LIÈGE université
Sciences Appliquées

QUESTIONS POSEES
AUX
EXAMENS D'ADMISSION

2018 - 2022

EXAMENS DE 2018

JUILLET 2018

ALGEBRE

1. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$|x+1|+|x-2|<3\,.$$

2. a) A quelles conditions sur les paramètres réels a, b et c le polynôme

$$X^4+aX^2+bX+c$$

est-il divisible par X^2+X+1 ?

b) A quelle condition sur les paramètres réels p et q le polynôme

$$X^3+pX+q$$

admet-il une racine double ? Cette racine est-elle toujours réelle ?

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x-a}$$

où a désigne un paramètre réel strictement positif.

En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,

a) déterminer le domaine de définition de f ;

b) déterminer sa parité éventuelle ;

c) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphique ;

d) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;

e) esquisser le graphique de f.

2. Soit

$$I_n = \int_1^{\sqrt{e}} x \, \left(\ln x^2\right)^n \, dx$$

a) Calculer I_0.

b) Calculer I_1.

c) Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante α telle que

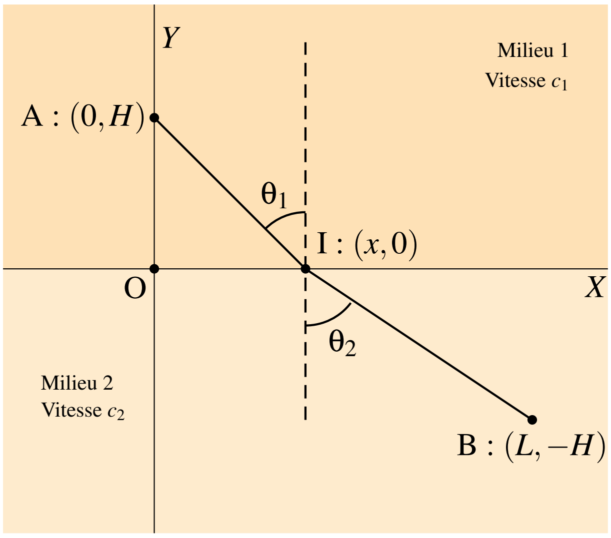
$$I_n = \frac{1}{2} \int_1^{\alpha} (\ln x)^n \, dx$$

d) Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, $\quad I_n = \dfrac{e}{2} - n \, I_{n-1}$.

3. Pour aller d'un point à un autre, la lumière suit le chemin le plus rapide. Lorsque le milieu est homogène et que la vitesse de propagation de la lumière est donc constante, le rayon lumineux suit une trajectoire rectiligne entre les deux points. Dans ce cas, le chemin le plus rapide est également le plus court. Dans un milieu non homogène, par contre, le chemin le plus rapide ne correspond pas nécessairement au chemin le plus court de sorte que la propagation n'a pas lieu en ligne droite.

   La loi de la réfraction de Snell-Descartes peut être obtenue par application de ce principe. Pour établir cette loi, on considère deux milieux homogènes séparés par une interface plane d'équation $y = 0$. Dans les deux milieux, la lumière se propage en ligne droite à des vitesses c_1 et c_2. Au passage de l'interface plane entre les deux milieux, le rayon est réfracté et change de direction.

   On considère en particulier le rayon lumineux allant du point A de coordonnées $(0, H)$ au point B de coordonnées $(L, -H)$ où H et L sont des constantes strictement positives. Ce problème est donc caractérisé par les quatre paramètres H, L, c_1 et c_2. On note également $x \in \mathbb{R}$, la coordonnée horizontale du point I où le rayon est incident à l'interface.



a) Exprimer en fonction de x et des quatre paramètres du problème le temps de parcours du rayon lumineux allant du point A au point B.

b) Montrer qu'il est nécessaire que le trajet du rayon lumineux soit tel que (voir figure)

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation homogène

$$\sin^3 x + 2\cos^3 x = 3\sin^2 x \cos x$$

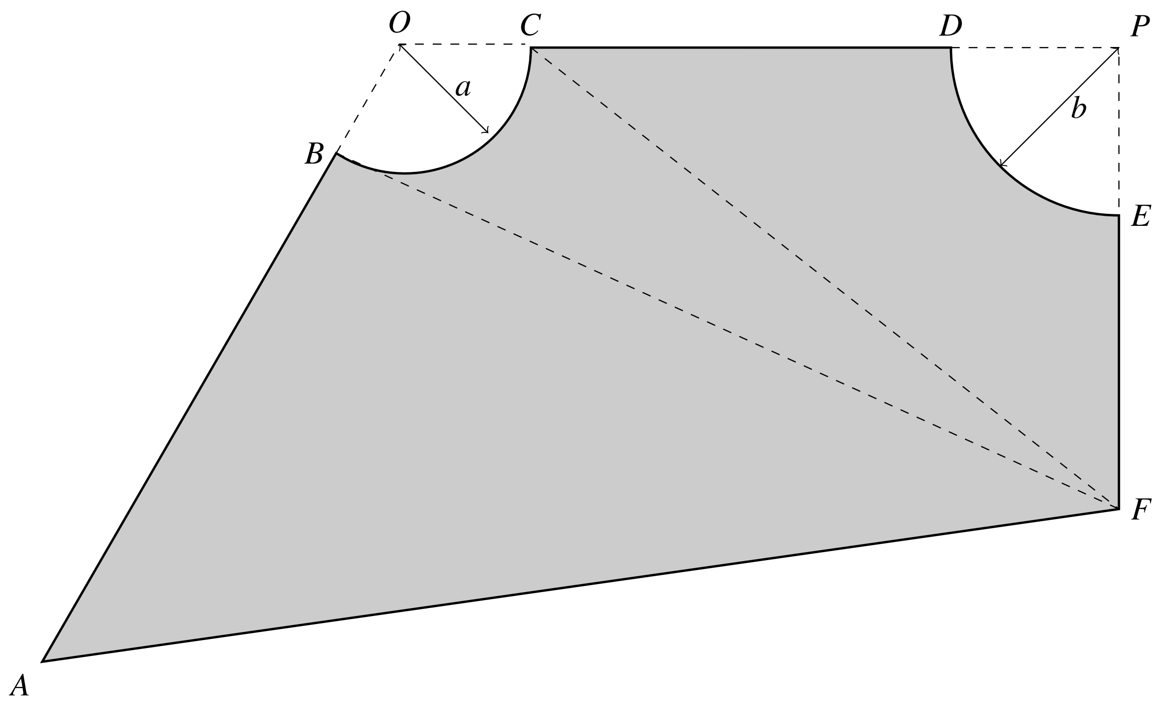
et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Les solutions trouvées ne sont pas toutes exprimables sous la forme d'angles remarquables. Il n'empêche qu'il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique sachant que $\sqrt{3} \simeq 1.732$.

2. Si A, B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré, montrer que

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C.$$

3. Dans le cas d'un quadrilatère plan quelconque, la connaissance de la longueur des quatre côtés et d'une diagonale suffit pour déterminer sa surface. Cependant, on désire ici carreler une pièce $ABCDEF$ dont la forme est celle représentée par la zone grisée de la figure ci-dessous. Les courbes BC et DE sont des arcs de cercle de centre O et P et de rayon a et b respectivement. Les segments rectilignes $[A,B]$, $[C,D]$, $[E,F]$ et $[A,F]$ mesurent respectivement 7 m, 5 m, 3.5 m et 12.64 m. Les deux segments $[B,F]$ et $[C,F]$ mesurent 10.11 m et 8.90 m. De plus, l'angle $\widehat{CPF}$ est droit. On demande de
   a) déterminer le rayon b de l'arc DE,
   b) déterminer le rayon a de l'arc BC,
   c) calculer l'aire intérieure de la pièce représentée par la surface grisée $ABCDEF$.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On donne quatre points de l'espace A, B, C et D.
   a) Montrer que le vecteur

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$$

   est indépendant du point M.

b) Notons $\mathbf{v}$ le vecteur dont il est question au point précédent. Montrer que, si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, alors la valeur de

$$2\|\overrightarrow{MA}\|^2 - \|\overrightarrow{MB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{MC}\|^2 - 3\|\overrightarrow{MD}\|^2,$$

où $\|\overrightarrow{XY}\|$ désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{XY}$, est indépendante du point M.

