ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
EXAMEN À BLANC
SOLUTION TYPE ET COMMENTAIRES SUR LES ERREURS FRÉQUENTES

Avril 2024

Durée de l'épreuve : 3 heures 30.
Les calculatrices sont interdites pour ce test.

Question I

i. Un cours de danse de salon est fréquenté par six filles et sept garçons. Combien y a-t-il de façons de créer quatre couples mixtes appelés à prendre place sur la piste de danse en même temps ? Justifiez.

ii. Soient A et B deux événements avec $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.45$ et $P(A \cap B) = 0.1$. Que valent $P(A^{\complement} \cap B)$ et $P(A^{\complement} \cup B)$?
Note : L'événement $A^{\complement}$ (aussi noté $\complement_{\Omega} A$ ou parfois $\overline{A}$) est le complémentaire de A dans l'univers Ω.

iii. Montrez algébriquement que pour tous les entiers positifs n et k avec $n \geq k$,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

Interprétez pourquoi les deux membres de cette égalité comptent la même chose.
Suggestion : Imaginez $n+1$ personnes, dont l'une d'entre elles est pré-désignée comme "président".

Question II

Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$$

Question III

Le mouvement d'une particule se déplaçant dans un champ de force centrale particulier peut être étudié à partir du potentiel

$$V(r) = \frac{h^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r}$$

où $r > 0$ est une variable réelle représentant la distance de la particule par rapport au centre de force, $h > 0$ est une constante fixée représentant le moment cinétique par unité de masse de la particule et μ désigne un paramètre réel.

Étudiez le graphe de la fonction $V(r)$ <u>sur le domaine $r > 0$</u> en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre μ. Plus précisément,

i. déterminez les zéros de la fonction V ;

ii. déterminez les éventuelles asymptotes de son graphe ;

iii. étudiez la croissance/décroissance de V et caractérisez ses éventuels extrema ;

iv. esquissez le graphique de V en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

Question IV

On considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

i. Calculez I_0.

ii. Calculez I_1.

iii. Calculez I_2.

iv. Calculez I_4.

v. Montrez que

$$I_n = f(n) - I_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

où $f(n)$ est une fonction de n à déterminer.

SOLUTION TYPE

Avertissement : Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Le choix de la méthode est libre pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.

Question I

i. Nous allons construire les couples mixtes en plusieurs étapes et compter le nombre de possibilités à chaque étape.

(a) Choisissons 4 filles : C_6^4.

(b) Choisissons 4 garçons : C_7^4.

(c) Choisissons un des 4 garçons pour la première fille : 4.

(d) Choisissons un des 3 garçons restant pour la deuxième fille : 3.

(e) Choisissons un des 2 garçons restant pour la troisième fille : 2.

(f) Choisissons le dernier garçon pour la dernière fille : 1.

Le nombre total de possibilités est

$$C_6^4 \cdot C_7^4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = C_6^4 \cdot C_7^4 \cdot 4!$$

ii. L'évènement B est l'union disjointe de $A \cap B$ et $A^{\complement} \cap B$ (voir schéma ci-dessous). Nous avons donc

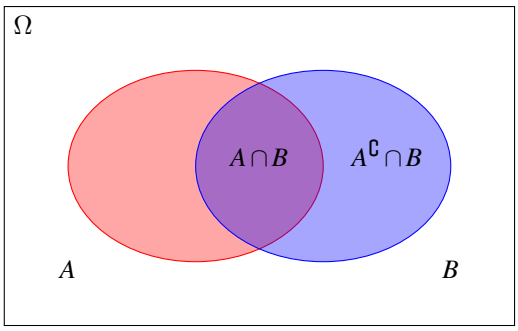
$$P(A \cap B) + P(A^{\complement} \cap B) = P(B)$$

et donc aussi

$$P(A^{\complement} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.45 - 0.10 = 0.35$$

En appliquant le principe d'inclusion-exclusion à deux évènements, nous avons

$$\begin{aligned} P(A^{\complement} \cup B) &= P(A^{\complement}) + P(B) - P(A^{\complement} \cap B) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(A^{\complement} \cap B) \\ &= 1 - 0.25 + 0.45 - 0.35 \\ &= 0.85 \end{aligned}$$



iii. Pour la preuve algébrique, nous commençons par insérer la définition des coefficients binomiaux dans le membre de gauche et nous effectuons ensuite quelques manipulations algébriques de la

manière suivante :

$$\begin{aligned}
C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n-k+1)n! + k \cdot n!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= C_{n+1}^k
\end{aligned}$$

Pour l'interprétation, considérons $n+1$ personnes, dont une pré-désignée comme "président". Le membre de droite représente le nombre de façons de choisir k personnes parmi ces $n+1$ personnes, l'ordre n'ayant pas d'importance. Le membre de gauche compte la même chose d'une manière différente, en considérant deux cas : le président est ou n'est pas dans le groupe choisi. Le nombre de groupes de taille k qui incluent le président est C_n^{k-1}, puisqu'une fois que nous avons fixé le président comme membre du groupe, il nous suffit de choisir $k-1$ autres membres parmi les n personnes restantes. De même, il existe C_n^k groupes de taille k qui n'incluent pas le président. Ainsi, les deux côtés de l'équation sont égaux.

