']$ et $[B, B']$ reste constant lorsque $d$ varie.




### 3.12.14 Cercles tangents à une droite

On donne les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et la droite $d$ par leurs équations dans un repère orthonormé :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &: x^2 + y^2 = 1, \\ \mathcal{C}_2 &: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 25, \\ d &: x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Donner l'équation des cercles passant par les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ avec $\mathcal{C}_2$ et qui sont tangents à $d$.

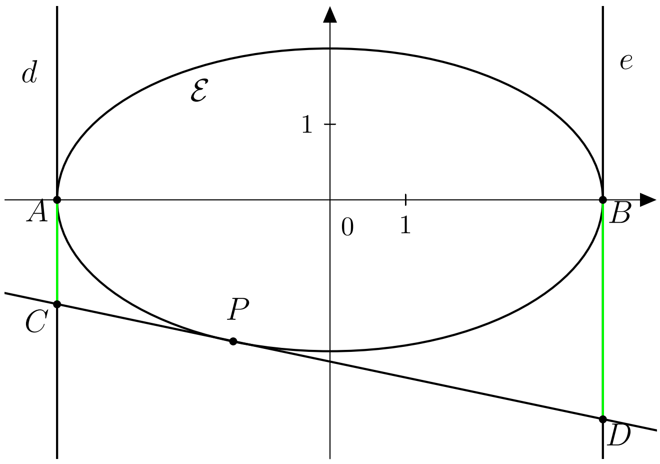
### 3.12.15 Ellipse, produit de longueurs

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dans un repère orthonormé donné. Elle coupe l'axe des $x$ en ses sommets $A$ et $B$. On note $d$ la tangente à $\mathcal{E}$ en $A$, $e$ celle en $B$. Si $P$ est un point de $\mathcal{E}$ distinct de $A$ et de $B$, la tangente à $\mathcal{E}$ en $P$ coupe $d$ en $C$ et $e$ en $D$.

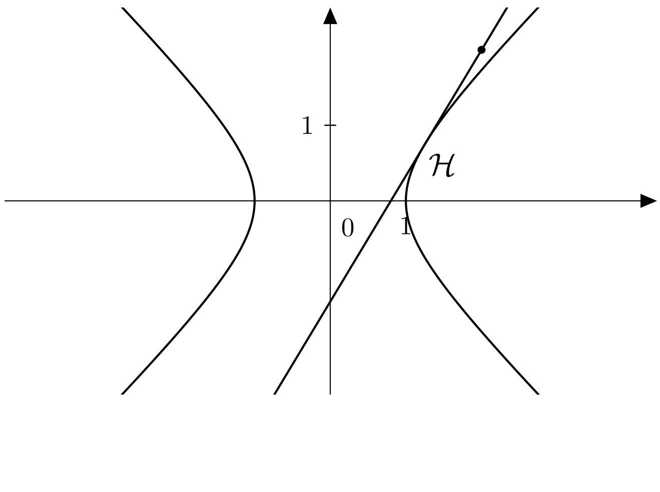
Montrer que le produit $|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|$ ne dépend pas du point $P$.




### 3.12.16 Hyperbole, tangentes

Quelles sont les équations de toutes les tangentes à l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$ passant par le point (2,2) ?

Remarque : peut-être n'y en a-t-il qu'une.



### 3.12.17 Détermination d'une équation d'une conique

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $Oxy$, on considère une conique centrée en $(2,4)$, dont les axes de symétrie sont parallèles aux axes du repère, tangente à la droite $y=1$ au point $(2,1)$ et passant par le point $\left(2+\frac{\sqrt{20}}{3}, 6\right)$.

On demande de

1. donner une équation de cette conique,
2. préciser de quel type de conique il s'agit.

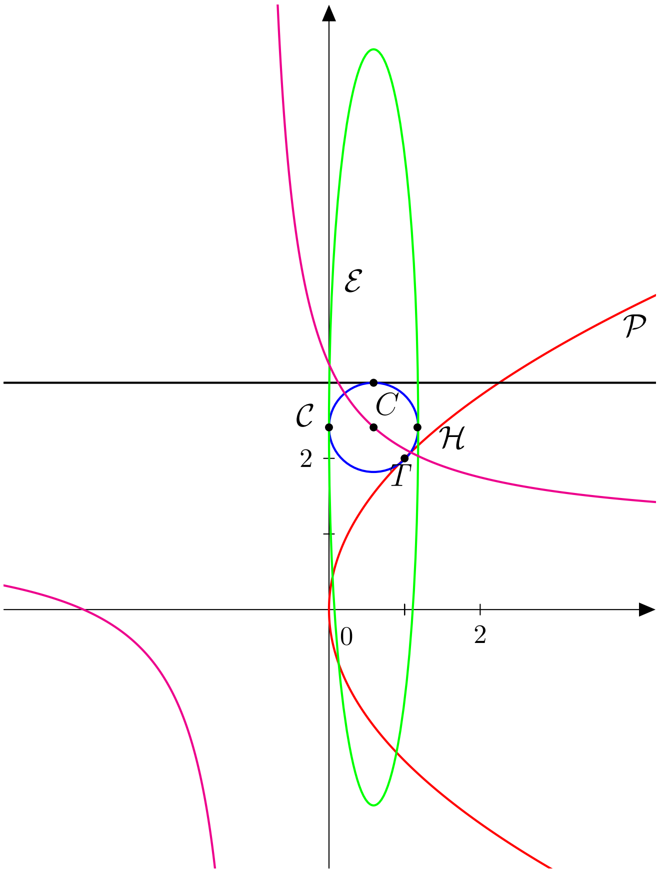
Remarque : commencer par éliminer les types de coniques qui ne correspondent pas à l'énoncé. Discuter ensuite en fonction des coniques restantes.

### 3.12.18 Exercice général, coniques

Soit la parabole $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $y^2 = 4x$ et la droite $d$ d'équation $y = 3$.

On demande de déterminer l'équation

1. du cercle $\mathcal{C}$ tangent à la droite $d$ et à la parabole $\mathcal{P}$ en son point $T$ d'abscisse 1 et d'ordonnée positive, son centre est situé entre la parabole et la droite ;
2. de l'ellipse $\mathcal{E}$ admettant comme centre $C$ le centre du cercle déterminé au point 1., son grand axe est parallèle à $Oy$ et sa longueur vaut 10 ; cette ellipse est tangente au cercle ;
3. de l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ passant par $C$ et admettant comme asymptotes les droites $y = 1$ et $x = -1$.




### 3.12.19 Nature et intersection de coniques

Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine $O$ et d'axes $x$ et $y$, on donne les coniques d'équations respectives

$$f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0,$$

$$g(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y - 1 = 0.$$

On demande de

1. spécifier la nature de ces deux coniques ;
2. déterminer les coordonnées des points d'intersection des deux coniques ;
3. si $\lambda$ est un paramètre réel, l'équation $f(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$ représente une famille de coniques passant par les points d'intersection trouvés au point 2. Déterminer, parmi les coniques de la famille, celle qui passe par le point de coordonnées $\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$. Quelle est la nature de cette courbe ?

### 3.12.20 Courbe orthoptique

Pour une courbe $\mathcal{O}$ donnée, l'ensemble des points du plan à partir desquels on peut tracer deux tangentes à $\mathcal{O}$ qui sont perpendiculaires entre-elles est appellée *courbe orthoptique* de $\mathcal{O}$.

On se place dans un repère orthonormé du plan.

1. Soit une hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

   Démontrer que la courbe orthoptique de l'hyperbole $\mathcal{H}$ est

   (a) le cercle dont le centre est l'origine du repère et dont le rayon est $\sqrt{a^2 - b^2}$ si $a > b$,

   (b) réduite à un point si $a = b$,

   (c) vide si $a < b$.

2. Démontrer que la courbe orthoptique d'une parabole est sa directrice.

3. Démontrer que la courbe orthoptique de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est le cercle dont le centre est l'origine du repère et dont le rayon est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

# Chapitre 4

# Géométrie synthétique dans l'espace

## 4.1 Positions relatives de droites et de plans dans l'espace

Dans l'espace, les positions relatives de deux droites $d$ et $d'$ (figure 4.1) sont les suivantes :

- les droites $d$ et $d'$ sont (strictement) parallèles,
- les droites $d$ et $d'$ sont confondues,
- les droites $d$ et $d'$ sont sécantes,
- les droites $d$ et $d'$ sont gauches (elles n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles).

Dans le plan, les droites ne peuvent être que parallèles, confondues ou sécantes.

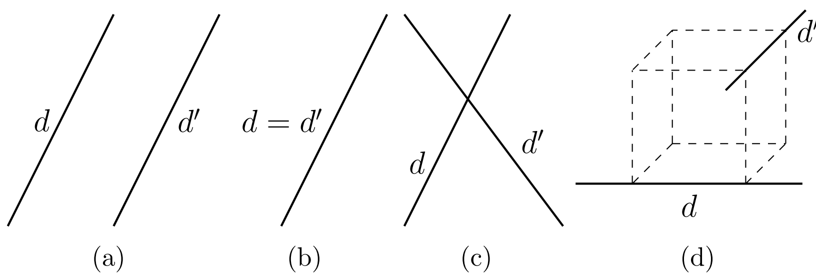



FIG. 4.1 – Positions relatives de deux droites : (a) parallèles, (b) confondues, (c) sécantes, (d) gauches

Les positions relatives de deux plans $\pi$ et $\pi'$ (figure 4.2) sont les suivantes :

- les plans $\pi$ et $\pi'$ sont (strictement) parallèles,
- les plans $\pi$ et $\pi'$ sont confondus,
- les plans $\pi$ et $\pi'$ sont sécants (leur intersection est une droite).

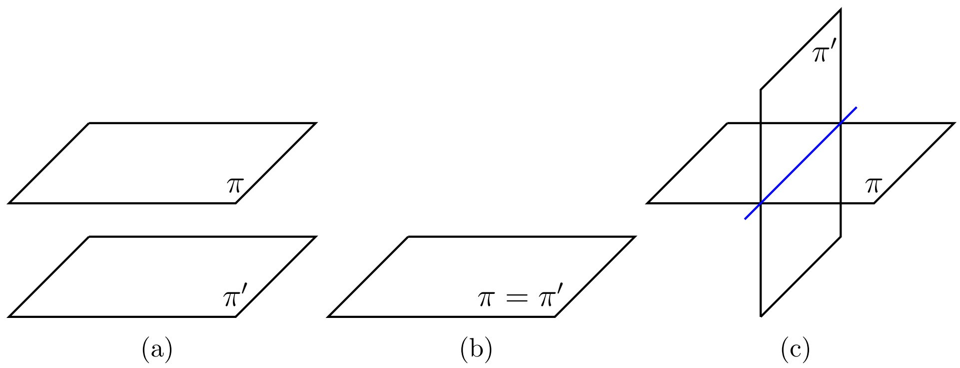



FIG. 4.2 – Positions relatives de deux plans de l'espace : (a) parallèles, (b) confondus, (c) sécants

Les positions relatives d'une droite $d$ et d'un plan $\pi$ (figure 4.3) sont les suivantes :

- la droite et le plan sont (strictement) parallèles,
- la droite est incluse dans le plan,
- la droite et le plan sont sécants (leur intersection est un point).

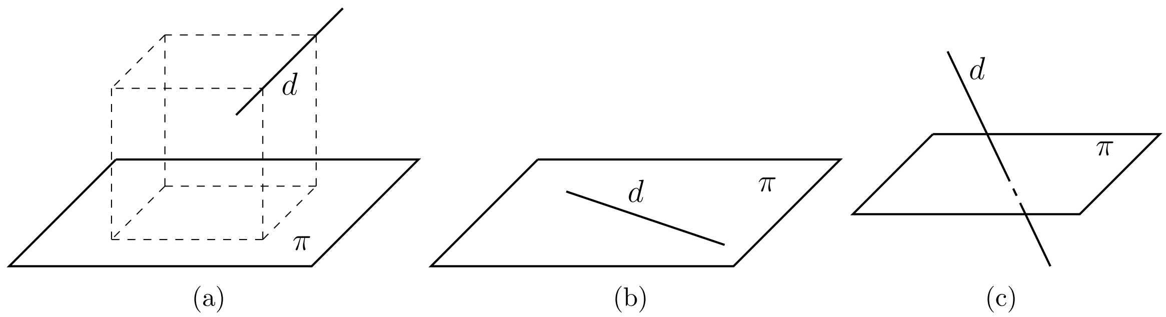



FIG. 4.3 – Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace : (a) parallèles, (b) confondus, (c) sécants

# 4.2 Parallélisme

## 4.2.1 Parallélisme d'une droite et d'un plan

### Définition

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est incluse dans ce plan ou s'ils n'ont aucun point en commun.

Par un point de l'espace, on peut mener une infinité de droites parallèles à un plan donné. De plus, le lieu des droites parallèles à ce plan est le plan parallèle au plan donné passant par le point donné.

### Critère

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan (figure 4.4(a)).

**Propriétés**

1. Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection (figure 4.4(b)).

2. Si une droite est strictement parallèle à un plan, tout plan qui la contient ainsi qu'un point du plan donné, coupe ce plan suivant une droite parallèle à la droite donnée (figure 4.4(c)).

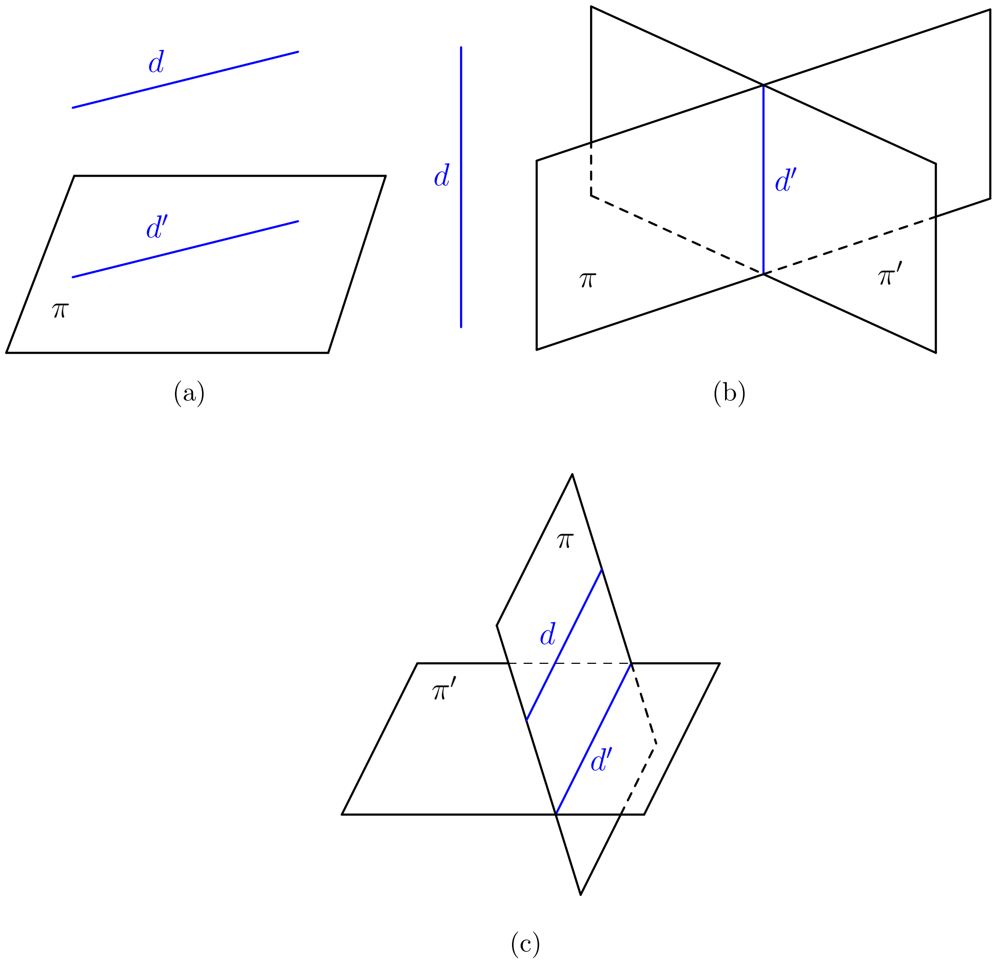



FIG. 4.4 – Parallélisme d'une droite et d'un plan

### 4.2.2 Parallélisme de deux droites

**Définition**

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles sont coplanaires et non sécantes ou si elles sont confondues.