2. Un segment de longueur constante se déplace dans le plan, de manière telle que ses extrémités A et B s'appuient sur les deux côtés d'un angle droit donné.
   On demande
   a) de déterminer le lieu d'un point P quelconque du segment (en précisant la nature de ce lieu),
   b) de représenter graphiquement ce lieu lorsque P est le milieu du segment.

SEPTEMBRE 2018

ALGEBRE

1. Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 1\,, \\ x + ay + az = a\,, \\ ax + a^2y + a^3z = a^3\,. \end{cases}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 + (\operatorname{cis}\theta)^2|z| = 0\,,$$

dans laquelle θ est un paramètre réel.
Quel est l'ensemble des valeurs possibles de $|z|$?
Donner la forme algébrique des solutions éventuelles dans le cas $\theta = 0$.

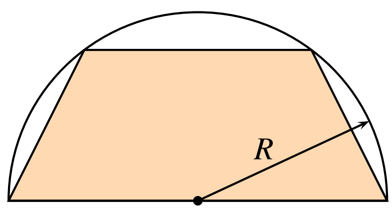
Rappel. L'expression $\operatorname{cis}\theta$ est une abréviation de $(\cos\theta + i\sin\theta)$.

ANALYSE

1. On considère la fonction
$$f(x) = \ln \frac{x}{a^3 - x^3}$$
où a désigne un paramètre réel strictement positif.
   a) Déterminer le domaine de définition de f.
   b) Déterminer la parité éventuelle de f.
   c) Déterminer les éventuelles asymptotes de son graphique.
   d) Étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema.
   e) Étudier la concavité du graphique de f et identifier ses éventuels points d'inflexion.
   f) Esquisser le graphique de f.

2. Evaluer chacune des expressions ci-dessous :
   a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\,dx$
   b) $\displaystyle\int x \sin x\,dx$
   c) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin^2 x\,dx$
   d) $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3. On inscrit un trapèze dans un demi-cercle de rayon R en faisant en sorte qu'une base du trapèze s'appuie sur le diamètre du demi-cercle comme illustré ci-dessous.
Quelle est la fraction maximale de la surface du demi-cercle qui peut être ainsi recouverte ?



TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre l'équation trigonométrique suivante

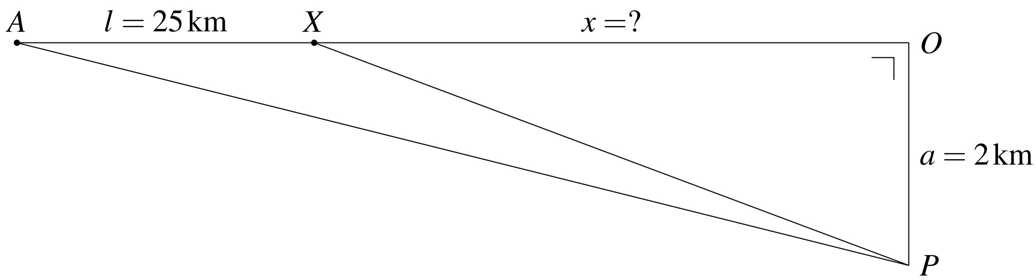
$$\sin x - 2\sin 3x + \sin 5x = -\cos 2x + \cos 4x$$

   et représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, +\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Montrer que si A, B, C sont trois angles strictement positifs tels que $A+B+C = \frac{\pi}{2}$ alors

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 1.$$

3. Un observateur situé en O dans un désert parfaitement plan est aligné avec deux éléments remarquables A et X séparés entre eux par une distance $l = 25\,\text{km}$. Cet observateur cherche à déterminer la distance qui le sépare du point X en se déplaçant en P d'une distance $a = 2\,\text{km}$ dans une direction perpendiculaire à l'axe AXO. De ce nouveau point de vue, il mesure l'angle $\widehat{XPA} = 1°6'0''$.



   a) Déterminer l'angle $\widehat{PAO}$.
   b) Calculer la distance x entre les points O et X.
   c) Calculer la distance $\overline{PA}$.

   Les angles seront calculés à la seconde près et les distances avec 5 chiffres significatifs.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Soient deux droites perpendiculaires X, Y, sécantes en O. Sur X, on fixe les points A et B de telle sorte que l'on ait $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB}$. Pour tout $P \in Y$, on définit le point Q tel que $3\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP}$.
   Quel est le lieu du ou des point(s) commun(s) aux droites AP et BQ lorsque P parcourt Y ?

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les droites d_a et d_b par leurs équations cartésiennes

$$d_a : \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad d_b : \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

   où a, b sont des paramètres réels.

   a) Montrer que ces droites ne sont pas parallèles, quels que soient a et b.
   b) Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que ces droites soient sécantes.
   c) Sous la condition déterminée au point précédent, déterminer alors une équation cartésienne du plan contenant ces droites.

EXAMENS DE 2019

JUILLET 2019

ALGEBRE

1. Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq p \leq n$, on a

$$\sum_{i=0}^{p} C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 2^p C_n^p \text{ et } \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 0\,.$$

   Suggestion : on montrera d'abord que

$$C_n^i C_{n-i}^{p-i} = C_p^i C_n^p$$

   pour tous naturels i, p, n tels que $i \leq p \leq n$.

2. On considère l'expression suivante, dans laquelle n est un paramètre entier naturel :

$$\frac{\left(2 + i\sqrt{12}\right)^7}{\left(\sqrt{3} - i\right)^n}\,.$$

   On demande sa valeur, sous forme algébrique et sous forme trigonométrique, quand n vaut 16 et quand n vaut 17.

ANALYSE

1. On considère la fonction

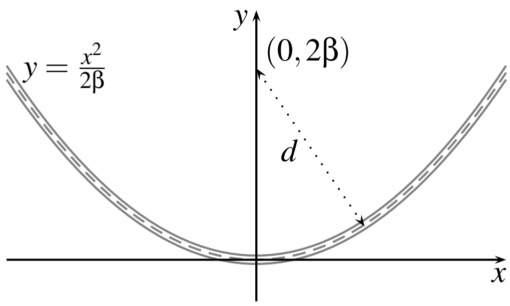
$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + a}$$

   où a désigne un paramètre réel supérieur ou égal à 1.
   En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,
   a) déterminer le domaine de définition de f ;

b) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphique ;
c) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;
d) esquisser le graphique de f.

2. Soit
$$\phi_n(x) = \int e^{-x} \cos^n x \, dx \qquad \text{et} \qquad F_n = \int_0^{\pi/2} e^{-x} \cos^n x \, dx$$
où n désigne un naturel.
   a) Calculer $\phi_0(x)$ et F_0.
   b) Calculer $\phi_1(x)$ et F_1.
   c) Montrer que $(1+n^2)F_n = 1+n(n-1)F_{n-2}$, quel que soit le naturel $n \geq 2$.

3. On désire étudier les nuisances sonores causées par le trafic sur une route dont le tracé est représenté par la courbe d'équation $2\beta y = x^2$ où β désigne un paramètre réel strictement positif (voir figure ci-dessous).
Dans le cadre de cette étude, on demande de déterminer le point de la route d'abscisse $x > 0$ le plus proche de l'habitation située au point de coordonnées $(0, 2\beta)$ et d'évaluer la distance d entre cette habitation et la route.



