Université de Liège

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil

Géométrie et géométrie analytique
Corrigé de l'examen de seconde session 2023

Question 1

Dans l'espace, on donne quatre points (distincts) A, B, C, D et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ suivants

$$\vec{u} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC}, \quad \vec{v} = 2\overrightarrow{BA} - 6\overrightarrow{BC}.$$

1.1) Exprimer $\vec{u}$ sans utiliser D.
1.2) Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles.

Exemple de résolution.
1.1) Vu la relation de Chasles, on a

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$$

donc

$$\vec{u} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC}.$$

1.2) On obtient ainsi

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{BA} - 6\overrightarrow{BC} = 2\vec{u},$$

ce qui montre que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles.

Question 2

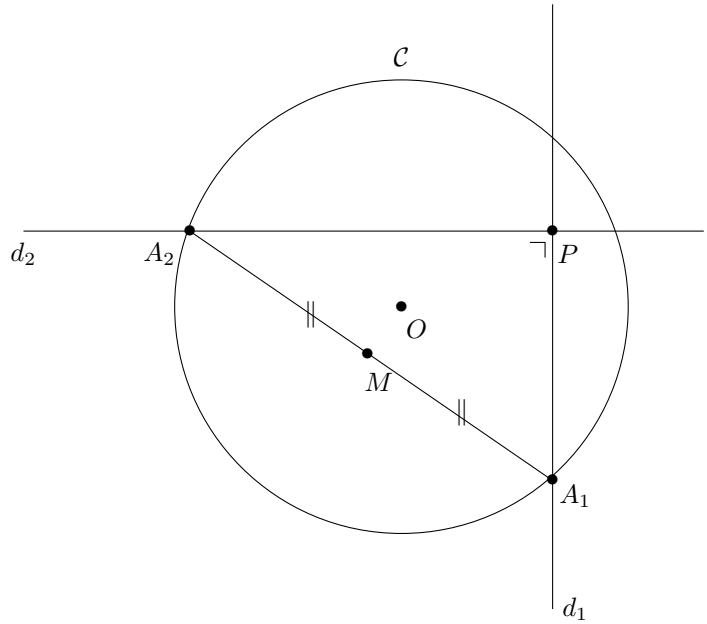
On se place dans le plan. Par un point P intérieur à un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r, on mène deux droites orthogonales d_1 et d_2. On note A_1 un des points d'intersection de d_1 avec $\mathcal{C}$, et A_2 un des points d'intersection de d_2 avec $\mathcal{C}$. Le milieu du segment $[A_1A_2]$ est noté M.

2.1) Donner une représentation graphique claire et précise des données.
2.2) Démontrer l'égalité

$$|OM|^2 + |PM|^2 = r^2,$$

où $|XY|$ désigne la longueur du segment $[XY]$.

Exemple de résolution.
2.1) On a la représentation suivante.



2.2) Les segments $[OA_1]$ et $[OA_2]$ ont même longueur, à savoir le rayon r du cercle ; le triangle A_1OA_2 est donc isocèle. La médiane OM de ce triangle A_1OA_2 est donc également sa hauteur. Il s'ensuit que le triangle OMA_1 est rectangle en M. On a donc (Pythagore)

$$r^2 = |OA_1|^2 = |OM|^2 + |MA_1|^2.$$

Cela étant, le triangle A_1PA_2 est rectangle en P (puisque les droites d_1 et d_2 sont orthogonales). La droite PM étant la médiane de ce triangle issue de P, la longueur du segment $[PM]$ est égale à la moitié de celle de l'hypothénuse $[A_1A_2]$, ou encore à la longueur du segment $[MA_1]$. On a donc finalement

$$r^2 = |OM|^2 + |MA_1|^2 = |OM|^2 + |PM|^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Université de Liège

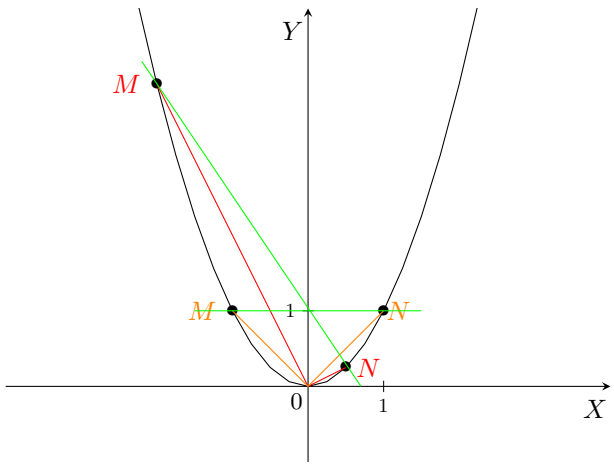
Examen d'admission aux études d'ingénieur civil