Par un point de l'espace, on ne peut mener qu'une et une seule parallèle à une droite donnée (c'est un des axiomes d'Euclide).

**Propriétés**

1. Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles (figure 4.5(a)).
2. Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une, coupe l'autre (figure 4.5(b)).
3. Si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre (figure 4.5(c)).
4. Soient $d$ et $d'$ deux droites parallèles, $\pi$ un plan contenant $d$ et $\pi'$ un plan contenant $d'$. Si les plans $\pi$ et $\pi'$ sont sécants, alors la droite $\Delta$ d'intersection de ces plans est parallèle à $d$ et $d'$ (figure 4.5(d)). Ce résultat est connu sous le nom de « Théorème du Toit ».

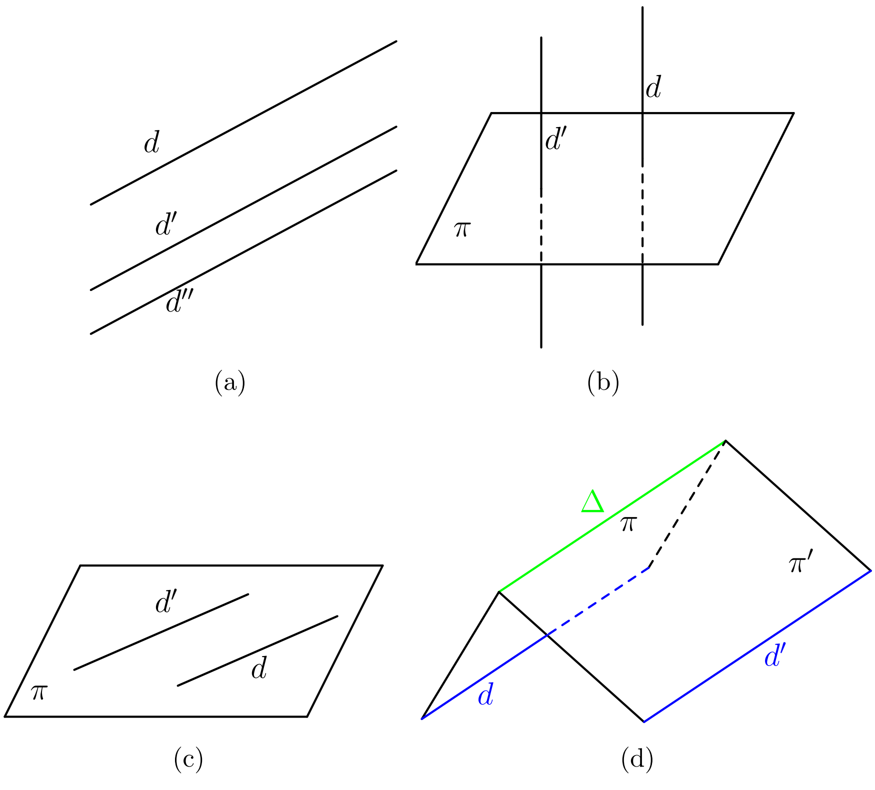



FIG. 4.5 – Parallélisme de deux droites

## 4.2.3 Parallélisme de deux plans

### Définition

Deux plans sont parallèles si et seulement s'ils ne sont pas sécants ou s'ils sont confondus.

Par un point de l'espace, on ne peut mener qu'un et un seul plan parallèle à un plan donné. De même, par une droite de l'espace, on ne peut mener qu'un et un seul plan parallèle à un plan donné.

### Critère

Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites sécantes parallèles à l'autre plan (figure 4.6(a)).

### Propriétés

1. Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles (figure 4.6(b)).
2. Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux (figure 4.6(c)).
3. Si deux plans sont parallèles, toute droite qui perce l'un, perce l'autre (figure 4.6(d)).

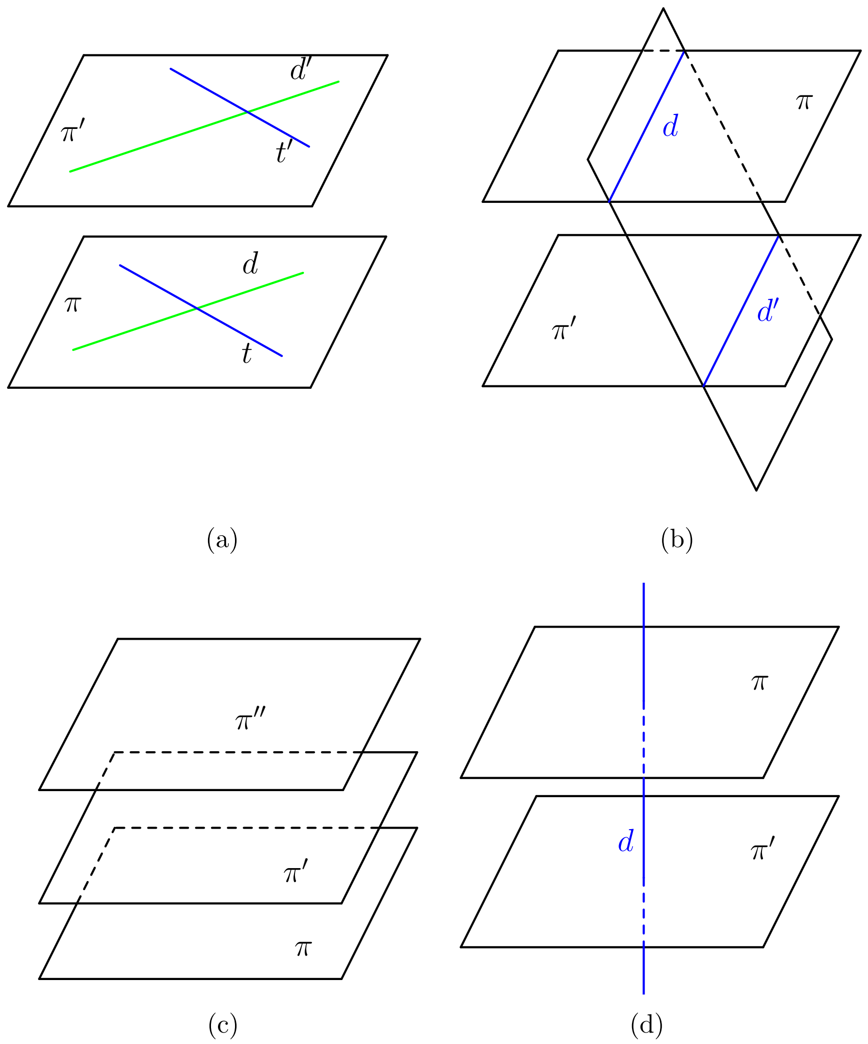



FIG. 4.6 – Parallélisme de deux plans

# 4.3 Orthogonalité

## 4.3.1 Perpendiculatitié d'une droite et d'un plan

### Définition

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Par un point de l'espace, on ne peut mener qu'une et une seule droite perpendiculaire à un plan donné.

De façon analogue, par un point de l'espace, on ne peut mener qu'un et un seul plan perpendiculaire à une droite donnée.

### Critère

Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan (figure 4.7(a)).

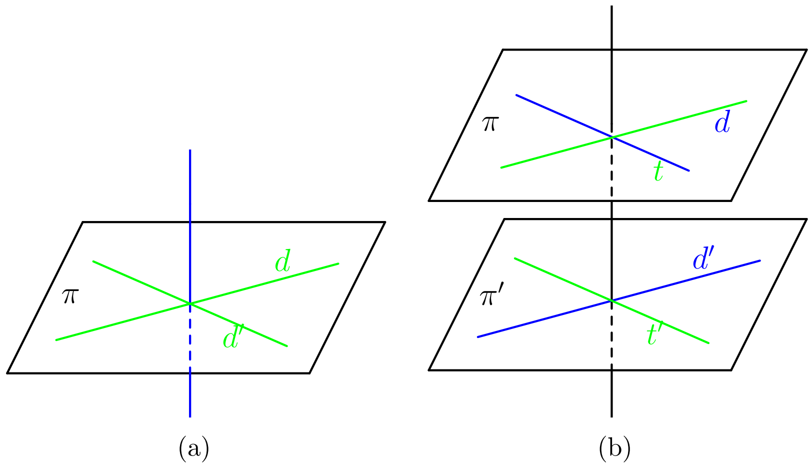



FIG. 4.7 – Perpendicularité d'une droite et d'un plan

### Propriétés

1. Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre (figure 4.7(b)).

2. Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

3. Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles (figure 4.8(a)).

4. Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux (figure 4.8(b)).

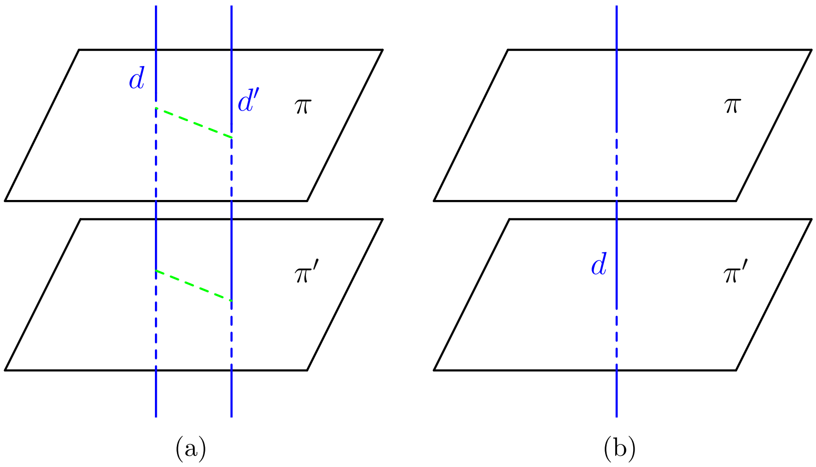



FIG. 4.8 – Perpendicularité d'une droite et d'un plan

### 4.3.2 Orthogonalité de deux droites

**Définitions**

Deux droites sécantes sont perpendiculaires si et seulement si les angles qu'elles déterminent sont égaux et valent 90°.

Deux droites sont orthogonales si et seulement si l'une est perpendiculaire à une parallèle à l'autre.

Par un point de l'espace, on ne peut mener qu'une et une seule droite perpendiculaire à une droite donnée. De la même façon, par un point de l'espace, on peut mener une infinité de droites orthogonales à une droite donnée. Le lieu géométrique de ces droites orthogonales est le plan perpendiculaire à la droite donnée passant par le point donné.

Il existe une et une seule perpendiculaire commune à deux droites gauches (voir aussi la section géométrie analytique dans l'espace).

**Propriétés**

1. Deux droites sont orthogonales si et seulement si l'une est incluse dans un plan perpendiculaire à l'autre.
2. Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles.
3. Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux.
4. Si par un point on mène deux droites, l'une perpendiculaire à un plan, l'autre perpendiculaire à une droite de ce plan, le plan des deux perpendiculaires est perpendiculaire à la droite du plan. Ce résultat est connu sous le nom de « Théorème des trois perpendiculaires ».

### 4.3.3 Perpendicularité de deux plans

**Définition**

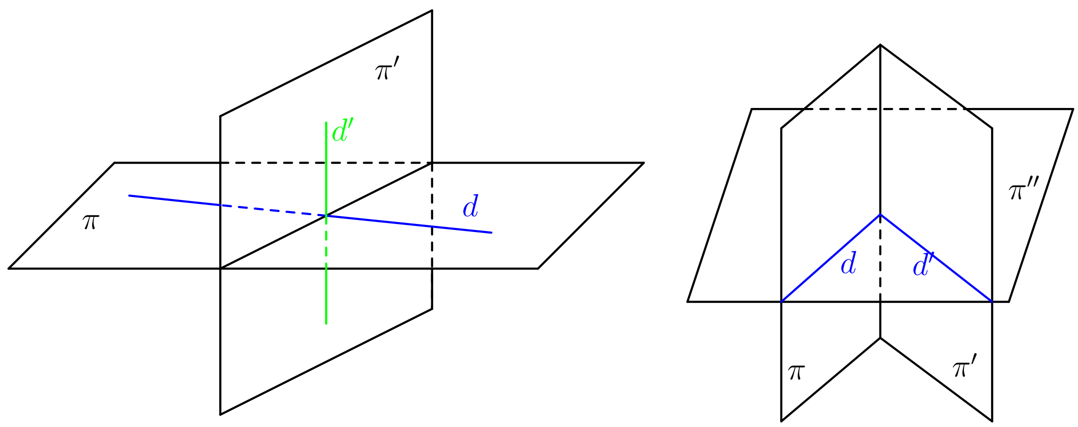
Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre plan (figure 4.9(a)).

Par un point de l'espace, on peut mener une infinité de plans perpendiculaires à un plan donné.

Par une droite de l'espace non perpendiculaire à un plan donné, on ne peut mener qu'un et un seul plan perpendiculaire au plan donné.

**Propriétés**

1. Si deux plans sécants sont perpendiculaires à un même plan, alors l'intersection des deux premiers est orthogonale au troisième plan (figure 4.9(b)).
2. Si deux plans sont perpendiculaires, tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.
3. Si une droite et un plan sont perpendiculaires à un même plan, ils sont parallèles.




(a) (b)

FIG. 4.9 – Perpendicularité de deux plans

## 4.4 Plan médiateur d'un segment

On appelle plan médiateur d'un segment d'extrémités $A$ et $B$ le plan perpendiculaire à ce segment passant par son milieu.

Ce plan est le lieu des points équidistants de deux points distincts.

## 4.5 Applications

### 4.5.1 Vrai ou faux

Répondre par vrai ou faux et justifier lorsque la proposition est fausse. Les propositions suivantes sont supposées dans un espace euclidien de dimension 3.