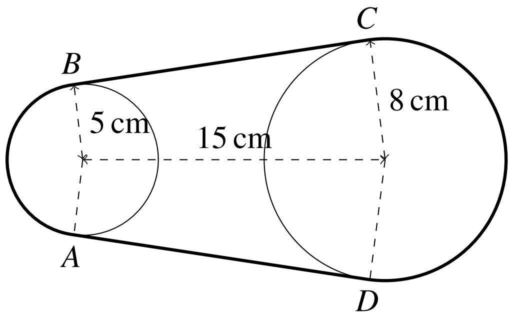
TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Montrer que, si la relation suivante liant les mesures des trois angles A, B et C d'un triangle est vérifiée
$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$$
alors, A, B ou C vaut $120°$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$4(\sin x + \cos x) - 8\sin x \cos x = 5$$
et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique. Noter que bien que les solutions trouvées ne soient pas exprimables sous la forme d'angles remarquables, il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique.

   Suggestion pour résoudre l'équation : poser $y = \sin x + \cos x$.

3. Deux poulies de rayons respectifs 5 cm et 8 cm sont disposées à 15 cm de distance centre à centre. Calculer la longueur L de la courroie autour de ces poulies. La courroie est représentée en gras sur la figure fournie ci-dessous et les points A, B, C et D représentent les points de tangence de cette courroie avec les poulies.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé et on donne les points P d'abscisse 1, Q d'ordonnée 1 tels que les droites OP et OQ sont perpendiculaires. Déterminer le lieu de la projection orthogonale M de l'origine O sur le droite PQ.

2. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
Démontrer que l'on a
$$\frac{\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2}{\|GA\|^2 + \|GB\|^2 + \|GC\|^2} = 3$$
où $\|XY\|$ désigne la longueur du segment joignant le point X au point Y.

SEPTEMBRE 2019

ALGEBRE

1. Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de Fibonacci, définie par :

$$F_0 = 0\,,\ F_1 = 1 \text{ et } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 2\,.$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 \;=\; F_n\,F_{n+1}\,.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante, dans laquelle m est un paramètre réel :

$$\frac{1}{x-2} \;=\; \frac{2-m}{7x-2x^2-6}\,.$$

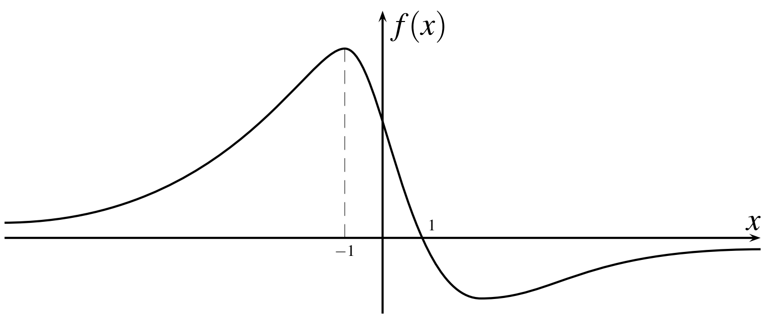
Résoudre ensuite l'inéquation associée, obtenue en remplaçant le symbole "$=$" par le symbole "$\leq$".

ANALYSE

1. Déterminer toutes les valeurs des paramètres réels α, β et γ telles que le graphique de

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + \gamma}$$

présente l'allure esquissée ci-dessous. Justifier.



2. a) Calculer $\int \frac{x^3}{1+x^2}dx$.

   b) Calculer $\int_{-\infty}^{1} \mathrm{e}^x\,dx$.

   c) Calculer $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^2\,x\,dx$.

   d) En discutant s'il y a lieu en fonction de $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_1^2 x^n \ln x\,dx$.

   e) On note $I(x) = \int_x^2 \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$. Montrer que $I(\alpha) \geq I(\beta)$ si $\alpha \leq \beta \leq 2$.

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x} = \cos x$$

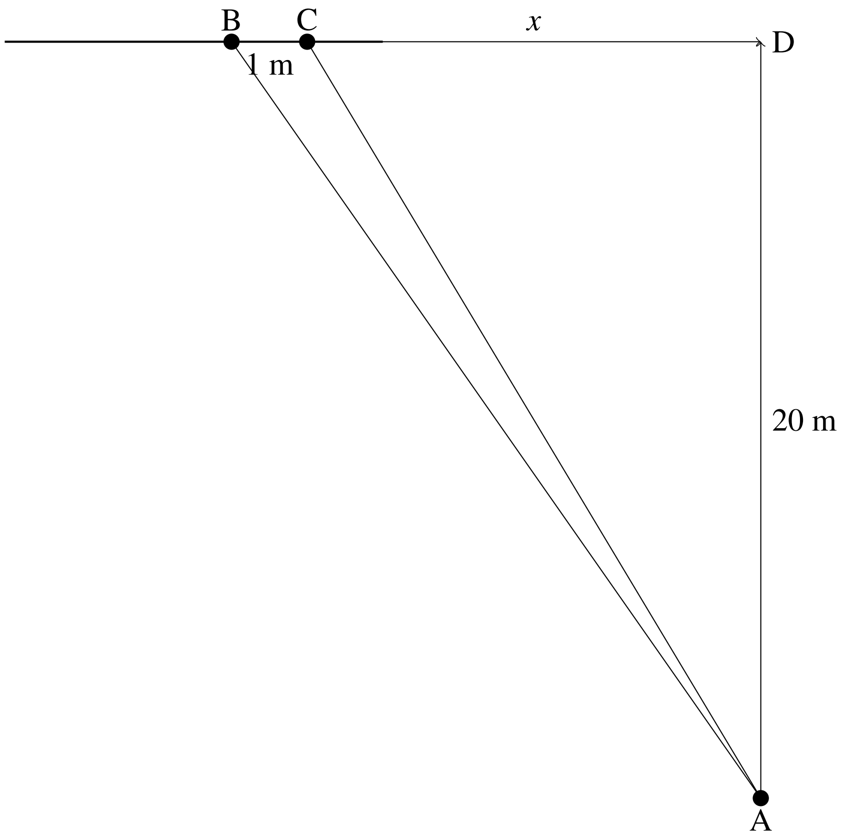
   en spécifiant les conditions d'existence et représenter les solutions comprises dans $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Démontrer qu'un triangle est rectangle si la relation

$$\cos B + \cos C = \sin A$$

   reliant la mesure de ses angles A, B, C est vérifiée.

3. Lors d'un match de football, un coup franc doit être tiré du point A situé à 10 mètres à droite du poteau du gardien et à 20 mètres dans la profondeur du terrain (voir figure ci-dessous). On suppose que le gardien occupe une largeur de 1 mètre sur sa ligne de but, entre les points B et C et que le tir s'effectuera en ligne droite en négligeant la présence d'autres joueurs sur le terrain. Déterminer la distance $x = \overline{DC}$ où doit se placer le gardien afin de couper 2 degrés de l'angle de tir de l'attaquant, c'est-à-dire, afin que l'angle $\widehat{BAC}$ vaille 2 degrés.



GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole $\mathcal{P}$ par son équation cartésienne
$$x^2 = 4y.$$
   a) Représenter la parabole.
   b) Déterminer l'équation cartésienne d'une tangente quelconque à la courbe $\mathcal{P}$. (Attention : l'équation doit être valable pour n'importe quelle tangente à $\mathcal{P}$.)
   c) Déterminer le lieu des points qui sont l'intersection de deux tangentes à $\mathcal{P}$ orthogonales entre elles.

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d_1 passant par les points A et B respectivement de coordonnées $(1,2,3)$ et $(-1,0,2)$, et la droite d_2 passant par les points C, D respectivement de coordonnées $(0,1,7)$ et $(2,0,5)$.

a) Déterminer l'équation cartésienne du plan Π parallèle à la droite d_1 et contenant la droite d_2.

b) Déterminer des équations paramétriques et des équations cartésiennes de la droite d_3 passant par C et orthogonale à d_1 et d_2.