Géométrie et géométrie analytique
Corrigé de l'examen de juillet 2023

Question 1

On se place dans un repère orthonormé du plan, d'origine O, et on donne la courbe $\mathcal{P}$ (parabole) d'équation cartésienne $y = x^2$. On considère alors les droites d qui coupent $\mathcal{P}$ en deux points M, N (différents de l'origine) de telle sorte que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux. Démontrer que les droites d passent par un point fixe, à déterminer.

Exemple de résolution.



Comme N et M sont des points de $\mathcal{P}$ différents de l'origine, leurs coordonnées s'écrivent (λ, λ^2) et (μ, μ^2) où λ, μ sont des réels non nuls. Par ailleurs, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ devant être orthogonaux, on doit avoir

$$0 \;=\; \overrightarrow{OM} \bullet \overrightarrow{ON} \;=\; \lambda\mu + \lambda^2\mu^2$$

c'est-à-dire

$$\lambda\mu = -1$$

puisque $\lambda\mu \neq 0$.

Cela étant, la droite passant par M et N a pour équation cartésienne

$$\frac{x-\lambda}{\mu-\lambda} \;=\; \frac{y-\lambda^2}{\mu^2-\lambda^2}.$$

On a alors successivement

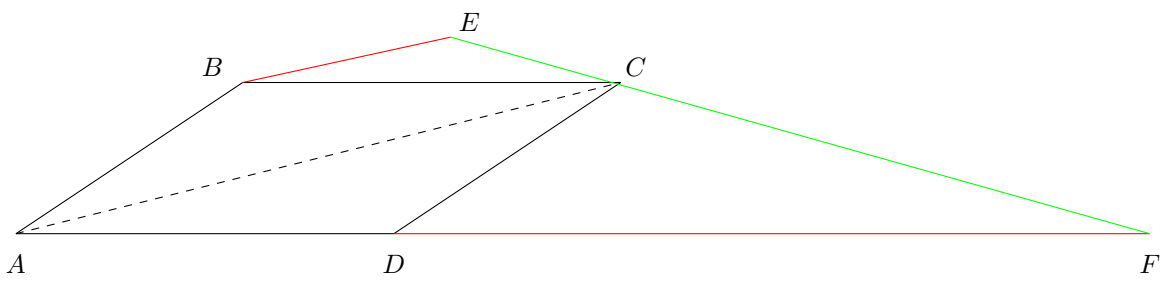
$$\begin{aligned}
\frac{x-\lambda}{\mu-\lambda} \;=\; \frac{y-\lambda^2}{\mu^2-\lambda^2} \quad &\Leftrightarrow \quad x-\lambda \;=\; \frac{y-\lambda^2}{\mu+\lambda} \\
&\Leftrightarrow \quad x-\lambda \;=\; \frac{y-\lambda^2}{(-1/\lambda)+\lambda} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(-\frac{1}{\lambda}+\lambda\right)(x-\lambda) \;=\; y-\lambda^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(-\frac{1}{\lambda}+\lambda\right)x-\lambda^2+1 \;=\; y-\lambda^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(-\frac{1}{\lambda}+\lambda\right)x \;=\; y-1.
\end{aligned}$$

La dernière forme de l'équation montre que le point de coordonnées $(0,1)$ est sur chacune des droites MN puisque ses coordonnées vérifient bien l'équation.

Question 2

On se place dans le plan et on considère un parallélogramme $ABCD$. On définit alors les points E et F par $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}/3$.
(a) Donner une représentation graphique des données.
(b) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
(c) En déduire que les points C, E, F sont alignés.

Exemple de résolution.
(a) On a la représentation suivante.



(b) On a tout d'abord

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC};$$

ensuite, comme $ABCD$ est un parallélogramme, on a

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

On obtient ainsi

$$\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$$

De manière analogue, on a

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CA} + 3\,\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + 3\,\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD}.$$

(c) Par le point précédent, on obtient

$$\overrightarrow{CE} \;=\; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \;=\; -\frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD}\right) \;=\; -\frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$$

ce qui implique que les trois points C, E, F sont alignés.