1. Dans l'espace, deux droites sont parallèles ou sécantes.
2. Deux plans non parallèles ont toujours une droite commune.
3. Etant donné deux droites gauches, il existe toujours une troisième qui est perpendiculaire à chacune des deux droites gauches et qui intersecte chacune de ces droites gauches.
4. Etant donné deux droites gauches et un point $P$ qui n'appartient à aucune de ces droites, il existe toujours une droite qui passe par $P$ et qui intersecte chacune des deux droites gauches.
5. Deux droites distinctes déterminent toujours un seul plan.
6. Etant donné un point et un plan, il existe toujours un plan unique passant par le point donné et orthogonal au plan donné.
7. Deux plans orthogonaux ont toujours une droite d'intersection.
8. Si deux plans sont orthogonaux, tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre.
9. Si deux droites sont orthogonales, tout vecteur de l'une est orthogonal à tout vecteur de l'autre.
10. Si une droite et un plan sont perpendiculaires, tout vecteur de la droite est orthogonal à tout vecteur du plan.

Solution

1. Faux : elles peuvent être parallèles, sécantes ou gauches.
2. Vrai.
3. Vrai.
4. Faux : elle peut intersecter l'une mais pas l'autre.
5. Faux : si elles sont gauches, elles ne peuvent être coplanaires et donc déterminer un plan.
6. Faux : une infinité de plans correspond à la proposition.
7. Vrai.
8. Faux : les vecteurs normaux sont orthogonaux mais un vecteur quelconque du plan (formé par deux points de ce plan) n'est pas nécessairement orthogonal à un vecteur du second plan. Par exemple, considérons le plan d'équation $y = a$. Le plan $z = b$ est orthogonal au premier. Un vecteur du premier plan a pour composantes : $(1, 0, 1)$ et un vecteur du second a pour composantes : $(1, 1, 0)$. On note que le produit scalaire de ces vecteurs n'est pas nul, les vecteurs ne sont pas orthogonaux.
9. Vrai.
10. Vrai.

### 4.5.2 Perpendicularité dans l'espace, tétraèdre régulier, orthocentre

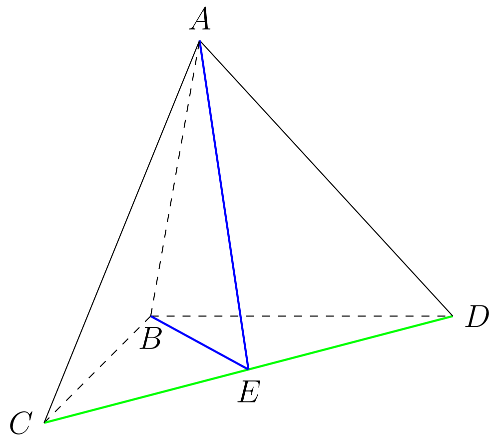
On considère un tétraèdre $ABCD$ régulier (c'est-à-dire dont tous les côtés sont égaux). Soit $E$ le milieu du côté $[C, D]$.

1. Montrer que la droite $CD$ est perpendiculaire au plan $ABE$.
2. Montrer que la hauteur du triangle $ABE$ issue de $A$ est perpendiculaire à la face $BCD$ et que la hauteur du triangle $ABE$ issue de $B$ est perpendiculaire à la face $ACD$.

   (Rappelons qu'une hauteur du tétraèdre est une droite passant par un des sommets et perpendiculaire à la face opposée. Le pied d'une hauteur est son intersection avec la face à laquelle elle est perpendiculaire.)
3. Montrer que les pieds des hauteurs du tétraèdre sont les orthocentres des faces correspondantes.

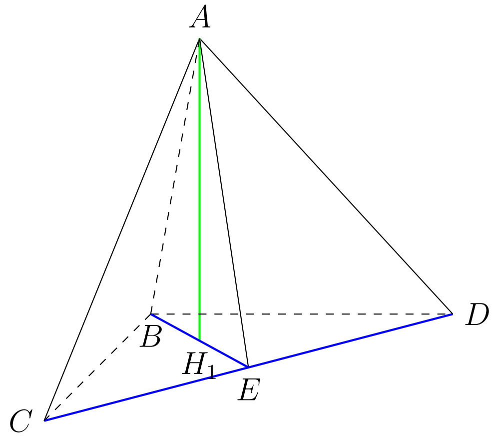
Solution

1. Pour montrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan, il suffit de montrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

   Puisque le tétraèdre est régulier, ses faces sont des triangles équilatéraux. $E$ étant le milieu du segment $[C, D]$, les droites $BE$ et $AE$ sont perpendiculaires à la droite $CD$ puisqu'elles correspondent à la médiatrice du segment $[C, D]$ respectivement dans les triangles équilatéraux $BCD$ et $ACD$.

   Ainsi, la droite $CD$ étant perpendiculaire à deux droites sécantes $BE$ et $AE$ du plan $ABE$, elle est perpendiculaire au plan $ABE$.
2. Soit $H_1$ le pied de la hauteur du triangle $ABE$ issue de $A$. Le point $H_1$ appartient à la droite $BE$ et de ce fait au plan $BCD$. Par définition de la hauteur d'un triangle, la droite $AH_1$ est perpendiculaire à la droite $BE$.




Pour montrer que la droite $AH_1$ est perpendiculaire au plan $BCD$, il suffit de montrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. Comme elle est perpendiculaire à la droite $BE$, il suffit de trouver une seconde droite de ce plan sécante avec la droite $BE$.

Dans le point 1. de cet exercice, on a montré que la droite $CD$ est perpendiculaire au plan $ABE$. Par conséquent, la droite $CD$ est orthogonale à la droite $AH_1$ puisque si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Ainsi, la droite $AH_1$ étant perpendiculaire à deux droites sécantes $CD$ et $BE$ du plan $BCD$, elle est donc perpendiculaire au plan $BCD$.

Soit $H_2$ le pied de la hauteur du triangle $ABE$ issue de $B$. On montre de façon analogue que la droite $AH_2$ est perpendiculaire au plan $ACD$.

3. Les développements ne seront effectués que pour le point $H_1$. Pour montrer que ce point est l'orthocentre du triangle $BCD$, il suffit de montrer que deux des hauteurs de ce triangle sont concourantes en $H_1$ (puisque dans tout triangle, les hauteurs sont concourantes).

   On propose de montrer que la droite $DH_1$ est perpendiculaire à la droite $BC$.

   Dans un premier temps, montrons que la droite $BC$ est perpendiculaire au plan $ADH_1$. En effet, elle est perpendiculaire à la droite $AH_1$ (cf. point 2.) et elle est orthogonale à la droite $AD$ puisque dans un tétraèdre régulier, les droites supportées par les côtés opposés sont orthogonales. Ainsi, puisque la droite $BC$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $ADH_1$, elle est donc perpendiculaire à ce plan.

   Ensuite, puisque la droite $DH_1$ est incluse dans le plan $ADH_1$, elle est également perpendiculaire à la droite $BC$ car si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

### 4.5.3 Parallélisme dans l'espace, tétraèdre

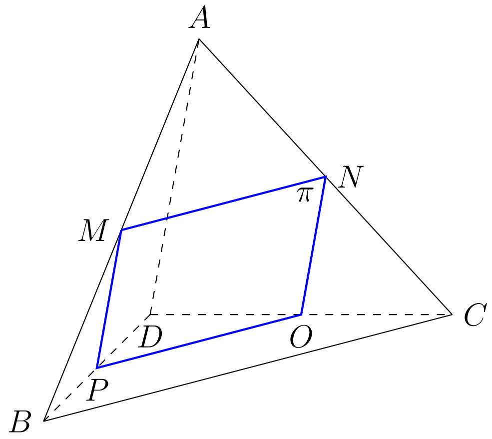
Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note $M$ le milieu de $[A, B]$ et $\pi$ le plan contenant $M$ et parallèle à $AD$ et à $BC$. Ce plan coupe $AC$ en $N$, $CD$ en $O$ et $DB$ en $P$.

1. Montrer que $MNOP$ est un parallélogramme.

2. En déduire que les droites joignant les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes.

Solution

1. La droite $MN$ appartient au plan $ABC$ puisque $M$ et $N$ appartiennent à des droites de ce plan. On montre par l'absurde que les droites $MN$ et $BC$ sont parallèles. En effet, les droites ne peuvent être sécantes puisque si elles l'étaient, le plan $\pi$ ne serait pas parallèle à la droite $BC$.




En raisonnant de la même façon, on montre que la droite $PO$ est parallèle à la droite $BC$. Par conséquent, les droites $MN$ et $PO$ sont parallèles puisqu'elles le sont toutes les deux avec la droite $BC$.

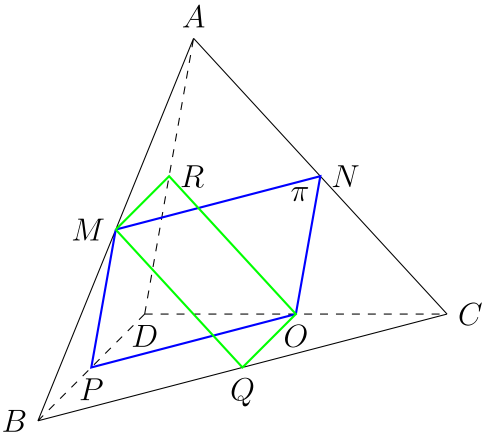
La droite $ON$ appartient au plan $ACD$ puisque $O$ et $N$ appartiennent à des droites de ce plan. On montre par l'absurde que les droites $ON$ et $AD$ sont parallèles. En effet, les droites ne peuvent être sécantes puisque si elles l'étaient, le plan $\pi$ ne serait pas parallèle à la droite $AD$.

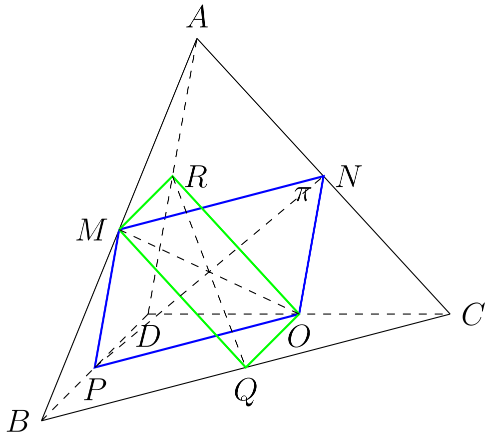
En raisonnant de la même façon, on montre que la droite $PM$ est parallèle à la droite $AD$. Par conséquent, les droites $ON$ et $PM$ sont parallèles puisqu'elles le sont toutes les deux avec la droite $AD$.

Ainsi, on montre que, pour les quatre points $M$, $N$, $O$, $P$ du plan $\pi$, les droites $MN$ et $ON$ sont respectivement parallèles aux droites $PO$ et $PM$. Par conséquent, le quadrilatère $MNOP$ est un parallélogramme.

2. Le théorème des milieux s'énonce ainsi : dans un triangle, si par le milieu d'un côté, on mène une parallèle à un autre côté, cette droite coupe le troisième côté en son milieu et la longueur du segment compris entre ces deux milieux vaut la moitié de celle du troisième côté.

Par conséquent, on conclut rapidement que $N$, $O$ et $P$ sont les milieux des arêtes $[A, C]$, $[C, D]$ et $[D, B]$. Et, puisque dans un parallélogramme, les diagonales sont concourantes, on prouve l'intersection des droites $MO$ et $NP$.




On peut recommencer l'exercice en considérant un plan $\pi'$ passant par $M$ et parallèle aux droites $BD$ et $AC$ tel qu'il coupe la droite $BC$ en $Q$ et $AD$ en $R$. On prouve alors que $Q$ et $R$ sont les milieux des arêtes $[B, C]$ et $[A, D]$ et que le quadrilatère $MQOR$ est un parallélogramme. Puisque les parallélogrammes ont tous les deux la diagonale $OM$ en commun, on montre que les droites joignant les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes.

## 4.6 Exercices proposés

### 4.6.1 Tétraèdre, droites sécantes

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On désigne par $P$ le point d'intersection des médiatrices du triangle $ABC$, par $d$ la perpendiculaire au plan $ABC$ passant par $P$, par $Q$ le point d'intersection des médiatrices de $ABD$ et par $d'$ la perpendiculaire au plan $ABD$ passant par $Q$.

Démontrer que les droites $d$ et $d'$ sont sécantes et caractériser leur point d'intersection. En déduire que les perpendiculaires à chaque face passant par le point d'intersection des médiatrices de celle-ci sont concourantes.

### 4.6.2 Tétraèdre, plans perpendiculaires, intersection de plans

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que $AB$ soit orthogonal à $CD$. On désigne par $H$ la projection orthogonale de $A$ sur le plan $BCD$ et on suppose que $H$ n'appartient pas aux droites $BC$ et $BD$. On désigne par $P$ et $Q$ les projections orthogonales de $H$ sur les plans $ABC$ et $ABD$.

Démontrer que

1. le plan $PHQ$ est perpendiculaire à $AB$,
2. le plan $PHQ$ coupe le plan $BCD$ suivant une droite parallèle à $CD$.

### 4.6.3 Tétraèdre, perpendiculaire commune à deux droites

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que $AB$ est perpendiculaire à $CD$ et que $|AC| = |AD|$.

Démontrer que $|BC| = |BD|$ et que la perpendiculaire commune à $AB$ et $CD$ est la perpendiculaire à $AB$ passant par le milieu de $[C, D]$.

### 4.6.4 Tétraèdre, centre de gravité

Démontrer que, dans un tétraèdre, le segment qui joint les centres de gravité (points de concours des médianes) de deux faces est parallèle à une arête et en vaut le tiers.

### 4.6.5 Tétraèdre, milieux d'arêtes

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On désigne par $I$, $J$, $K$, $L$ les milieux de $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$.

Démontrer que

1. si $AB$ est perpendiculaire à $AC$ et $BD$, elle est aussi perpendiculaire à $IK$ ;
2. si, en outre, $|AC| = |BD|$, $IK$ est perpendiculaire à $JL$.

### 4.6.6 Tétraèdre, hauteurs, droites concourantes

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note respectivement $h_A$ et $h_B$ les hauteurs du tétraèdre issues de $A$ et $B$.

1. Démontrer que $h_A$ et $h_B$ sont concourantes si et seulement si la droite $AB$ est orthogonale à la droite $CD$.
2. Démontrer que les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes si les arêtes opposées de ce tétraèdre sont orthogonales deux à deux.

### 4.6.7 Tétraèdre, volume

Etant données deux droites gauches $d_1$ et $d_2$ dans l'espace euclidien et deux nombres positifs $l_1$ et $l_2$, on place un segment $[A, B]$ de longueur $l_1$ sur $d_1$ et un segment $[C, D]$ de longueur $l_2$ sur $d_2$.

Démontrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est indépendant de la position des segments $[A, B]$ et $[C, D]$ sur leurs droites respectives.