EXAMENS DE 2020

Avertissement

Suite aux mesures sanitaires mises en place dans le cadre de la gestion de la pandémie "COVID 19", les contenus et les modalités organisationnelles de l'examen ont été adaptés pour les deux sessions de l'année 2020 (réduction des matières faisant l'objet de l'évaluation ainsi que du temps consacré à cette évaluation) ; les énoncés repris ci-après ne peuvent donc être perçus comme un reflet fidèle de la teneur habituelle de cet examen.

Pour mieux souligner cette particularité de l'année, nous proposons "en l'état" les questionnaires qui ont été soumis aux étudiants lors de ces éditions exceptionnelles de l'examen.

JUILLET 2020 - Jour 1

TRIGONOMETRIE ET GEOMETRIE

Question I

Trouver toutes les solutions de l'équation trigonométrique

$$3\left[\sin(x)+\cos(x)\right]-4\left[\sin^3(x)+\cos^3(x)\right]=0.$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Question II

A un instant initial, deux observateurs A et B distants de 2700 m voient un avion situé dans le plan vertical de la base d'observation sous des angles $\widehat{C_1AO_1}=35°$ et $\widehat{C_1BO_1}=64°$, l'avion se situant entre A et B. Après quelques secondes, ils font une seconde observation sous des angles $\widehat{C_2AO_2}=30.5°$ et $\widehat{C_2BO_2}=80°$, l'avion se situant à la droite de B.

Déterminer l'angle de montée de l'avion par rapport au segment AB, c'est-à-dire l'angle formé par la droite C_1C_2 et la droite AB.

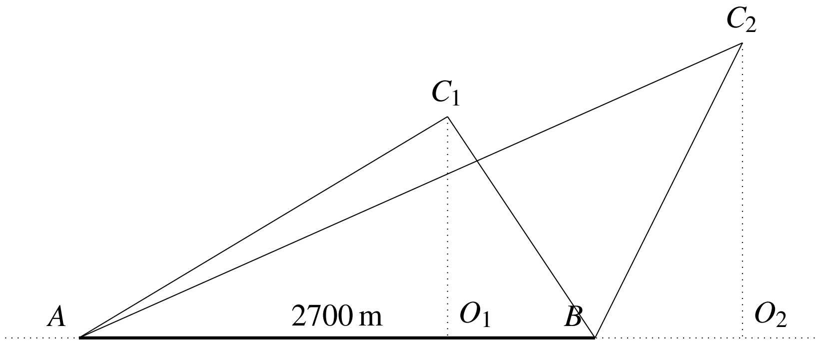


FIGURE 1 Points d'observation

Question III

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les droites d_1 et d_2 respectivement d'équations cartésiennes

$$d_1 : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que ces droites ne sont pas parallèles.

b) Déterminer l'équation cartésienne du plan contenant d_1 et parallèle à d_2.

Question IV

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Sur un diamètre de ce cercle, on fixe deux points P et P' équidistants de O. Un point mobile M parcourt $\mathcal{C}$.

Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{P'M}$ ne dépend pas du point M.

JUILLET 2020 - Jour 2

ALGEBRE ET ANALYSE

Question I

Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \geq \sqrt{-x}+\frac{2|x|}{x}.$$

Question II

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$6^{4x}-36^{x+1}-160 = 0.$$

Question III

On considère la fonction

$$f(x)=\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

où $a>0$ désigne un paramètre réel. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,

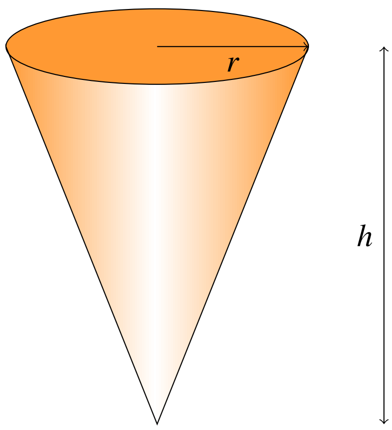
a) déterminer le domaine de définition de f ;
b) étudier la parité de f ;
c) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe ;
d) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;
e) esquisser le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

Question IV

Afin d'optimiser sa marge bénéficiaire, l'exploitant d'une friterie désire minimiser la quantité de papier utilisée pour confectionner ses cornets de frites. Le cornet est assimilé à un cône circulaire droit et doit contenir un volume V fixé de frites. Sachant que le volume V et l'aire latérale A d'un cône circulaire droit de rayon r et de hauteur h sont donnés par

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \qquad A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

déterminer les dimensions r et h optimales du cornet en fonction du volume V.



SEPTEMBRE 2020 - Jour 1

ALGEBRE ET ANALYSE

Question I

Déterminer l'ensemble des valeurs réelles de r pour lesquelles l'énoncé

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ tel que } |x| < 1/2, \text{ on a } \ 2rx^2 + (3r-2)x - 3 \leq 0}$$

est vrai.

Question II

Soit une suite de nombres réels $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_1 = 2 \ \text{ et } \ u_{n+1} = \frac{n^2 u_n + 7}{n^2 + 2n + 1} \ \text{ pour } n \geq 1.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n = \frac{7n-5}{n^2}.$$

Question III

On considère la fonction

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{1+x^2}\right)$$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Étudier la parité de f.

c) Déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe.

d) Étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema.

e) Esquisser le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

Question IV

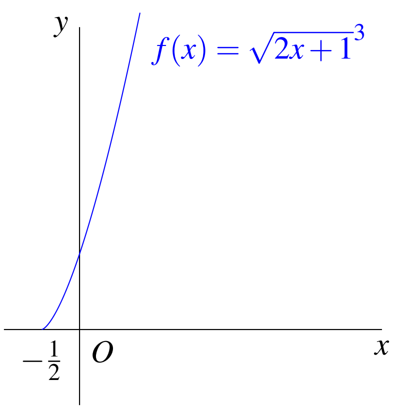
On définit la distance d'un point P à une courbe $\mathcal{C}$ comme la plus petite des distances entre le point P et tous les points de la courbe $\mathcal{C}$.

On s'intéresse à la distance d de l'origine O à la courbe $\mathcal{C}$ décrite par le graphe de la fonction

$$f(x) = \sqrt{(2x+1)^3}.$$

a) Calculer d et déterminer les coordonnées de l'unique point Q de $\mathcal{C}$ situé à la distance d de l'origine O.

b) Montrer que le segment OQ est perpendiculaire à la tangente au graphique de f en Q.



SEPTEMBRE 2020 - Jour 2

TRIGONOMETRIE ET GEOMETRIE

Question I

Démontrer que les droites d_m d'équation

$$mx+(1-m)y+m-2=0$$

(où m est un paramètre réel) passent par un même point. Quel est ce point ?

Question II

On donne les quatre points A,B,C,D.

a) Démontrer que le vecteur

$$\mathbf{v}=4\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$$

est indépendant du point M.

b) Démontrer que, si $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, alors le nombre réel

$$4\|\overrightarrow{MA}\|^2+3\|\overrightarrow{MB}\|^2-5\|\overrightarrow{MC}\|^2-2\|\overrightarrow{MD}\|^2$$

est indépendant du point M.

Question III

Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation trigonométrique

$$\mathrm{tg}^2(x)-3\frac{\mathrm{tg}(x)}{\cos(x)}-\frac{1}{\cos^2(x)}=1$$

et représenter les solutions en x sur le cercle trigonométrique.

Question IV

On voudrait construire un lance-balles afin d'entrainer un joueur de tennis professionnel. Pour simplifier, on suppose que ce lance-balles envoie des balles tellement rapides que celles-ci ont une trajectoire rectiligne. Le fabricant aimerait savoir quelle devrait être la hauteur d'où sont envoyées les balles afin qu'elles puissent passer au-dessus du filet et simuler un service rebondissant à l'intersection entre la ligne du couloir et la ligne du carré de service (du point A au point B sur la Figure 2). Les dimensions du terrain sont renseignées sur la figure. De plus, on considérera que le filet peut être vu comme un arc de cercle de 50 mètres de rayon et de centre situé à la verticale du milieu du terrain. La hauteur du filet au centre du terrain est réglementairement fixée à 91,4 centimètres au-dessus du sol (voir Figure 3).
En supposant que le lance-balles est placé au milieu de la ligne de fond, au point A, calculer la hauteur minimale nécessaire (du point A) pour envoyer la balle sur le point B (au niveau du sol) tout en garantissant que la balle passe au-dessus du filet au point C. Pour rappel, on suppose que la trajectoire est rectiligne, on suppose également que la balle est un point n'ayant pas de dimension. Tous les calculs se font au millimètre près.

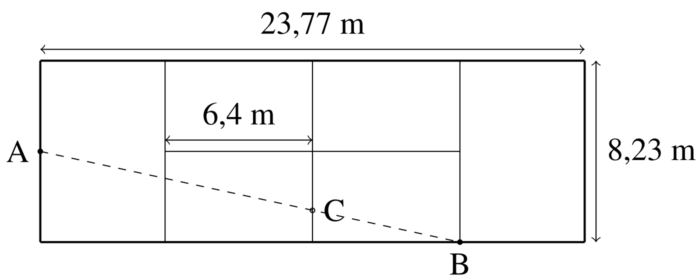


FIGURE 2 Dimensions terrain de tennis

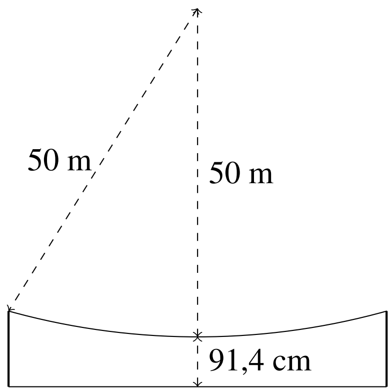


FIGURE 3 Dimensions filet

EXAMENS DE 2021

JUILLET 2021

ALGEBRE

1. Soit le polynôme P défini par $P(z) = z^6 + 3z^4 - z^3 - 3z$.
   a) Décomposer le polynôme en facteurs du premier ou second degré.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} \leq \sqrt{x^2 - 8x + 20}.$$

ANALYSE

1. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans un champ de force centrale particulier peut être étudié à partir du potentiel

$$V(r) = \frac{h^2}{r^2} - \frac{2\mu}{5r^5}$$

où $r > 0$ est une variable réelle représentant la distance de la particule par rapport au centre de force, $h > 0$ est une constante fixée représentant le moment cinétique par unité de masse de la particule et μ désigne un paramètre réel.

Étudier le graphe de la fonction $V(r)$, pour $r > 0$ uniquement, en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre μ. Plus précisément,

a) déterminer les valeurs de $r > 0$ pour lesquelles la fonction V est définie ;
b) déterminer les zéros de la fonction V ;
c) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe ;
d) étudier la croissance/décroissance de V et caractériser ses éventuels extrema ;

e) esquisser le graphique de V en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

2. Calculer les primitives et intégrales suivantes.

   a) $\displaystyle\int \sqrt{x}(1-x^3)\,dx$

   b) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$

   c) $\displaystyle\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$

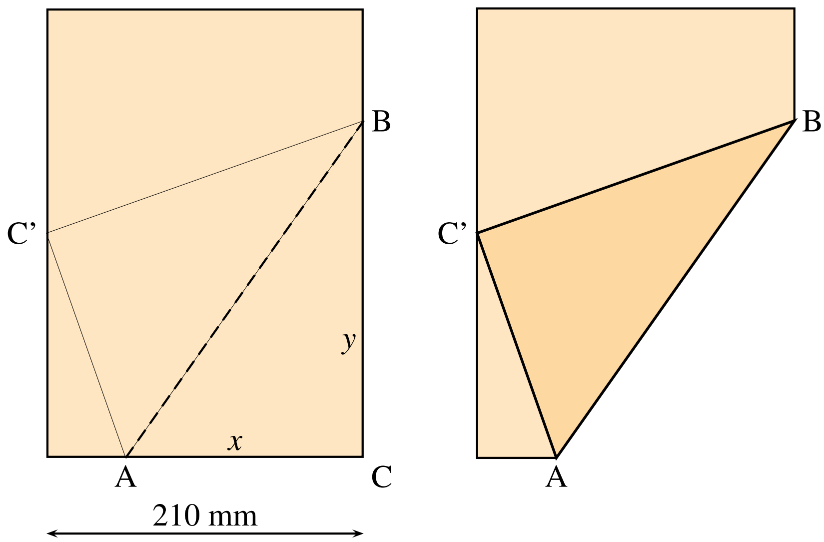
   d) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\,dx$

3. Dans une feuille rectangulaire de format A4 (210 mm x 297 mm), on fait un pli selon un axe AB où A et B désignent deux points appartenant respectivement au petit et au grand côté, comme illustré ci-dessous.

   Le pli est tel que le coin C de la feuille est appliqué exactement sur le côté opposé. On peut montrer que ceci nécessite que les longueurs $|AC|$ et $|CB|$, notées respectivement x et y (en mm), sont telles que

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{210}}{\sqrt{2x-210}} \quad \text{où} \quad x \in [123, 210]$$

   Montrer que l'aire de la surface repliée ABC est minimale lorsque CBC' est équilatéral.



TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Trouver toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

$$\cos x - \cos(2x) - \sin(3x) = 0.$$

Présenter sur le cercle trigonométrique celles appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

2. Les billes d'un roulement sont enserrées entre deux gorges métalliques. La gorge de la bague extérieure possède un angle d'ouverture de 120° quant à celle de la bague intérieure, elle possède un angle de 100° comme décrit sur la figure de gauche ci-dessous. On suppose que les sommets des gorges se trouvent sur la même ligne verticale et on se rappelle que les surfaces de contact sont tangentes à la bille.

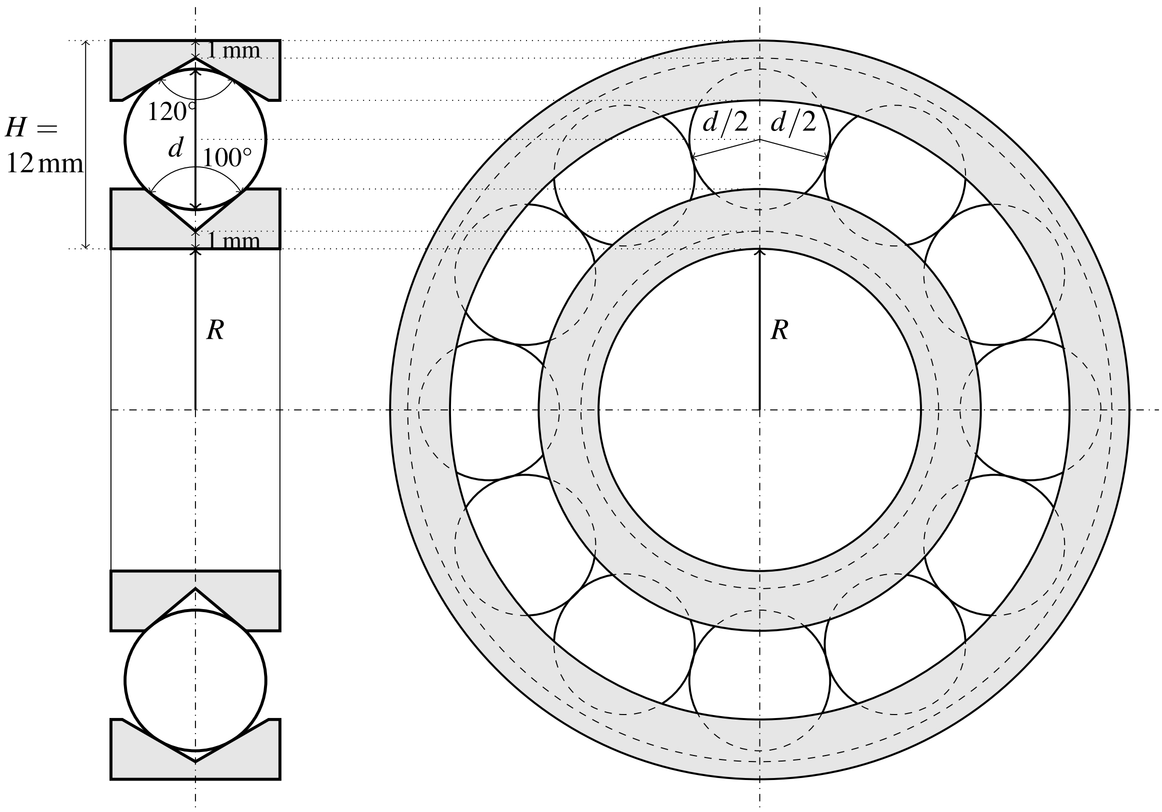


FIGURE 4 Coupe transversale et vue latérale du roulement à bille.