### 4.6.8 Tétraèdre, perpendiculaire commune à deux droites

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que $|AC| = |AD|$ et $|BC| = |BD|$ et tel que les triangles $ACD$ et $BCD$ aient même aire. Si $M$ et $M'$ sont les milieux de $[C, D]$ et $[A, B]$, démontrer que $MM'$ est la perpendiculaire commune à $AB$ et $CD$.

### 4.6.9 Tétraèdre, aire d'un triangle

Soit $SABC$ un tétraèdre tel que $SA$ soit perpendiculaire à $ABC$. On note $A'$ la projection orthogonale de $A$ sur $SBC$.

Démontrer la relation
$$\frac{\mathcal{A}(SBC)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(A'BC)},$$
où $\mathcal{A}(XYZ)$ désigne l'aire du triangle $XYZ$.

### 4.6.10 Tétraèdre, perpendicularité de droites

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les arêtes opposées sont deux à deux de même longueur. Démontrer que les droites joignant les milieux de deux arêtes opposées sont perpendiculaires deux à deux.

Suggestion : démontrer d'abord qu'elles sont sécantes.

### 4.6.11 Tétraèdre, perpendicularité de droites

Un plan $\pi$ coupe les arêtes $[A,B]$, $[A,C]$ et $[A,D]$ d'un cube en trois points notés respectivement $B'$, $C'$ et $D'$. Dans le triangle $AB'C'$, on note $H$ le pied de la hauteur issue de $A$.

1. Démontrer, en justifiant soigneusement toutes les étapes de votre raisonnement, que la droite $B'C'$ est perpendiculaire au plan $AD'H$.
2. En déduire que le plan $AD'H$ est perpendiculaire au plan $\pi$.
3. En déduire que la projection orthogonale de $A$ sur le plan $\pi$ coïncide avec l'orthocentre du triangle $B'C'D'$.

### 4.6.12 Tétraèdre, projection orthogonale d'un point sur un plan

On considère deux plans sécants $\pi$ et $\pi'$, et une droite $d$ perpendiculaire à $\pi$. Démontrer que la projection orthogonale de $d$ sur $\pi'$ est perpendiculaire à l'intersection de $\pi$ et de $\pi'$.

Rappel : la projection orthogonale de $d$ sur $\pi'$ est l'intersection de $\pi'$ et du plan perpendiculaire à $\pi'$ incluant $d$.

### 4.6.13 Pyramide, parallélogramme, droite parallèle à l'intersection de deux plans

On considère une pyramide de sommet $S$ et dont la base est un quadrilatère convexe plan $ABCD$.

Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si le plan $ABCD$ est parallèle aux droites d'intersections des plans $SAB$ et $SCD$ d'une part, $SBC$ et $SAD$ d'autre part.

### 4.6.14 Prisme à base carrée

On considère un prisme droit $ABCDA'B'C'D'$ à base carrée $ABCD$.

1. Si $X$ est le centre de la face $A'B'C'D'$, la hauteur du triangle $BXB'$ issue de $B'$ est perpendiculaire au plan $A'C'B$.
2. Prouver que si les diagonales $BD'$ et $B'D$ sont perpendiculaires, alors la perpendiculaire abaissée de $B'$ sur le plan $A'C'B$ passe par le milieu de l'arête $[D, D']$.

### 4.6.15 Droites parallèles, droites concourantes

On considère un tétraèdre $OABC$ et on note $G$ le centre de gravité de la face $ABC$. On note respectivement $A_1$, $B_1$ et $C_1$ les milieux de $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$. Un plan $\pi$ parallèle à $ABC$ coupe $OA$, $OB$ et $OC$ en respectivement $A'$, $B'$ et $C'$.

1. Démontrer qu'il existe une unique position de $\pi$ pour laquelle les droites $A'A_1$, $B'B_1$ et $C'C_1$ sont parallèles à $OG$.
2. Démontrer que pour toutes les autres positions, ces droites sont concourantes en un point $P$ de la droite $OG$.

### 4.6.16 Polygone, cube, projections orthogonales

On considère un cube $ABCDA'B'C'D'$ avec $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'D'}$, et un plan $\pi$ perpendiculaire à la droite $AC'$. La longueur d'une arête du cube est notée $l$.

On note respectivement $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$ et $H_6$ les projections orthogonales des sommets $B, C, D, D', A'$ et $B'$ du cube sur le plan $\pi$.

1. Démontrer que l'haxagone $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$ est régulier.
2. Déterminer l'aire de cet hexagone en fonction de $l$.

# Chapitre 5

# Géométrie analytique dans l'espace

## 5.1 Repère, coordonnées d'un point et composantes d'un vecteur

Soit un repère orthonormé $Oxyz$ de l'espace (il s'agit d'une extension d'un repère dans le plan tel qu'il a été vu à la section 3.1). Nous prendrons dans ces notes la convention suivante (figure 5.1) : les coordonnées d'un point $K$ seront $(x_K, y_K, z_K)$ et les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{k}$ seront $(k_1, k_2, k_3)$.

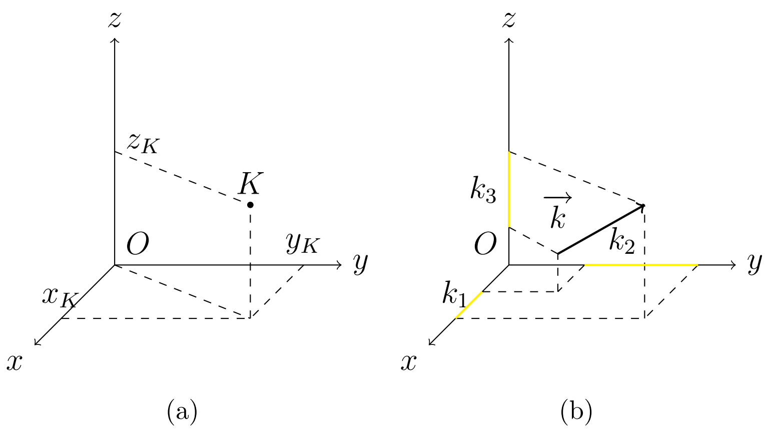



FIG. 5.1 – Coordonnées d'un point et composantes d'un vecteur dans le repère choisi

## 5.2 Produit vectoriel

Soit un espace vectoriel $E$ de dimension 3. Comme dans le plan, il y a deux orientations possibles de $E$ : elles correspondent en physique aux deux façons d'orienter une spirale. Celle adoptée pour les vis, les tire-bouchons, etc. est généralement appelée droite ou dextrorsum. L'autre est dite gauche ou sinistrorsum. Si on considère que le pouce, l'index et le majeur d'une main « forment une base », alors celle associée à la main droite est dextrorsum et l'autre est sinistrorsum. Sur cet exemple, il est particulièrement frappant que l'on ne puisse transformer l'une en l'autre : il est impossible de superposer ses deux mains !

La définition du produit vectoriel nécessite l'introduction de la notion d'orientation de l'espace et d'orientation des bases de l'espace. On suppose être dans le cas d'un espace orienté à droite.

### 5.2.1 Définition

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls (figure 5.2) est le vecteur noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ tel que

- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,
- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ constitue une base de même orientation que celle de l'espace,
- $||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{v}|| \sin\theta$, $\theta$ étant l'angle non orienté formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

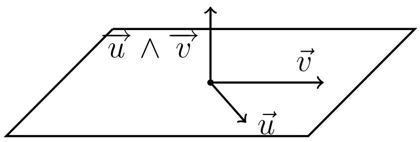



FIG. 5.2 – Produit vectoriel

Cette définition montre que si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ de ces deux vecteurs est le vecteur nul.

### 5.2.2 Propriétés

1. Le produit vectoriel est linéaire par rapport à chacun de ses arguments
$$(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}) + \mu(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}),$$
$$\overrightarrow{u} \wedge (\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + \mu(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}).$$

2. Le produit vectoriel est antisymétrique
$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}).$$

3. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthonormés, alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée positive de l'espace.

4. Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls est nul si et seulement si les deux vecteurs sont parallèles.

5. La norme du produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur ces vecteurs.

6. Dans un repère orthonormé, le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ a pour composantes
$$\left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$
où $(u_1, u_2, u_3)$ et $(v_1, v_2, v_3)$ sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

## 5.3 Equations d'un plan

### 5.3.1 Equations paramétriques d'un plan

Soit un plan $\pi$ défini par un point $A$ et par deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ linéairement indépendants[1] (figure 5.3).

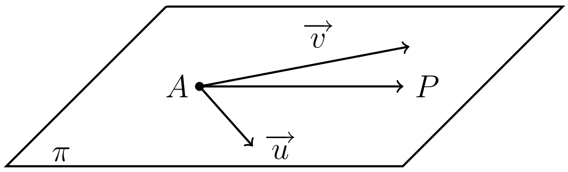



FIG. 5.3 – Plan défini par un point et deux vecteurs directeurs linéairement indépendants

Les points du plan $\pi$ peuvent être générés par combinaison linéaire des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ à partir du point $A$

$$P \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \exists r, s \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AP} = r\,\overrightarrow{u} + s\,\overrightarrow{v}.$$

Les équations paramétriques du plan $\pi$ s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_A + ru_1 + sv_1 \\ y = y_A + ru_2 + sv_2 \\ z = z_A + ru_3 + sv_3 \end{array} \right. \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

où $(x, y, z)$ sont les coordonnées d'un point quelconque $P$ du plan $\pi$.

### 5.3.2 Equation cartésienne d'un plan

En éliminant les paramètres $r$ et $s$ des équations paramétriques, on obtient une équation cartésienne du plan $\pi$

$$ax + by + cz + \delta = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Sous sa forme cartésienne, le plan $\pi$ admet un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ dont les composantes sont $(a, b, c)$.

Si le plan $\pi$ est défini par un point $A$ et deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, alors une équation cartésienne de ce plan est

$$\begin{vmatrix} x - x_A & u_1 & v_1 \\ y - y_A & u_2 & v_2 \\ z - z_A & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si le plan $\pi$ est défini par trois points distincts $A$, $B$, $C$ non alignés, une équation cartésienne de ce plan est alors

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \\ z - z_A & z_B - z_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0.$$

[1]Deux vecteurs sont dits linéairement indépendants s'ils ne sont pas multiples l'un de l'autre.

Ces deux écritures sont équivalentes puisque les deux dernières colonnes correspondent aux composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ linéairement indépendants.

Ainsi, un point $P$ appartient au plan $\pi$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation du plan, *i.e.* si et seulement si $ax_P + by_P + cz_P + \delta = 0$.

# 5.4 Equations d'une droite

## 5.4.1 Equations paramétriques d'une droite

Soit une droite $d$ définie par un point $A$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (figure 5.4).

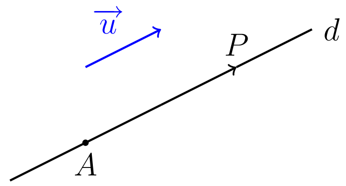



FIG. 5.4 – Droite définie par un point et un vecteur directeur

Les points de la droite $d$ peuvent être générés par la translation du vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ à partir du point $A$

$$P \in d \quad \Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{u}.$$

Les équations paramétriques de la droite $d$ se déduisent facilement de la relation ci-dessus et s'écrivent

$$\begin{cases} x = x_A + ru_1 \\ y = y_A + ru_2 \qquad r \in \mathbb{R} \\ z = z_A + ru_3 \end{cases}$$

où $(x, y, z)$ sont les coordonnées d'un point quelconque $P$ de la droite $d$.

## 5.4.2 Equations cartésiennes d'une droite

En éliminant le paramètre $r$ des équations paramétriques, on obtient des équations cartésiennes de la droite $d$

$$\frac{x - x_A}{u_1} = \frac{y - y_A}{u_2} = \frac{z - z_A}{u_3}.$$

Si l'un des $u_i$ est nul, par exemple $u_2$, on préfèrera l'écriture suivante

$$\begin{cases} y = y_A \\ \dfrac{x - x_A}{u_1} = \dfrac{z - z_A}{u_3}. \end{cases}$$

Les équations cartésiennes ci-haut peuvent également se mettre sous la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz + \delta = 0 & (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \\ a'x + b'y + c'z + \delta' = 0 & (a', b', c') \neq (0, 0, 0) \end{cases}$$

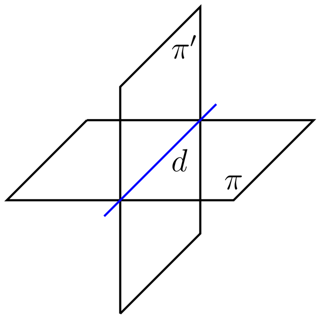



FIG. 5.5 – Droite définie par l'intersection de deux plans

où la droite $d$ apparaît comme l'intersection de deux plans (figure 5.5).

Dans ce cas, lorsque la droite apparaît comme l'intersection de deux plans, un de ses vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ est égal au produit vectoriel des vecteurs normaux des plans sécants définissant la droite. Ainsi, les composantes du vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ sont données par

$$\left( \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right).$$

## 5.5 Parallélisme

Soient deux plans $\pi$ et $\pi'$ et deux droites $d$ et $d'$.

Dans un repère orthonormé, les plans $\pi$ et $\pi'$ ont respectivement pour équation

$$ax + by + cz + \delta = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c'z + \delta' = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$. Les droites $d$ et $d'$ sont définies respectivement par un point $A$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, et par un point $A'$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$.

### 5.5.1 Parallélisme de deux plans

Les plans $\pi$ et $\pi'$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont parallèles (figure 5.6).

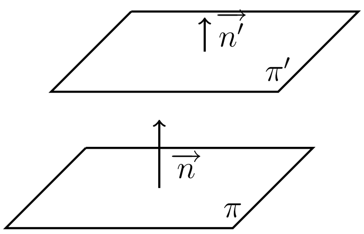



FIG. 5.6 – Parallélisme de deux plans

Ainsi, pour montrer que deux plans $\pi$ et $\pi'$ sont parallèles, il suffit de montrer que leurs vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont multiples l'un de l'autre.

### 5.5.2 Parallélisme d'une droite et d'un plan

La droite $d$ est parallèle au plan $\pi$ si et seulement si le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite et le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ du plan sont orthogonaux (figure 5.24).

Pour montrer leur parallélisme, il suffit de vérifier que le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}$ est nul.

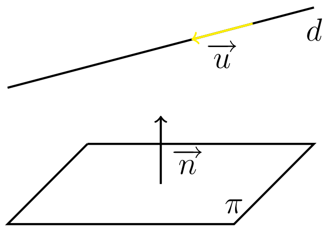



FIG. 5.7 – Parallélisme d'une droite et d'un plan

### 5.5.3 Parallélisme de deux droites

Les droites $d$ et $d'$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont parallèles (figure 5.8).

Ainsi, pour montrer que deux droites $d$ et $d'$ sont parallèles, il suffit de montrer que leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont multiples l'un de l'autre.