a) En utilisant les données du plan, déterminer le diamètre d de la bille tel que la distance entre les bagues intérieure et extérieure soit $H = 12\,\text{mm}$ exactement.

b) Si le roulement est constitué de 12 billes juxtaposées comme sur le dessin de droite ci-dessus, calculer le rayon R de la bague intérieure du roulement.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. Un point P appartient à la diagonale BD d'un rectangle $ABCD$. Démontrer l'égalité

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{PD}.$$

L'égalité est-elle vérifiée si P n'appartient pas à la diagonale BD du rectangle ? Justifier.

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point P de coordonnées $(1,1,1)$ et la droite d située à l'intersection des plans

$$\Pi_1 : 2x + y = 5 \quad \text{et} \quad \Pi_2 : x + 2y + 3z = -2$$

a) Déterminer l'équation cartésienne du plan Π passant par le point P et incluant la droite d.

b) Déterminer des équations paramétriques de Π_2.

c) Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite d' passant par l'origine, qui coupe d et lui est orthogonale.

SEPTEMBRE 2021

ALGEBRE

1. Factoriser le polynôme P défini par $P(x) = 64x^3 - 144x^2 + 44x + 21$, sachant qu'il admet trois racines (réelles) x_1, x_2, x_3 en progression arithmétique, c'est-à-dire telles que $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$.

2. Soit E l'ensemble à 12 éléments $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l\}$.
   a) Combien de sous-ensembles de 5 éléments de E peut-on former
      - contenant a et b ?
      - contenant a mais pas b ?
      - contenant b mais pas a ?
      - ne contenant ni a ni b ?

   b) En déduire la relation
   $$\mathsf{C}_{12}^{5} = \mathsf{C}_{10}^{3} + 2\mathsf{C}_{10}^{4} + \mathsf{C}_{10}^{5}.$$
   c) Généraliser le résultat obtenu en prouvant par un raisonnement similaire que, pour $1 < p < n-1$, on a
   $$\mathsf{C}_{n}^{p} = \mathsf{C}_{n-2}^{p-2} + 2\mathsf{C}_{n-2}^{p-1} + \mathsf{C}_{n-2}^{p}.$$
   d) Démontrer algébriquement la relation
   $$\mathsf{C}_{n+1}^{p+1} = \mathsf{C}_{n}^{p} + \mathsf{C}_{n}^{p+1} \quad \text{(Formule du triangle de Pascal)},$$
   valable si $0 \leq p < n$.

   e) Démontrer à nouveau le résultat du point c) en appliquant la formule du triangle de Pascal.

   Remarque. On peut répondre aux points d) et e) même si on n'a pas pu répondre aux points a), b) et c).

ANALYSE

1. On considère la fonction
   $$f(x) = \ln \frac{x^2 + \beta^2}{x}$$
   où $\beta > 0$ désigne un paramètre réel. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de β,

   a) déterminer le domaine de définition de f ;

   b) déterminer les éventuels zéros de f ;

   c) déterminer les éventuelles asymptotes de son graphe ;

   d) étudier la croissance/décroissance de f et caractériser ses éventuels extrema ;

e) esquisser le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

2. Calculer les primitives et intégrales suivantes,

   a) $\displaystyle\int_0^1 x(1-\sqrt[3]{x})\,dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

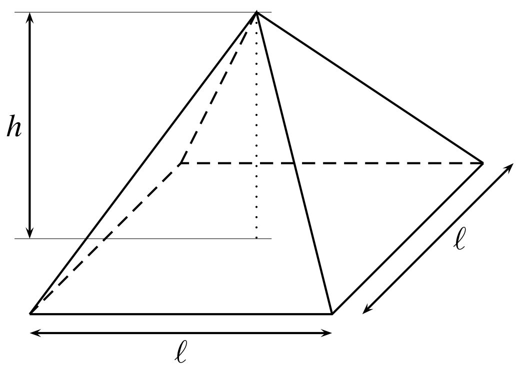
   c) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\,\sin(2x)\,dx$

   d) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\,\cos(4x)\,dx$

3. Les étudiants ingénieurs du Pot'Ingé (potager cultivé par les étudiants ingénieurs de l'ULiège sur le campus du Sart Tilman)

   souhaitant protéger leur récolte de légumes des intempéries décident d'entasser ceux-ci en une pyramide à base carrée de volume V et de recouvrir celle-ci d'une bâche (voir illustration ci-dessous). La bâche couvre uniquement les quatre faces triangulaires de la pyramide, pas la base carrée. On note ℓ et h, respectivement, la longueur du côté de la base carrée et la hauteur de la pyramide.

   Déterminer le rapport ℓ/h des dimensions optimales de la pyramide permettant de minimiser la surface S de la bâche pour un volume V fixé de la récolte à protéger.



On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\frac{1}{3}Ah$ *où A désigne l'aire de la base et h est la hauteur de la pyramide.*

TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique

$$\cos^3 x - \sin^3 x = \frac{3}{5}(\cos x - \sin x).$$

   Représenter précisément les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Trois cercles avec un rayon de respectivement 5 cm, 3 cm et 2 cm sont tangents deux à deux. Déterminer l'aire de la surface intérieure grisée délimitée par les trois cercles (voir figure ci-après).

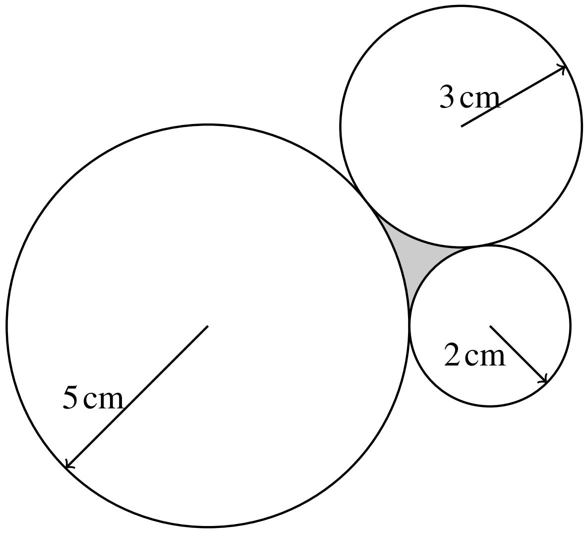


FIGURE 5 Trois cercles tangents deux à deux.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On donne un quadrilatère plan quelconque $ABCD$. On désigne par I, J, K, L les milieux des côtés AB, BC, CD et DA respectivement. Démontrer les affirmations suivantes :

   a) $IJKL$ est un parallélogramme tel que

   $$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}, \qquad \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{JK} = \frac{\overrightarrow{BD}}{2}$$

   b) Les diagonales de $ABCD$ et de $IJKL$ vérifient l'égalité

   $$\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{BD}\|^2 \ = \ 2\|\overrightarrow{IK}\|^2 + 2\|\overrightarrow{JL}\|^2$$

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points A, B, C, D suivants

   $$A(0,1,1), \quad B(0,-1,0), \quad C(1,0,1), \quad D(r,1,1)$$

   où r est un paramètre réel.

a) Déterminer un sytème d'équations cartésiennes de la droite d passant par A et B.

b) Déterminer l'équation cartésienne du plan Π_r passant par l'origine et par les points C et D.

c) Déterminer la valeur de r pour laquelle le plan Π_r est parallèle à la droite d.