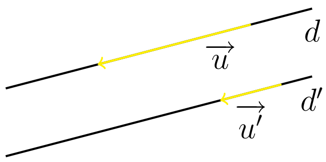



FIG. 5.8 – Parallélisme de deux droites

## 5.6 Perpendicularité

Soient deux plans $\pi$ et $\pi'$ et deux droites $d$ et $d'$.

Les équations et éléments caractéristiques des plans et des droites sont les mêmes que ceux de la section 5.5.

### 5.6.1 Perpendicularité de deux plans

Les plans $\pi$ et $\pi'$ sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux (figure 5.9).
Pour montrer la perpendicularité entre deux plans, il suffit de vérifier l'annulation du produit scalaire de leurs vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

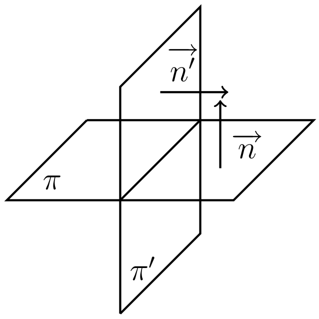



FIG. 5.9 – Perpendicularité de deux plans

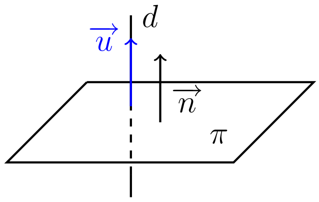



FIG. 5.10 – Perpendicularité d'une droite et d'un plan

### 5.6.2 Perpendicularité d'un plan et d'une droite

La droite $d$ est perpendiculaire au plan $\pi$ si et seulement si le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite et le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ du plan sont parallèles.

Pour montrer leur perpendicularité, il suffit de montrer que le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite et le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ du plan sont multiples l'un de l'autre.

### 5.6.3 Orthogonalité de deux droites

Les droites $d$ et $d'$ sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux (figure 5.11).

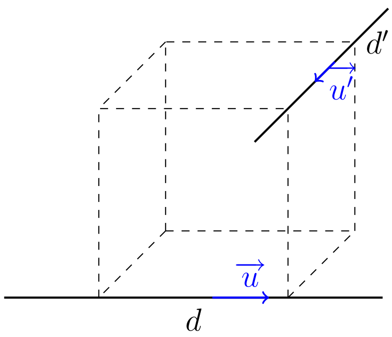



FIG. 5.11 – Orthogonalité de deux droites

Ainsi, pour montrer que deux droites sont perpendiculaires, il suffit de montrer que le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ est nul.

## 5.7 Faisceau de plans passant par une droite

Les faisceaux de plans représentent un outil de calcul particulièrement efficace lorsqu'il s'agit de trouver directement la forme de l'équation d'un plan quand on sait qu'il contient une droite donnée.

Soit une droite $d$. On appelle faisceau de plans d'axe $d$ l'ensemble des plans qui contiennent la droite $d$ (figure 5.12).

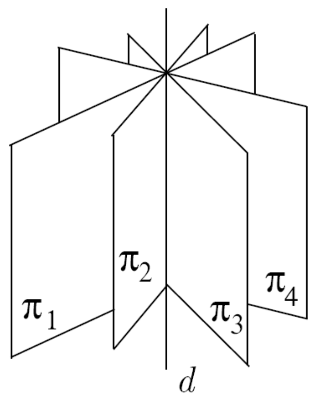



FIG. 5.12 – Faisceau de plans contenant la droite $d$

Si, dans un repère orthonormé, la droite $d$ est définie par deux plans sécants

$$\left\{\begin{array}{rl} ax+by+cz+\delta=0 & (\pi) \\ a'x+b'y+c'z+\delta'=0 & (\pi'), \end{array}\right.$$

alors

$$k(ax+by+cz+\delta)+k'(a'x+b'y+c'z+\delta')=0, \qquad k,k'\in\mathbb{R} \text{ et } (k,k')\neq(0,0)$$

représente l'équation d'une infinité de plans contenant $d$. C'est ce qu'on appelle l'équation du faisceau de plans passant par $d$.

Si $k=0$, on trouve l'équation du plan $\pi$ et si $k'=0$, on trouve l'équation du plan $\pi'$.

Sinon, en posant

$$\lambda=\frac{k'}{k}, k \quad k\neq 0,$$

l'équation du faisceau de plans prend la forme

$$(ax+by+cz+\delta)+\lambda(a'x+b'y+c'z+\delta')=0. \tag{†}$$

Ainsi, si on recherche le plan passant par le point $P$ de coordonnées $(x_P,y_P,z_P)$ et contenant la droite $d$, on recherche d'abord la valeur de $\lambda$ telle que le point $P$ appartienne au faisceau de plans d'axe $d$

$$\lambda=-\frac{ax_P+by_P+cz_P+\delta}{a'x_P+b'y_P+c'z_P+\delta'}. \tag{$*$}$$

En remplaçant la valeur de $\lambda$ trouvée en $(*)$ dans (†), on obtient l'équation du plan passant par la droite $d$ et par le point $P$

$$(ax+by+cz+\delta)-\frac{ax_P+by_P+cz_P+\delta}{a'x_P+b'y_P+c'z_P+\delta'}(a'x+b'y+c'z+\delta')=0.$$

## 5.8 La sphère

### 5.8.1 Définition

L'ensemble des points de l'espace situés à une distance constante $r$ ($r > 0$) d'un point fixe $O$ est appelée sphère $\mathcal{S}$ de rayon $r$ et de centre $O$. En d'autres mots, dans l'espace, la sphère $\mathcal{S}$ de centre $O$ et de rayon $r$ est le lieu des points équidistants du point $O$ tels que la distance entre le point $O$ et un point quelconque de ce lieu soit égale à $r$.

Dans un repère orthonormé, si les coordonnées du point $O$ sont $(x_O, y_O, z_O)$, une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $O$ et de rayon $r$ est

$$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 + (z - z_O)^2 = r^2, \quad r > 0$$

où $(x, y, z)$ sont les coordonnées d'un point quelconque de la sphère.

Vectoriellement, si $A$ et $B$ sont deux points de la sphère diamétralement opposés, la sphère $\mathcal{S}$ passant par ces points est l'ensemble des points $P$ tels que

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0.$$

Cette relation se démontre sans difficulté en appliquant le théorème de la médiane dans le triangle $ABP$ en notant que le milieu $O$ du segment $[AB]$ est le centre de la sphère.

### 5.8.2 Positions relatives d'un plan et d'une sphère

Pour simplifier les développements, on considère, dans un repère orthonormé, la sphère $\mathcal{S}$ de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon $r$ qui a pour équation cartésienne

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad r > 0$$

et le plan $\pi$ de vecteur normal $(1, 1, 1)$ et d'équation cartésienne

$$x + y + z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'intersection d'un plan et d'une sphère dépend de la distance de ce plan au centre de la sphère. La distance du plan $\pi$ au centre de la sphère $\mathcal{S}$ est donnée par

$$\frac{|\lambda|}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, trois cas se présentent

- si la distance du centre de la sphère au plan est inférieure au rayon

$$|\lambda| < \sqrt{3}r,$$

  alors l'intersection est un cercle dont les coordonnées du centre sont $(\lambda/3, \lambda/3, \lambda/3)$ et de rayon $\sqrt{r^2 - \frac{\lambda^2}{3}}$,

- si la distance du centre de la sphère au plan est égale au rayon

$$|\lambda| = \sqrt{3}r$$

alors le plan est tangent à la sphère et l'intersection est le point de coordonnées $(\lambda/3, \lambda/3, \lambda/3)$,

- si la distance du centre de la sphère au plan est supérieure au rayon

$$|\lambda| > \sqrt{3}r$$

alors l'intersection est vide.

## 5.9 Projections orthogonales

### 5.9.1 Projection orthogonale d'un point sur un plan

On définit la projection orthogonale du point $P$ sur le plan $\pi$ par le point $P'$ du plan $\pi$ résultant de l'intersection de ce dernier et de la droite $d'$ perpendiculaire au plan $\pi$ passant par le point $P$ (figure 5.13).

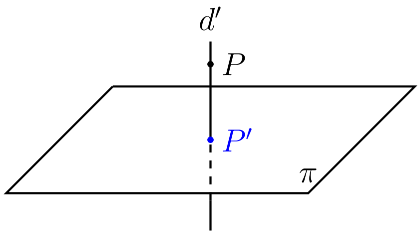



FIG. 5.13 – Projection d'un point sur un plan

Dans un repère orthonormé, si le plan $\pi$ admet pour équation cartésienne $ax + by + cz + \delta = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et si le point $P$ a pour coordonnées $(x_P, y_P, z_P)$, des équations cartésiennes de la droite $d'$ perpendiculaire au plan $\pi$ passant par le point $P$ sont

$$\frac{x - x_P}{a} = \frac{y - y_P}{b} = \frac{z - z_P}{c}.$$

Ainsi, les coordonnées de la projection orthogonale $P'$ du point $P$ sur le plan $\pi$ s'obtiennent en résolvant le système suivant

$$\begin{cases} ax + by + cz + \delta = 0 \\ \dfrac{x - x_P}{a} = \dfrac{y - y_P}{b} \\ \dfrac{y - y_P}{b} = \dfrac{z - z_P}{c}. \end{cases}$$

### 5.9.2 Projection orthogonale d'un point sur une droite

On définit la projection orthogonale du point $P$ sur la droite $d$ par le point $P'$ de la droite $d$ résultant de l'intersection de cette dernière et du plan $\pi$ perpendiculaire à la droite $d$ passant par le point $P$ (figure 5.14).

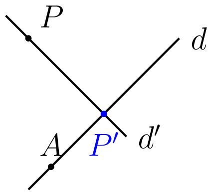



FIG. 5.14 – Projection orthogonale d'un point sur une droite

Dans un repère orthonormé, si la droite $d$, passant par le point $A$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, admet pour équation cartésienne

$$\frac{x-x_A}{u_1}=\frac{y-y_A}{u_2}=\frac{z-z_A}{u_3},\qquad (u_1,u_2,u_3)\neq(0,0,0),$$

une équation cartésienne du plan $\pi$ perpendiculaire à la droite $d$ passant par le point $P$ est

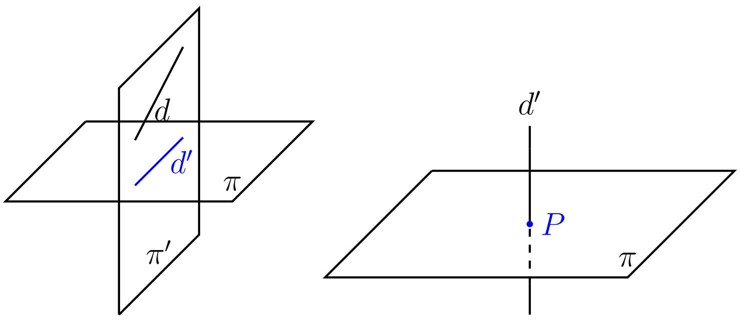
$$u_1x+u_2y+u_3z-(u_1x_P+u_2y_P+u_3z_P)=0.$$

Ainsi, les coordonnées de la projection orthogonale $P'$ du point $P$ sur le plan $\pi$ s'obtiennent en résolvant le système suivant

$$\begin{cases} u_1x+u_2y+u_3z-(u_1x_P+u_2y_P+u_3z_P)=0\\ \dfrac{x-x_A}{u_1}=\dfrac{y-y_A}{u_1}\\ \dfrac{y-y_A}{u_2}=\dfrac{z-z_A}{u_3}. \end{cases}$$

### 5.9.3 Projection orthogonale d'une droite sur un plan

Si la droite $d$ n'est pas perpendiculaire au plan $\pi$, on définit la projection orthogonale de la droite $d$ sur le plan $\pi$ par la droite $d'$ du plan $\pi$ résultant de l'intersection de ce dernier et du plan $\pi'$ perpendiculaire au plan $\pi$ contenant la droite $d$.




(a) (b)

FIG. 5.15 – Projection orthogonale d'une droite sur un plan

Dans ce cas, il suffit de considérer deux points distincts $A$ et $B$ de la droite $d$ et de rechercher les projections orthogonales $A'$ et $B'$ de ces deux points sur le plan $\pi$ par la méthode citée ci-dessus. Ensuite, il s'agit de construire la droite $d'$ définie par les points $A'$ et $B'$.

Si la droite $d$ est perpendiculaire au plan $\pi$, la projection orthogonale de la droite $d$ sur le plan $\pi$ est le point de percée $P$ de la droite dans le plan.

# 5.10 Perpendiculaire commune à deux droites

## 5.10.1 Perpendiculaire commune à deux droites parallèles

Soient deux droites parallèles $d$ et $d'$.

La recherche de la perpendiculaire commune aux droites parallèles consiste à trouver la perpendiculaire à l'une de ces droites passant par un point de la seconde droite. Il existe une infinité de droites perpendiculaires à deux droites parallèles (figure 5.16). Cependant, par un point de l'espace, deux cas se présentent : soit on ne peut mener qu'une et une seule perpendiculaire aux deux droites parallèles, soit on ne peut mener aucune perpendiculaire.

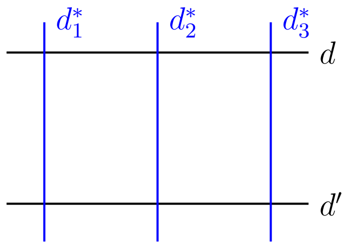



FIG. 5.16 – Perpendiculaire commune à deux droites parallèles

## 5.10.2 Perpendiculaire commune à deux droites sécantes

Soient deux droites sécantes $d$ et $d'$.

La perpendiculaire commune $d^*$ aux droites $d$ et $d'$ est la droite passant par leur point d'intersection et orthogonale au plan défini par ces deux droites (figure 5.17).

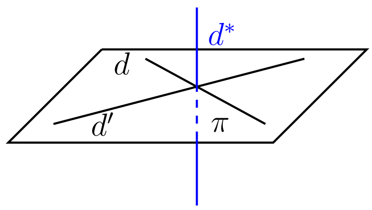



FIG. 5.17 – Perpendiculaire commune à deux droites sécantes

On peut prouver l'existence et l'unicité de cette perpendiculaire commune.

## 5.10.3 Perpendiculaire commune à deux droites gauches

Deux droites $d$ et $d'$ sont dites gauches si elles ne sont pas parallèles et n'ont aucun point commun. Il revient au même de dire que $d$ et $d'$ sont gauches si elles n'appartiennent pas à un même plan.

La proposition suivante permet de montrer l'existence et l'unicité de la perpendiculaire commune. Si $d$ et $d'$ sont deux droites gauches, alors il existe une et une seule droite $d^*$ qui a les propriétés suivantes

- $d$ et $d^*$ sont orthogonales,
- $d'$ et $d^*$ sont orthogonales,

- $d \cap d^* =$ un point, $d' \cap d^* =$ un point.

La droite $d^*$ est appelée la perpendiculaire commune aux droites $d$ et $d'$ (figure 5.18).

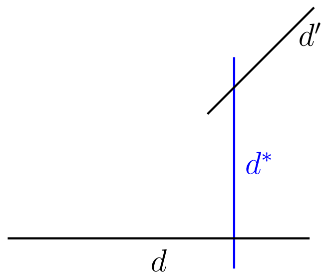



FIG. 5.18 – Perpendiculaire commune à deux droites gauches

La recherche de la perpendiculaire commune à deux droites gauches $d$ et $d'$ est réalisée en deux étapes : la première consiste à déterminer la direction (vecteur directeur) de cette perpendiculaire alors que la seconde consiste à rechercher l'équation cartésienne à proprement parler.

Première étape : recherche de la direction de la perpendiculaire.

Dans un premier temps, on recherche des vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ aux plans $\pi$ et $\pi'$ respectivement perpendiculaires aux droites $d$ et $d'$.

Ensuite, on recherche la direction de l'intersection de ces deux plans (vérifier au préalable que l'intersection est non vide). Si, dans un repère orthonormé, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont respectivement $(a, b, c)$ et $(a', b', c')$, la direction de la perpendiculaire commune est

$$\left( \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right).$$

Ainsi, la droite dont la direction est donnée ci-dessus est bien perpendiculaire à chacune des droites puisque si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan (les plans $\pi$ et $\pi'$ étant respectivement perpendiculaires aux droites $d$ et $d'$). De plus, l'intersection des plans $\pi$ et $\pi'$ est une droite orthogonale aux droites $d$ et $d'$.

Deuxième étape : recherche de l'équation cartésienne de la perpendiculaire.

La perpendiculaire commune $d^*$ est l'intersection des deux plans suivants
- le plan $\pi^*$ contenant la droite $d$ et la direction de la droite trouvée précédemment,
- le plan $\pi^{*\prime}$ contenant la droite $d'$ et la direction de la droite trouvée précédemment.

## 5.11 Distances

Pour clarifier les notions, sous sa forme mathématique, la distance entre deux ensembles[2] non vides $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de l'espace est définie par

$$\text{dist}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = \inf \left\{ ||\overrightarrow{PP'}|| : P \in \mathcal{E}, P' \in \mathcal{E}' \right\}.$$

[2]On se limitera, dans cette étude, aux points, droites et plans.

En d'autres termes, la distance entre deux ensembles non vides est la plus courte des longueurs des segments joignant un point de chaque ensemble (figure 5.19).

Cette définition permet de montrer que si les deux ensembles ont une intersection non vide, alors la distance entre ces deux ensembles est nulle.

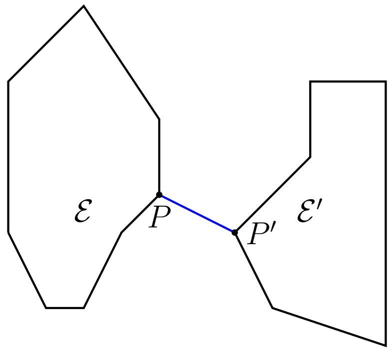



FIG. 5.19 – Distance entre deux ensembles non vides

### 5.11.1 Distance entre deux points

**Définition**

Soient $A$ et $B$ deux points de l'espace. Ladistance entre ces deux points est la longueur du segment d'extrémités $A$ et $B$

$$\text{dist}(A, B) = |AB|.$$

**Propriété**

Dans un repère orthonormé, la distance entre les points $A$ et $B$ est donnée par

$$\text{dist}(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

### 5.11.2 Distance entre un point et un plan

**Définition**

Soient un point $A$ de l'espace et $\pi$ un plan. La distance entre le point $A$ et le plan $\pi$ est la longueur du segment qui a pour extrémités le point $A$ et la projection orthogonale $A'$ du point $A$ sur le plan $\pi$

$$\text{dist}(A, \pi) = \text{dist}(A, A').$$

**Propriété**

Dans un repère orthonormé, si le plan $\pi$ a pour équation $ax + by + cz + \delta = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors la distance entre le point $A$ et le plan $\pi$ est donnée par

$$\text{dist}(A, \pi) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + \delta|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

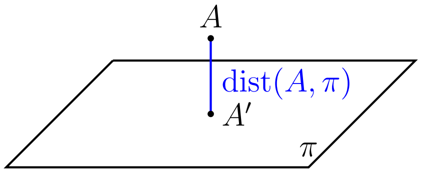



FIG. 5.20 – Distance entre un point et un plan

### 5.11.3 Distance entre un point et une droite

#### Définition

Soient un point $A$ de l'espace et $d$ une droite. La distance entre le point $A$ et la droite $d$ est la longueur du segment dont les extrémités sont le point $A$ et la projection orthogonale $A'$ de ce point sur la droite $d$

$$\mathrm{dist}(A, d) = |AA'|.$$

#### Propriété

Dans un repère orthonormé, la distance entre le point $A$ et la droite $d$ est donnée par

$$\mathrm{dist}(A, d) = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}\right)^2}$$

où $B$ est un point quelconque de $d$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $d$ tel que $||\overrightarrow{u}|| = 1$.

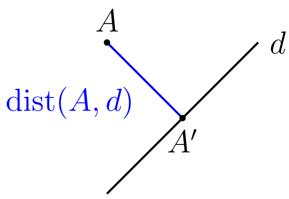



FIG. 5.21 – Distance entre un point et une droite

Si la droite $d$ est définie par un de ses points $P$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, la distance entre un point quelconque $A$ de l'espace (mais n'appartenant pas à la droite $d$) et la droite $d$ est donnée par

$$\mathrm{dist}(A, d) = \frac{||\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{u}||}{||\overrightarrow{u}||}.$$

### 5.11.4 Distance entre deux droites parallèles

Soient $d$ et $d'$ deux droites.

Si les droites sont parallèles confondues, leur distance est nulle. Si elles ne sont pas confondues (figure 5.22), la distance entre elles s'obtient facilement en calculant la distance entre un point quelconque $A$ de l'une des droites et l'autre droite

$$\mathrm{dist}(d, d') = \mathrm{dist}(A, d')$$

On se ramène donc au cas de la distance entre un point et une droite.

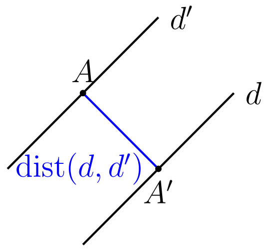



FIG. 5.22 – Distance entre deux droites parallèles

### 5.11.5 Distance entre deux droites sécantes

La distance entre deux droites sécantes est, par définition, nulle.

### 5.11.6 Distance entre deux droites gauches

La distance entre deux droites gauches nécessite de connaître au préalable la perpendiculaire commune à ces droites gauches (figure 5.23). Si on note $A$ et $A'$ respectivement les points d'intersection de la perpendiculaire commune et de $d$ et $d'$, la distance entre les droites gauches se réduit au calcul de la distance entre deux points

$$\operatorname{dist}(d, d') = \operatorname{dist}(A, A').$$

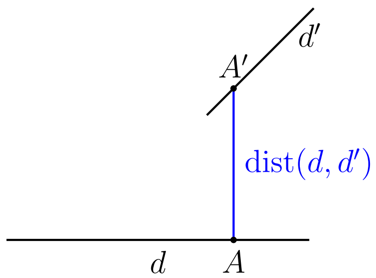



FIG. 5.23 – Distance entre deux droites gauches

Une formule pratique du calcul de la distance entre deux droites gauche est

$$\operatorname{dist}(d, d') = \frac{||\overrightarrow{PP'} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'})||}{||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}||}$$

où $P$ et $P'$ sont respectivement des points quelconques de $d$ et $d'$, et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont respectivement des vecteurs directeurs de $d$ et $d'$.

### 5.11.7 Distance entre une droite et un plan

Si la droite et le plan ne sont pas parallèles, ils ont un point commun et la distance est donc nulle.

Si la droite est parallèle au plan, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans les cas précédents, on montre que la distance entre la droite et le plan est égale à la distance entre un point quelconque de la droite et le plan. On est donc ramené au cas du calcul de la distance entre un point et un plan

$$\mathrm{dist}(d, \pi) = \mathrm{dist}(A, \pi).$$

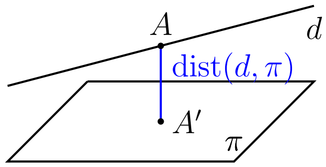



Fig. 5.24 – Distance entre une droite et un plan

### 5.11.8 Distance entre deux plans

Si les plans sont parallèles, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans les cas précédents, on montre que la distance entre ceux-ci est égale à la distance entre un point quelconque de l'un d'eux et de l'autre plan (figure 5.25). On est donc ramené au cas du calcul de la distance entre un point et un plan

$$\mathrm{dist}(\pi, \pi') = \mathrm{dist}(A', \pi).$$

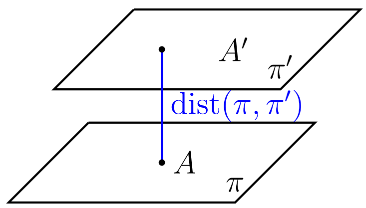



Fig. 5.25 – Parallélisme de deux plans

Si les plans ne sont pas parallèles, ils ont une intersection non vide. La distance entre les plans est donc nulle.

## 5.12 Angles

La mesure de l'angle non orienté entre deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ est le réel $\theta$ appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$ tel que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u'} = ||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{u'}|| \cos\theta.$$

### 5.12.1 Angle entre deux droites

Soient $d$ et $d'$ deux droites de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ respectivement.

L'angle entre ces deux droites est, par définition, le plus petit des angles $\theta$ et $\pi - \theta$ de sorte qu'il appartienne toujours à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

### 5.12.2 Angle entre deux plans

Soient $\pi$ et $\pi'$ deux plans de vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ respectivement.

Si on note $d$ une droite orthogonale à $\pi$ et $d'$ une droite orthogonale à $\pi'$, l'angle entre les plans $\pi$ et $\pi'$ est l'angle entre les droites $d$ et $d'$. Il s'agit donc d'un réel de l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Pratiquement, le calcul de l'angle entre les plans $\pi$ et $\pi'$ peut se faire à partir des vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ des plans.

### 5.12.3 Angle entre une droite et un plan

Soient $d$ et $\pi$ respectivement une droite et un plan.

Si $d'$ désigne une normale au plan $\pi$, la mesure de l'angle entre la droite $d$ et le plan $\pi$ est $\frac{\pi}{2}$ moins l'angle entre $d$ et $d'$. Il s'agit donc d'un réel de l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

En d'autres termes, la mesure de l'angle entre une droite et un plan est la mesure l'angle aigu formé par cette droite et sa projection orthogonale sur le plan. Il s'agit donc du complémentaire de l'angle formé par un vecteur normal au plan et un vecteur directeur de la droite.

## 5.13 Applications

### 5.13.1 Faisceau de plans, distance d'un point à un plan

Dans un espace euclidien à trois dimensions muni d'un repère, on considère la droite $d$ passant par le point $A$ de coordonnées $(-1, 0, 0)$ et de vecteur directeur ayant $(-1, -1, 1)$ pour composantes. Déterminer le(s) plan(s) éventuel(s) contenant $d$ et dont la distance à l'origine vaut 1.

Solution

Des équations cartésiennes de la droite $d$, de vecteur directeur $(-1, -1, 1)$ et passant par le point $(-1, 0, 0)$, s'écrivent

$$\frac{x+1}{-1} = -y = z.$$

Sous forme de l'intersection de deux plans, les équations précédentes de la droite $d$ s'écrivent aussi de la façon suivante

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0. \end{cases}$$

L'équation du faisceau de plans contenant la droite $d$ est donc de la forme

$$k(x - y + 1) + k'(x + z + 1) = 0$$

avec $(k, k') \neq (0, 0)$ ou encore

$$(k + k')x - ky + k'z + (k + k') = 0.$$

Un vecteur normal à un tel plan a donc comme composantes $(k + k', -k, k')$ et donc la distance de ce plan à l'origine est égale à

$$\frac{|(k + k')0 - k0 + k'0 + (k + k')|}{\sqrt{(k + k')^2 + k^2 + k'^2}}.$$

Cette distance est égale à 1 si et seulement si $(k + k')^2 + k^2 + k'^2 = (k + k')^2$ soit $k^2 + k'^2 = 0$. Cette relation n'est vérifiée que lorsque $(k, k') = (0, 0)$, ce qui est impossible. Aucun plan ne répond donc à la question.

Alternative

Une autre solution est basée sur la traduction à proprement parler de l'énoncé sans faire intervenir la notion de faisceau de plans.

Soit $\pi$ le plan que l'on recherche d'équation cartésienne $ax + by + cz + \delta = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Puisque la droite $d$ est incluse dans le plan $\pi$, un vecteur directeur de la droite $d$ et un vecteur normal du plan $\pi$ sont orthogonaux

$$-a - b + c = 0.$$

La droite $d$ passe par le point $A$ de coordonnées $(-1, 0, 0)$. Ainsi, ce point est également un point du plan $\pi$ et ses coordonnées doivent vérifier l'équation du plan

$$-a + \delta = 0.$$

La distance entre le plan $\pi$ et l'origine

$$\frac{|\delta|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

est égale à 1 si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = \delta^2$.

Puisque $a = \delta$, la dernière relation se réduit à $b^2 + c^2 = 0$ qui sera vérifiée si et seulement si $(b, c) = (0, 0)$. Dans ce cas, on en déduit que $a$ est également nul contredisant ainsi la condition $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Par conséquent, aucun plan ne répond à la question.

### 5.13.2 Equations de plans et de droites, distances, angles

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On donne les systèmes et équations suivants

$$(a) : \left\{ \begin{array}{r} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{array} \right. , \ (b) : \frac{7x - 15}{2} = \frac{7y + 34}{-5} = z, \ (c) : y - z = 1.$$

1. Dans chacun des cas ($a$), ($b$) et ($c$) le système représente-t-il une droite, un plan, un point, l'ensemble vide, l'espace ? Justifier. Dans chaque cas non vide, déterminer des équations paramétriques de l'ensemble représenté.
2. Déterminer la distance entre les ensembles donnés par ($a$) et ($b$), ainsi que celle entre les ensembles donnés par ($a$) et ($c$).
3. Calculer l'angle entre les ensembles donnés par ($a$) et ($b$), ainsi que celui entre les ensembles donnés par ($a$) et ($c$).
4. Si elle existe, déterminer des équations cartésiennes de la droite orthogonale à l'ensemble ($c$) et qui intersecte ($a$) et ($b$).
5. Si elle existe, déterminer des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à ($a$) et ($b$).
6. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point de coordonnées $(0, 0, 1)$ et orthogonal à ($a$).