EXAMENS DE 2022

JUILLET 2022

ALGEBRE

1. On considère le polynôme

$$P(x) = x^3 + mx^2 + 333x - 1134,$$

où m est un paramètre.

   a) Donnez les décompositions de 333 et 1134 en facteurs premiers.

   b) Trouvez l'unique valeur entière de m telle que le polynôme $P(x)$ possède uniquement des racines entières positives avec nécessairement une racine multiple.

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

2. Soient a et b des réels positifs tels que $a \geq b > 0$. Démontrez que la différence entre leur moyenne arithmétique et leur moyenne géométrique admet la borne inférieure et la borne supérieure suivantes

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

ANALYSE

1. On considère la fonction

$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{x-\beta}\right)$$

où β désigne un paramètre réel strictement positif. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de β,

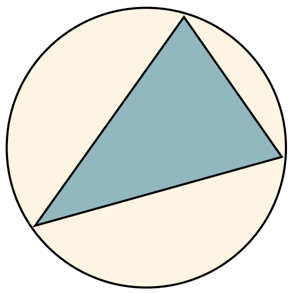
   a) déterminez le domaine de définition de f ;

b) déterminez les éventuels zéros de f ;
c) déterminez les éventuelles asymptotes de son graphique ;
d) étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema ;
e) étudiez la concavité du graphique et identifiez les éventuels points d'inflexion ;
f) esquissez le graphique de f en reliant explicitement chacune de ses caractéristiques aux résultats obtenus ci-dessus.

2. On note
$$I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n}\, dx\,, \quad n \in \mathbb{N}$$
   a) Calculez I_0, I_1, I_2 et I_4.
   b) Sans évaluer I_3, montrez que $I_2 \leq I_3 \leq I_4$.

3. D'un tronc d'arbre de section parfaitement circulaire de rayon R, on veut extraire une poutre dont la section est un triangle isocèle, comme illustré ci-dessous.

   Déterminez l'aire maximale de la section de la poutre et les longueurs des côtés du triangle isocèle correspondant. Justifiez.



TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Soit l'équation trigonométrique
$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos x\, sinx.$$
   Déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Si A, B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré, démontrer que
$$\frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2}.$$

3. Une barre en acier d'une longueur de 2 m est ancrée à une extrémité A dans un mur vertical à une hauteur de 3 m avec un angle de 45° par rapport à la verticale. A son autre extrémité O, elle soutient une poulie de 0.5 m de rayon. Un cable d'acier est fixé dans ce même mur en B à une hauteur de 4 m et soutient une caisse cubique de 0.5 m de côté par l'intermédiaire de la poulie.

   Calculer la longueur $BCDE$ du cable pour que le bas de la caisse se situe exactement à 1 m du sol (au centimètre près).

   Le système est représenté à la Figure 6 ci-dessous. Le cable est tangent à la poulie aux points de contact C et D.

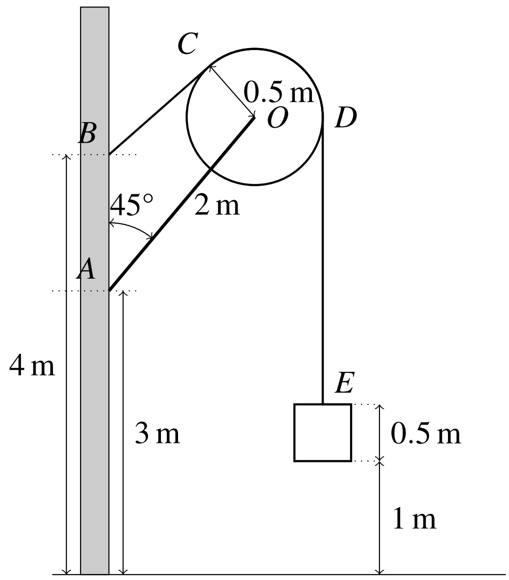


FIGURE 6 Le système de poulie (le dessin n'est pas à l'échelle).

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On se place dans un repère orthonormé du plan et on considère le triangle de sommets $A(-11,-4), B(1,1), C(4,-3)$.

   a) Quelle est la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$, exprimée sous la forme d'un nombre rationnel (donner la forme fractionnaire) ? Justifiez votre réponse.

   b) Déterminez des équations paramétriques de la médiane issue du sommet B. Justifiez et expliquez votre raisonnement.

   c) Déterminez l'équation cartésienne de la médiatrice du côté AB. Justifiez et expliquez votre raisonnement.

   d) Déterminez l'équation cartésienne de la hauteur issue du sommet B. Justifiez et expliquez votre raisonnement.

   e) Représentez le triangle, la médiane, la médiatrice et la hauteur dont il est question ci-dessus.

2. Dans un plan, on fixe un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un point P quelconque.

   a) Une droite variable d passant par O rencontre $\mathcal{C}$ en deux points D et E. Démontrez que la valeur du produit scalaire de $\overrightarrow{PD}$ et $\overrightarrow{PE}$ reste constante lorsque d varie.

   b) Une droite variable d' passant par P rencontre $\mathcal{C}$ en deux points M et N. Démontrez que la valeur du produit scalaire de $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ reste constante lorsque d' varie.

SEPTEMBRE 2022

ALGEBRE

1. a) Factorisez le polynôme $z^6 - 1$ en polynômes à coefficients réels du premier ou du second degré.

   b) Donnez les racines complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 du polynôme $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ sous leur forme algébrique ou trigonométrique.

c) Quel est le nombre $w = z_1^{30} + z_2^{30} + z_3^{30} + z_4^{30} + z_5^{30}$?

2. Les nombres de Fibonnacci F_n (avec $n \in \mathbb{N}$) sont définis par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{et} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Montrez que la somme des n premiers nombres de Fibonacci à indices impairs est donnée par la formule

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}, \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

3. Vous créez un code PIN à 4 chiffres. Combien y a-t-il de choix dans les cas suivants ?
   a) Sans restriction.
   b) Aucun chiffre n'est répété.
   c) Aucun chiffre n'est répété et le deuxième chiffre est un 0.
   d) Aucun chiffre n'est répété et ils doivent apparaître dans l'ordre décroissant.
   e) Aucun chiffre n'est répété et les chiffres 6 et 9 doivent être présents.

   Remarque. Exprimez vos réponses sous la forme d'un calcul faisant intervenir les opérations mathématiques de base (addition, soustraction, multiplication, division, puissance, factorielle). Expliquez clairement le raisonnement qui mène à vos réponses.

ANALYSE

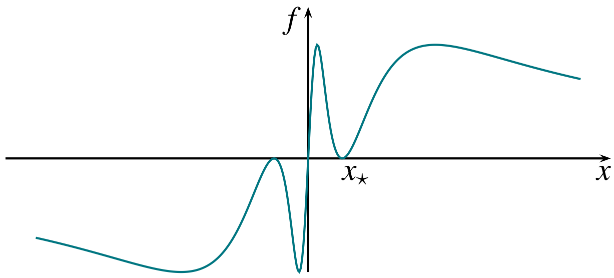
1. On considère la fonction

$$f(x) = \sin\left(\frac{2\beta x}{1+x^2}\right)$$

où β désigne un paramètre réel strictement positif.