Solution

1. Le système ($a$) représente une droite puisque les deux plans

$$x + 2y - z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x + y + 1 = 0$$

sont sécants. En effet, les vecteurs normaux de ces plans qui ont pour composantes $(1, 2, -1)$ et $(1, 1, 0)$ ne sont pas parallèles. Les composantes d'un vecteur directeur de cette droite sont données par

$$\left( \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, -1).$$

De plus, un point de cette droite a pour coordonnées $(-1, 0, -2)$. Par conséquent, des équations cartésiennes de la droite sont

$$\begin{cases} x = -1 - k \\ y = k \\ z = -2 + k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

Le système ($b$) est une droite. Pour trouver des équations paramétriques, il suffit de poser chaque membre égal à $k$ ($k \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} \dfrac{7x - 15}{2} = k \\ \dfrac{7y + 34}{-5} = k \\ z = k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

Ainsi, des équations paramétriques de la droite sont, en ayant posé $t = 7k$,

$$\begin{cases} x = \dfrac{15}{7} + 2t \\ y = \dfrac{-34}{7} - 5t \\ z = 7t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Le système $(c)$ est indépendant de la variable $x$. Il s'agit d'un plan d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = k \\ y = 1 + m \\ z = m \end{cases} \qquad (k,\ m \in \mathbb{R}).$$

2. Les droites $(a)$ et $(b)$ sont perpendiculaires car le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul et elles s'intersectent au point de coordonnées $(1, -2, -4)$. La distance entre deux droites sécantes est nulle.

   La droite $(a)$ et le plan $(c)$ sont parallèles car le produit scalaire d'un vecteur directeur de la droite et d'un vecteur normal au plan est nul. La distance entre ces deux éléments de l'espace est donc la même que celle entre un point de la droite et le plan. Le point $(-1, 0, -2)$ appartient à la droite et la distance vaut

$$\frac{|2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. L'angle $\theta$ entre les droites $(a)$ et $(b)$ se déduit de

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = ||\overrightarrow{a}||||\overrightarrow{b}|| \cos\theta$$

   où $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ désignent des vecteurs directeurs des droites $(a)$ et $(b)$.

   Puisque $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 1.2 + 5.1 - 7.1 = 0$ et que les normes des vecteurs directeurs ne sont pas nulles, on en déduit que l'angle $\theta$ entre les deux droites est de 90°. Ceci pouvait être déduit du point 2.

   L'angle entre la droite $(a)$ et le plan $(c)$ est égal à 90° diminué de l'angle entre la droite $(a)$ et une droite perpendiculaire au plan $(c)$.
   L'angle $\theta$ entre a droite $(a)$ et une droite perpendiculaire au plan $(c)$ se déduit de

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = ||\overrightarrow{a}||||\overrightarrow{c}|| \cos\theta$$

   où $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ désignent respectivement un vecteur directeur de la droite $(a)$ et un vecteur normal au plan $(c)$.

   Ainsi, puisque $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = 1.0 - 1.1 + 1.1 = 0$ et que les normes des vecteurs directeurs ne sont pas nulles, on en déduit que l'angle $\theta$ entre les deux droites est de 90°. Par conséquent, l'angle entre la droite $(a)$ et le plan $(c)$ est nul. Ceci pouvait être également déduit du point 2.

4. Puisque les droites $(a)$ et $(b)$ sont sécantes au point de coordonnées $(1, -2, -4)$, la droite orthogonale au plan $(c)$ passant par ce point. Puisqu'un vecteur directeur de la droite recherchée est donnée par un vecteur normal au plan $(c)$, on en déduit rapidement ses équations cartésiennes

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+4}{-1}$$

   ou encore

$$\begin{cases} x = 1 \\ y + z + 6 = 0. \end{cases}$$

5. Les droites $(a)$ et $(b)$ étant perpendiculaires, la perpendiculaire commune à ces deux droites est la droite perpendiculaire au plan formé par les droites $(a)$ et $(b)$ passant par leur point d'intersection.

   L'équation cartésienne du plan contenant les droites $(a)$ et $(b)$ est

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y+2 & -1 & -5 \\ z+4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

   soit

$$-12x - 9y - 3z - 18 = 0.$$

   Un vecteur normal de ce plan a pour composantes $(4, 3, 1)$. Par conséquent, un vecteur directeur de la droite perpendiculaire au plan a les mêmes composantes. Les équations cartésiennes de la droite recherchée sont

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = z+4$$

   ou encore

$$\begin{cases} x - 4z - 17 = 0 \\ y - 3z - 10 = 0. \end{cases}$$

6. Le plan recherché a un vecteur normal de mêmes composantes qu'un vecteur directeur de $(a)$ : $(1, -1, -1)$. Ainsi, l'équation du plan est

$$x - y - z + \delta = 0.$$

   Puisque le point de coordonnées $(0, 0, 1)$ appartient au plan recherché, une équation cartésienne de ce plan est alors

$$x - y - z + 1 = 0.$$

### 5.13.3 Perpendiculaire commune à deux droites

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $Oxyz$.

1. Démontrer qu'il existe une droite $d$ passant par l'origine et telle que les plans d'équations

$$(2r^2 + 6r - 2)x - (r^2 - 1)y - 2rz + r^2 + 1 = 0, \qquad r \in \mathbb{R}$$

   soient tous parallèles à $d$.

2. Déterminer la perpendiculaire commune à $d$ et à la droite $d'$ d'équation

$$\begin{cases} x = y \\ z = 1. \end{cases}$$

Solution

1. Puisque la droite $d$ est parallèle à la famille de plans, un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal de ces plans. Ainsi, le produit scalaire de ces vecteurs est nul. Si on appelle $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la droite $d$ ayant pour composantes $(u_1, u_2, u_3)$ dans ce repère, on obtient la relation

$$(2r^2 + 6r - 2)u_1 - (r^2 - 1)u_2 - 2ru_3 = 0, \qquad r \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$\underbrace{(2u_1 - u_2)}_{a} r^2 + \underbrace{(6u_1 - 2u_3)}_{b} r + \underbrace{(-2u_1 + u_2)}_{c} = 0, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

La seule façon d'annuler cette équation du second degré en la variable $r$ quelque soit $r \in \mathbb{R}$ est d'annuler simultanément les coefficients $a$, $b$ et $c$

$$\left\{ \begin{array}{r} 2u_1 - u_2 = 0 \\ 6u_1 - 2u_3 = 0 \\ -2u_1 + u_2 = 0 \end{array} \right.$$

ce qui amène à $(u_1, u_2, u_3) = (t, 2t, 3t)$, $t \in \mathbb{R}$ ou encore, plus simplement $(u_1, u_2, u_3) = (1, 2, 3)$.

Des équations cartésiennes de la droite $d$ recherchée sont donc

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

2. Un vecteur directeur de la droite $d'$ est

$$\left( \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1, -1, 0).$$

Les droites $d$ et $d'$ sont gauches. En effet, leurs vecteurs directeurs ne sont pas pas multiples l'un de l'autre, par conséquent, les droites $d$ et $d'$ ne sont pas parallèles. De plus, elles n'ont pas d'intersection.

L'exercice consiste à rechercher la perpendiculaire commune à deux droites gauches. La recherche se fait en deux parties : recherche de la direction de la perpendiculaire puis recherche des équations cartésiennes.

Première étape : recherche de la direction de la perpendiculaire

Un vecteur normal d'un plan perpendiculaire à la droite $d$ a pour composantes $(1, 2, 3)$ et celui d'un plan perpendiculaire à la droite $d'$ a pour composantes $(1, 1, 0)$.

La direction de l'intersection de ces deux plans a pour composantes

$$\left( \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-3, 3, -1).$$

Deuxième étape : recherche de l'équation cartésienne de la perpendiculaire.

La perpendiculaire commune $d^*$ est l'intersection des deux plans suivants

- le plan $\pi^*$ contenant la droite $d$ et la direction de la droite trouvée précédemment,

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -3 \\ y & 2 & 3 \\ z & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$-11x - 8y + 9z = 0.$$

- le plan $\pi^{*\prime}$ contenant la droite $d'$ et la direction de la droite trouvée précédemment.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -3 \\ y & 1 & 3 \\ z & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$-x + y + 6z - 6 = 0.$$

Ainsi, des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune aux droites $d$ et $d'$ sont

$$\left\{ \begin{array}{r} -11x - 8y + 9z = 0 \\ -x + y + 6z - 6 = 0. \end{array} \right.$$

### 5.13.4 Eléménts communs à une famille de plans

Dans un espace euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, on considère les plans d'équation

$$(\lambda + \mu)x + \mu y - \lambda z = \lambda^2 + \mu^2, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Montrer qu'ils sont tous perpendiculaires à un même plan passant par l'origine.

Solution

Soit $\pi$ le plan recherché. Puisqu'il contient l'origine du repère, son équation cartésienne est du type

$$ax + by + cz = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

La famille de plans est perpendiculaire à $\pi$ si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux. Dans ce repère, les vecteurs normaux de la famille de plans et du plan $\pi$ ont respectivement pour composantes $(\lambda + \mu, \mu, -\lambda)$ et $(a, b, c)$ avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Ainsi,

$$(\lambda + \mu)a + \mu b - \lambda c = 0$$

ou encore

$$(a - c)\lambda + (a + b)\mu = 0.$$

La relation précédente est vraie quelques soient les réels $\lambda$ et $\mu$ non simultanément nuls si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} a - c = 0 \\ a + b = 0. \end{array} \right.$$

Ainsi, un vecteur normal du plan $\pi$ a pour composantes $(t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Une équation cartésienne du plan $\pi$ recherché est

$$x - y + z = 0.$$

### 5.13.5 Lieu dans l'espace

On considère deux droites $d$ et $d'$ de l'espace qui ne sont pas parallèles. Soient $M$ un point de la droite $d$ et $N$ un point de la droite $d'$. Quel est le lieu du milieu des segments $[M, N]$ lorsque ces points varient ?

Solution

Dans l'espace, une droite peut être définie par un point et un vecteur directeur. Si on considère que la droite $d$ est définie par le point $A$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, des équations paramétriques de cette droite sont

$$\begin{cases} x = x_A + ru_1 \\ y = y_A + ru_2 \qquad r \in \mathbb{R} \\ z = z_A + ru_3 \end{cases} \tag{†}$$

De la même façon, si la droite $d'$ est définie par le point $B$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{v}$, des équations paramétriques de cette droite sont

$$\begin{cases} x = x_B + sv_1 \\ y = y_B + sv_2 \qquad s \in \mathbb{R} \\ z = z_B + sv_3 \end{cases} \tag{‡}$$

Puisque les droites ne peuvent être parallèles, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

Les points $M$ et $N$ appartiennent respectivement aux droites $d$ et $d'$. Ainsi, les coordonnées du point $M$ vérifient le système (†) et celles du point $N$ vérifient le système (‡).

Le milieu du segment $[M, N]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_M + x_N}{2}, \frac{y_M + y_N}{2}, \frac{z_M + z_N}{2}\right)$$

soit

$$\left(\frac{x_A + x_B + ru_1 + sv_1}{2}, \frac{y_A + y_B + ru_2 + sv_2}{2}, \frac{z_A + z_B + ru_3 + sv_3}{2}\right).$$

Ainsi, un point $P$ de coordonnées $(x, y, z)$ appartient au lieu recherché si et seulement s'il existe des réels $r'$ et $s'$ tels que

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} + r'u_1 + s'v_1 \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} + r'u_2 + s'v_2 \\ z = \dfrac{z_A + z_B}{2} + r'u_3 + s'v_3 \end{cases} \tag{$\diamond$}$$

Le lieu recherché est donc le plan dont deux vecteurs directeurs sont les vecteurs directeurs des droites $d$ et $d'$ et passant par le milieu du segment $[A, B]$.

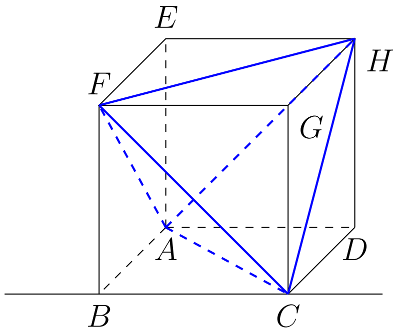
### 5.13.6 Angles dans un tétraèdre

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

1. Montrer que $ACFH$ est un tétraèdre régulier.
2. Calculer l'angle entre deux faces d'un tétraèdre régulier.
3. Dans une molécule de méthane $CH_4$, calculer l'angle $HCH$, où $C$ est l'atome de carbone et les deux $H$ sont deux atomes d'hydrogène différents.

Rappel : un tétraèdre régulier a ses arêtes de même longueur et ses arêtes opposées deux à deux orthogonales.

Solution




1. Les arêtes du tétraèdre $ACFH$ sont les diagonales des faces du cube. De cette façon, puisque les faces sont des carrés de même côté, le tétraèdre est régulier (on montre aussi que les arêtes sont deux à deux opposées).

2. On considère le repère orthonormé dont l'origine est le point $A$ et dont les points $B$, $D$ et $E$ ont respectivement pour coordonnées $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

   Dans ce repère, les coordonnées des sommets du tétraèdre sont

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   L'angle entre deux faces est, par exemple, l'angle $\theta$ entre les plans $ACF$ et $AFH$. Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ désignent respectivement un vecteur normal au plan $ACF$ et au plan $AFH$, l'angle entre ces deux plans est l'angle dont le cosinus vérifie

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

   On montre facilement qu'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan $ACF$ a pour composantes $(1, -1, -1)$ et qu'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan $ACF$ a pour composantes $(-1, -1, 1)$.

Ainsi,

$$\cos\theta = \frac{1}{3}.$$

L'angle recherché est donc arccos(1/3) (compris entre $[0, \pi/2]$).

3. Dans une molécule de méthane, l'atome de carbone est au centre d'un tétraèdre dont les sommets sont les atomes d'hydrogène.

   On appelle $O$ le centre du tétraèdre. Ses coordonnées sont la moyenne des coordonnées des points $A, C, F$ et $H$ (par définition du centre de gravité d'un ensemble de points). Ainsi, les coordonnées du point $O$ sont

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

   L'angle $\theta$ recherché est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ dont

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OC}\|} = -\frac{1}{3}.$$

   soit

$$\theta = 109.5°.$$

### 5.13.7 Sphère

Déterminer l'équation de la sphère contenant les cercles d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 2. \end{cases}$$

<u>Solution</u>

L'équation d'une sphère dans un repère orthonormé est du genre

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

où $(a, b, c)$ sont les coordonnées du centre de la sphère et $r$ est le rayon.

Puisque les cercles appartiennent à la sphère, leurs points doivent aussi vérifier l'équation de la sphère.

On considère le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 9$ dans le plan $z = 0$. Les points $(3, 0, 0)$ et $(-3, 0, 0)$ appartiennent à ce cercle puisque leurs coordonnées vérifient son équation. De plus, puisqu'ils appartiennent à la sphère, ils doivent vérifier l'équation de cette dernière, soit

$$(3-a)^2 + b^2 + c^2 = r^2 \quad \text{et} \quad (-3-a)^2 + b^2 + c^2 = r^2.$$

En soustrayant les équations membre à membre, on obtient

$$(3-a)^2 = (-3-a)^2$$

ce qui donne

$$3 - a = -3 - a \quad \text{ou} \quad 3 - a = 3 + a$$

ou encore

$$a = 0.$$

En considérant les points $(0, 3, 0)$ et $(0, -3, 0)$ appartenant au cercle et devant vérifier l'équation de la sphère, on trouve $b = 0$.