   A. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de β,
      a) déterminez le domaine de définition de f ;
      b) étudiez la parité de la fonction ;
      c) déterminez les éventuelles asymptotes de son graphique ;
      d) calculez f'.

B. Déterminez toutes les valeurs de β pour lesquelles la fonction f s'annule en un point d'abscisse $x_\star > 0$ où f présente également un minimum local, comme sur le graphique ci-dessous.



2. A. Évaluez chacune des expressions suivantes :

   a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

   c) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

   d) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

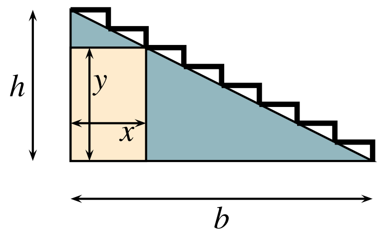
   B. Calculez

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

   où R désigne un paramètre strictement positif et interprétez graphiquement cette intégrale.

3. On souhaite installer une porte rectangulaire sous un escalier afin d'y aménager un débarras (ou une chambre pour Harry Potter). Quelles sont la surface maximale de la porte pouvant être installée sous l'escalier et les dimensions x et y correspondantes ?

   On assimilera l'espace sous l'escalier à un triangle de base b et de hauteur h, en ignorant la géométrie des marches.



TRIGONOMETRIE ET CALCUL NUMERIQUE

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique suivante en précisant les conditions d'existence :

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$$

   Représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

2. Si A, B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré et a, b et c les longueurs des côtés opposés, démontrer que :

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

3. Soit l'engrenage constitué de 12 dents représenté à la figure ci-dessous. Chaque dent possède un angle d'ouverture $\alpha = 30°$ et un sommet constitué d'un arc de cercle de rayon $r_1 = 2\,\text{mm}$ (les côtés rectilignes de la dent sont tangents à l'arc de cercle aux points de contact). Le rayon extérieur de l'engrenage est $r_e = 40\,\text{mm}$. La jonction entre chaque dent est faite d'un arc de cercle de rayon r_2 (les côtés de la dent sont tangents à cet arc de cercle aux points de contact). Déterminer la valeur de r_2 de manière à ce que la hauteur e des dents soit exactement de $12\,\text{mm}$.

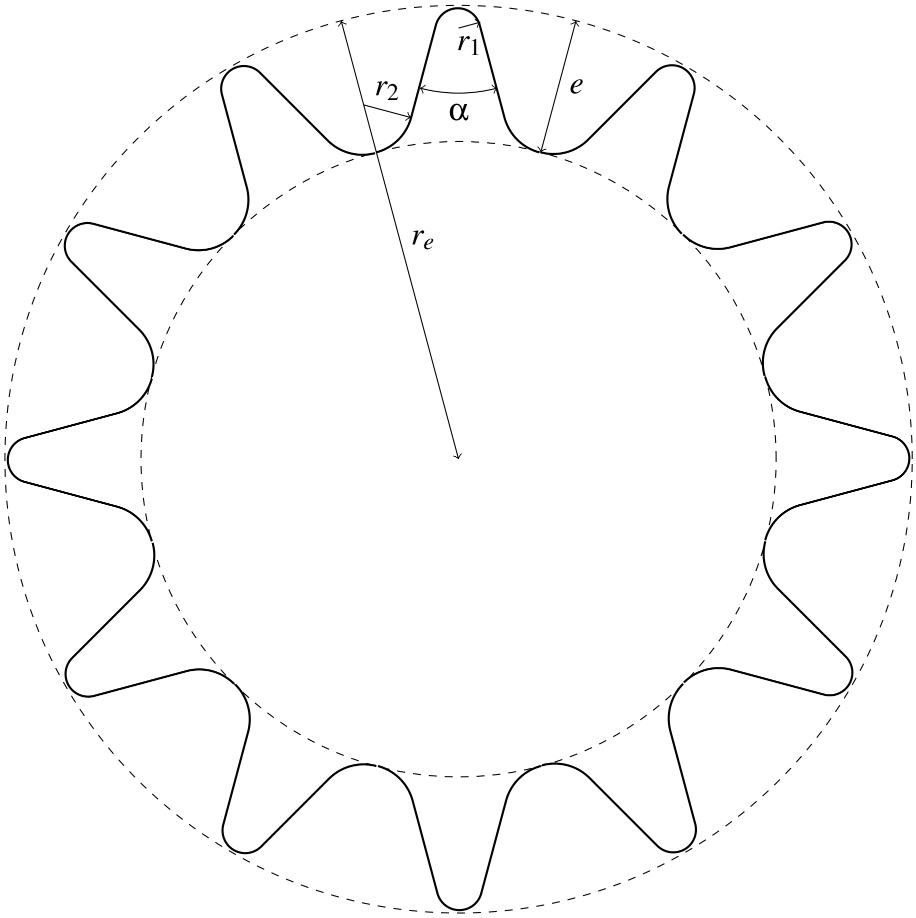


FIGURE 7 L’engrenage à 12 dents - Vue d’ensemble.

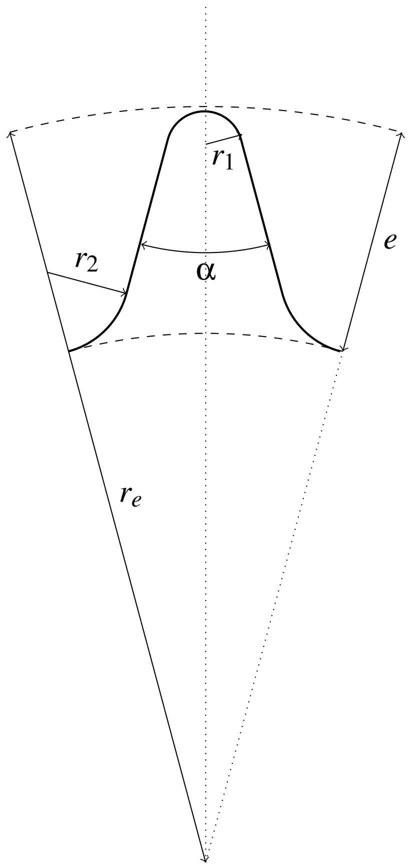


FIGURE 8 L'engrenage à 12 dents - Détail d'une dent.

GEOMETRIE ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

1. On se place dans un repère orthonormé du plan et on considère le triangle de sommets $A(-2,-2)$, $B(-1,2)$, $C(3,1)$.
   a) Démontrez que le triangle ABC est un triangle rectangle.
   b) Quelle est l'équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ? Justifiez votre réponse, expliquez votre raisonnement.
   c) Représentez le triangle ABC ainsi que le cercle circonscrit demandé.

2. Dans le plan, on donne un rectangle $EFGH$ et un réel k différent de 0 et de 1.

   a) Démontrez l'égalité (note : la notation $\bullet$ désigne le produit scalaire)

   $$\overrightarrow{EO}\bullet\overrightarrow{OG} \;=\; \overrightarrow{FO}\bullet\overrightarrow{OH}$$

   où O est un point quelconque du plan.

   b) On définit les points M,P,Q par

   $$\overrightarrow{EM} = k\overrightarrow{EH}, \quad \overrightarrow{FP} = k\overrightarrow{FH}, \quad \overrightarrow{QG} = (1-k)\overrightarrow{FG}.$$

   Démontrez que les points M,P,Q sont alignés. Justifiez votre réponse, expliquez votre raisonnement.

   c) On définit aussi le point N par

   $$\overrightarrow{NG} = \frac{1-k}{k}\,\overrightarrow{EN}.$$

   Démontrez que le point N est aligné aussi avec M,P,Q. Justifiez votre réponse, expliquez votre raisonnement.

Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées
Institut de Mathématique - Bât. B37
Quartier Polytech 1
Allée de la Découverte, 12
4000 - LIEGE 1

Tél. : 04/366.94.36.
Email : Axelle.Lambotte@uliege.be

http ://www.facsa.uliege.be/admission