Ainsi, une équation cartésienne de la sphère recherchée est

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r^2$$

ou encore, puisque un des cercles a pour équation $x^2 + y^2 = 9$ et $z = 0$,

$$c^2 + 9 = r^2. \tag{$*$}$$

On note ainsi que, par un seul cercle, passe une infinité de sphères.

Si on considère le second cercle, on note, puisqu'il appartient également à la sphère, que l'on doit avoir

$$15 + (2 - c)^2 = r^2 \tag{$\star$}$$

En soustrayant les relations $(*)$ et $(\star)$, on arrive à $c = 5$ et on en déduit que $r = \sqrt{34}$. Par conséquent, une équation de la sphère est

$$x^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 34^2.$$

### 5.13.8 Droites faisant un angle fixé avec les axes

Déterminer les droites $d$ de l'espace faisant un angle de 60° avec l'axe $x$ et 45° avec l'axe $y$.

Solution

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Soient $(a, b, c)$ les composantes d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite $d$ recherchée. On suppose que le vecteur est normé. De cette façon,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \tag{$\clubsuit$}$$

La droite $d$ fait un angle de 60° avec l'axe $x$ et 45° avec l'axe $y$. On exprime ces deux conditions par

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i}}{\|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{i}\|} = |a|$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{j}}{\|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{j}\|} = |b|.$$

On arrive alors à

$$a = \pm\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En reprenant la relation (♣), on en déduit les valeurs de $c$, soit $c = \pm\frac{1}{2}$.

On obtient alors quatre droites dont des vecteurs directeurs normés sont

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

### 5.13.9 Sphère, centre et diamètre

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la sphère $\mathcal{S}$ d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y - 2z = \frac{15}{4}.$$

1. Déterminer le rayon et le centre de la sphère $\mathcal{S}$.
2. Donner les équations de la droite $d$ passant par le centre de la sphère $\mathcal{S}$ et perpendiculaire au plan $\pi$ d'équation $x + 2y = 2z = 2$.
3. Déterminer les extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan $\pi$.

Solution

1. L'équation réduite d'une sphère de centre $(a, b, c)$ et de rayon $r$ est

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

ou, sous sa forme développée

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = r^2.$$

En identifiant les coefficients analogues, on arrive à : $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$. Le centre de la sphère $\mathcal{S}$ a donc pour composantes $\left(2, \frac{1}{2}, 1\right)$. Le rayon $r$ se déduit de

$$r^2 = \frac{15}{4} + a^2 + b^2 + c^2 = \frac{15}{4} + 4 + \frac{1}{4} + 1 = 9,$$

soit $r = 3$.

2. La droite $d$ recherchée étant perpendiculaire au plan $\pi$, un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite $d$ peut être un vecteur normal du plan $\pi$ et a pour composantes

$$\overrightarrow{u} = (1, 2, 2).$$

Puisque la droite $d$ passe par le point de coordonnées $\left(2, \frac{1}{2}, 1\right)$, des équations cartésiennes de cette droite sont

$$x - 2 = \frac{y - \frac{1}{2}}{2} = \frac{z - 1}{2}.$$

3. Les extrémités du diamètre de la sphère $\mathcal{S}$ perpendiculaire au plan $\pi$ sont les points d'intersection de la droite $d$ et de la sphère $\mathcal{S}$. Une façon simple de procéder est de partir des équations paramétriques de la droite $d$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 + r \\ y = \dfrac{1}{2} + 2r \\ z = 1 + 2r \end{array}\right. \qquad r \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, en remplaçant $x$, $y$ et $z$ de l'équation de la sphère $\mathcal{S}$ par celles données ci-haut, on arrive à

$$r^2 + 4r^2 + 4r^2 = 9,$$

soit

$$r^2 = 1.$$

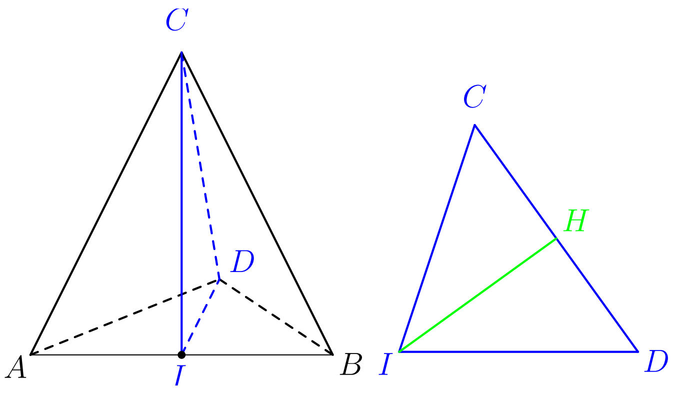
Les coordonnées du diamètre recherché sont $\left(3, \dfrac{5}{2}, 3\right)$ et $\left(1, -\dfrac{3}{2}, -1\right)$.

### 5.13.10 Angles, tétraèdre

Déterminer les différents angles d'un tétraèdre régulier (entre deux faces, entre deux arêtes et entre une arête et une face).

<u>Solution</u>

Les faces d'un tétraèdre régulier sont des triangles équilatéraux. Par conséquent, les triangles $ABC$, $ABD$, $CDA$ et $CDB$ sont équilatéraux. Ainsi la mesure de l'angle entre deux arêtes est 60°.




(a) (b)

Un angle entre une arête et une face est, par exemple, l'angle $\widehat{CDI}$.

Soit $a$ la longueur d'une arête du tétraèdre $ABCD$. Les longueurs des segments $[C, I]$

et $[I, D]$ valent $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\widehat{CDI} &= \arccos\left(\frac{HD}{DI}\right) = \arccos\left(\frac{a/2}{a\sqrt{3}/2}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54.7°.
\end{aligned}$$

Un angle entre deux faces est, par exemple, l'angle $\widehat{CID}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\widehat{CID} &= \pi - 2\widehat{CDI} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 70.5°.
\end{aligned}$$

## 5.14 Exercices proposés

### 5.14.1 Eléments communs à une droite

On se place dans un repère euclidien orthonormé de dimension 3.

1. Quelles sont les coordonnées du pied $Q$ de la perpendiculaire abaissée du point $P(\alpha, \alpha+1, \alpha-1)$ sur le plan $\pi$ d'équation $2x + \alpha y + \alpha z + \alpha^3 + 4 = 0$ ?
2. Montrer que ces pieds, lorsque $\alpha$ parcourt $\mathbb{R}$, sont tous situés sur une même droite $d$, dont on déterminera des équations.

### 5.14.2 Lieu géométrique dans l'espace, conditions sur des paramètres

Pour tous réels $a, b, c$ non simultanément nuls, on considère le plan

$$\pi_{abc} \equiv ax + by + cz = 1.$$

1. Déterminer les conditions sur $a,\ b,\ c$ pour que la distance de $\pi_{abc}$ à l'origine soit égale à 1.
2. Déterminer les conditions sur $a,\ b,\ c$ pour que $\pi_{abc}$ soit parallèle à la droite

$$d \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& y \\ y &=& z. \end{array} \right.$$

3. Déterminer le lieu géométrique de l'intersection de $\pi_{abc}$ et de la droite perpendiculaire à $\pi_{abc}$ passant par l'origine, quand les paramètres $a,\ b, c$ satisfont les conditions des points 1. et 2.

### 5.14.3 Lieu géométrique dans l'espace

On considère une droite $d$ de l'espace et un point $P$ n'appartenant pas à $d$. Pour tout plan $\pi$ contenant $d$, on note $X$ la projection orthogonale de $P$ sur $\pi$. Déterminer le lieu géométrique décrit par le point $X$ quand $\pi$ varie.

Suggestion : si on procède par géométrie analytique, on choisira un système d'axes où $d$ est l'un des axes.

### 5.14.4 Lieu géométrique dans l'espace, surface, distance, angle

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A$, $B$, $C$ par leurs coordonnées respectives :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le lieu des points $P$ tels que $ABP$ soit un triangle équilatéral (donner sa nature).
2. Déterminer la distance de $C$ à la droite $AB$.
3. Calculer l'aire du triangle $ABC$.
4. Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.
5. Déterminer l'équation du plan $ABC$.

### 5.14.5 Intersection commune à une famille de plans

Dans l'espace euclidien à trois dimensions, on considère la famille de droites d'équations

$$\begin{cases} x = ay \\ y = az, \end{cases}$$

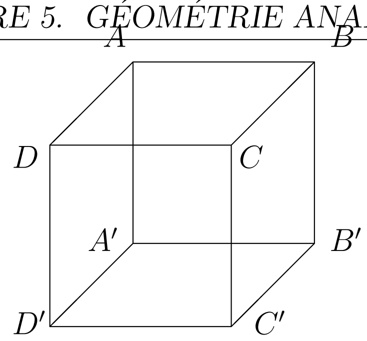
où $a$ est un paramètre réel, ainsi que les plans perpendiculaires à ces droites et contenant le point $(a+1, 2-2a^2, a^3+1)$.

Démontrer que ces plans possèdent une intersection commune et préciser la nature de cette intersection.

### 5.14.6 Cube, parallélisme de plans et mesure de segments

On donne un cube de sommets $A, B, C, D, A', B', C', D'$.

1. Démontrer que les plans $AB'D'$ et $C'DB$ sont parallèles.
2. Démontrer que la droite $A'C$ est perpendiculaire au plan $AB'D'$.
3. Si on désigne par $T$ la projection orthogonale du point $C$ sur le plan $AB'D'$ (c'est-à-dire le pied de la droite perpendiculaire à ce plan issue de $C$), démontrer que la longueur du segment $[A', T]$ est égale au tiers de la longueur du segment $[A', C]$.




### 5.14.7 Cube, parallélisme, intersection, perpendicularité

On considère le cube $ABCDA'B'C'D'$. Sur la diagonale $AC'$, on définit les points $P$ et $P'$ par $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P'C}$.

1. Montrer que les droites $PB$ et $D'P'$ sont parallèles.
2. Montrer que $PB$ et $A'D$ ont un point $Q$ en commun.
3. Montrer que $PQ$ est la perpendiculaire commune aux droites $AC'$ et $A'D$.

### 5.14.8 Positions relatives de droites

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les droites $d_a$ et $d_b$ par leurs équations cartésiennes

$$d_a : \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad d_b : \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

où $a$ et $b$ sont des paramètres réels.

1. Montrer que ces droites ne sont pas parallèles, quels que soient $a$ et $b$.
2. Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur $a$ et $b$ pour que les droites soient concourantes.
3. Sous la condition déterminée au point précédent, déterminer alors l'équation du plan contenant ces droites.

### 5.14.9 Tétraèdre, droites parallèles, droites concourantes

On considère un tétraèdre $OABC$ et on note $G$ le centre de gravité de la face $ABC$. On note respectivement $A_1$, $B_1$ et $C_1$ les milieux de $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$. Un plan $\pi$ parallèle à $ABC$ coupe $OA$, $OB$ et $OC$ en respectivement $A'$, $B'$ et $C'$.

1. Démontrer qu'il existe une unique position de $\pi$ pour laquelle les droites $A'A_1$, $B'B_1$ et $C'C_1$ sont parallèles à $OG$.
2. Démontrer que pour toutes les autres positions, ces droites sont concourantes en un point $P$ de la droite $OG$.

### 5.14.10 Equations d'une droite

Donner des équations d'une droite $d$ astreinte à passer par un point $A(-1,1,2)$ et à s'appuyer sur (c'est-à-dire être d'intersection non vide avec) les droites $d_1$ et $d_2$ suivantes :

$$d_1 \quad : \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{5};$$

$$d_2 \quad : \quad x+1 = y = -z.$$

### 5.14.11 Points coplanaires, équation cartésienne d'un plan

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On donne les points $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ de coordonnées respectives

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{et} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ sont coplanaires et donner une équation cartésienne du plan $\Pi$ qu'ils déterminent.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\Pi'$ perpendiculaire à $\Pi$ et passant par la droite d'équation $\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = -1 \\ 3x - z = 0 \end{array} \right.$

### 5.14.12 Positions relatives de droites, équation cartésienne d'un plan

On considère les droites $d_1$ et $d_2$ données par leurs équations dans un repère orthonormé de l'espace :

$$d_1 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - y & = & 0 \\ 3x - z & = & 0 \end{array} \right. , \quad d_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ 2y - z = 0 \end{array} \right. .$$

1. Montrer que $d_1$ et $d_2$ sont gauches.
2. Ecrire l'équation du plan $\pi$ parallèle à $d_1$ et à $d_2$ et qui contient le point $P$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Ecrire l'équation d'une droite perpendiculaire à $\pi$ et qui s'appuie sur $d_1$ et $d_2$.

### 5.14.13 Equation d'un plan, intersection de plans et de droites

On se place dans un espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé.

1. Déterminer une équation du plan $\pi$ issu du point de coordonnées $(1,1,1)$ et incluant la droite $d$ d'équations
$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ y + 2z = -3 \end{array} \right.$$

2. En fonction d'un ou de plusieurs paramètres de votre choix, donner une équation pour les plans perpendiculaires à $\pi$ qui passent par l'origine du repère.
3. Parmi les plans évoqués au point 2., donner une équation pour celui dont l'intersection avec $\pi$ est parallèle à $d$.

# Bibliographie


[1] Adam A. & Lousberg F. 2004. *Espace Math 5e/6e : théorie. Tome 2, Géométrie & compléments (6 périodes par semaine)*. De Boeck, 258 p.

[2] Bastin F. 2004. *Mathématiques générales A*. Université de Liège, Manuel de cours, 163 p.

[3] Bastin F. 2009. *Compléments de mathématiques générales*. Université de Liège, Manuel de cours, 163 p.

[4] Baudelet B., Close P., Janssens R. 2008. *Mathématiques. Des situations pour apprendre. Chapitre 1.* http ://education.deboeck.com/secondaire/resources/titles/280 41100855790/extras/DOSSIER-MAT3-manuel.pdf. Consulté le 17 août 2008.

[5] Baudelet B., Close P., Janssens R. 2008. *Mathématiques. Des situations pour apprendre. Chapitre 2.* http ://education.deboeck.com/secondaire/resources/titles/2804 1100804500/extras/MAT3activite02.pdf. Consulté le 17 août 2008.

[6] Crasborn J. 2010. *Eléments de mathématiques de l'enseignement secondaire*. Université de Liège, Manuel de cours, 139 p.

[7] Delhez E. 2005. *Algèbre. Tome 1*. Université de Liège, Manuel de cours, 171 p.

[8] Huaux H. 2005. *Rappels de géométrie*. Seraing.

[9] Lecomte P. 2006. *Géométrie élémentaire*. Université de Liège, Manuel de cours, 200 p.

[10] Moitroux E. & Haine Y. 2009. *Géométrie analytique plane*. Athénée Royal Charles Rogier, Liège.

[11] Moitroux E. & Haine Y. 2009. *Géométrie synthétique dans le plan et dans l'espace*. Athénée Royal Charles Rogier, Liège.

[12] Rigo M. 2006. *Géométrie*. Université de Liège, Manuel de cours, 200 p.

# Table des matières