Question II

Posons $z = x + iy$ avec x et y des réels. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
z^2 + 2\bar{z} + 1 &= (x+iy)^2 + 2(x-iy) + 1 \\
&= x^2 + 2ixy - y^2 + 2x - 2iy + 1 \\
&= (x^2 - y^2 + 2x + 1) + i(2xy - 2y)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation complexe $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$ est équivalente au système réel

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases}$$

La seconde équation s'écrit $2y(x-1) = 0$ et est donc équivalente à $y = 0$ ou $x = 1$. Si $y = 0$, la première équation donne

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

Si $x = 1$, la première équation donne

$$1 - y^2 + 2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 2$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\{-1, 1+2i, 1-2i\}$$

Question III

Soit

$$V(r) = \frac{h^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r}$$

i. Les zéros éventuels de la fonction sont les solutions de

$$\frac{h^2 - 2\mu r}{r^2} = 0$$

Cette équation possède une solution unique $r_1 = \dfrac{h^2}{2\mu}$ si $\mu \neq 0$. Cette solution appartient au domaine admissible $]0, +\infty[$ et ne doit donc être prise en compte que si $\mu > 0$.

ii.
- On calcule

$$\lim_{r \to 0^+} V(r) = \lim_{r \to 0^+} \frac{h^2 - 2\mu r}{r^2} = +\infty$$

de sorte que le graphique admet une asymptote verticale en $r = 0$ quel que soit μ.
- Le calcul de

$$\lim_{r \to +\infty} V(r) = \lim_{r \to +\infty} \frac{h^2 - 2\mu r}{r^2} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } \mu \leq 0 \\ 0^- & \text{si } \mu > 0 \end{cases}$$

indique que le graphique possède une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ et que cette asymptote est approchée par le dessus si $\mu \leq 0$ et par le dessous si $\mu > 0$.
- Vu la présence de l'asymptote horizontale, il n'y a pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

iii. On calcule

$$V'(r) = -\frac{2h^2}{r^3} + \frac{2\mu}{r^2} = \frac{-2h^2 + 2\mu r}{r^3}$$

- Si $\mu \leq 0$, $V'(r) < 0$ sur tout le domaine de sorte que la fonction est strictement décroissante et ne présente aucun extremum.

- Si $\mu > 0$, $V'(r) = 0$ en $r_2 = h^2/\mu$. On dresse alors le tableau des variations suivant :

r		r_2	
$V'(r)$	$-$	0	$+$
$V(r)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

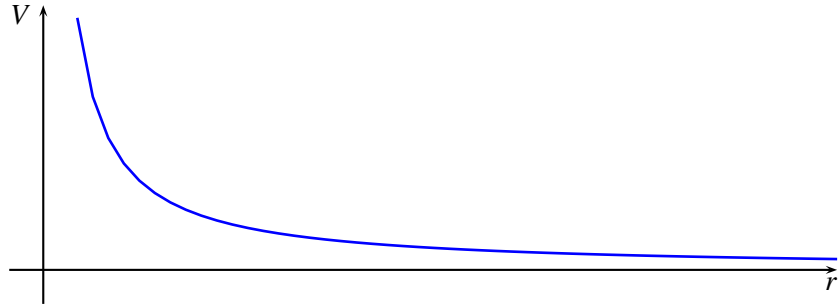
Ce tableau indique que la fonction présente un minimum en r_2 puisqu'elle est décroissante à gauche et croissante à droite de ce point.

La valeur minimale de la fonction V est donnée par $V(r_2) = -\mu^2/h^2$.

iv. Le graphique peut alors être tracé dans les différents cas en vertu des éléments déterminés ci-dessus :

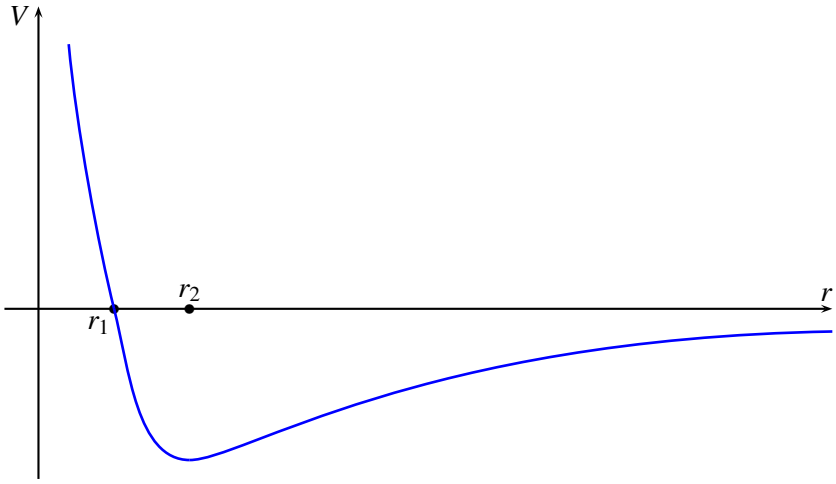
Dans le cas où $\mu \leq 0$:

- Domaine : $]0, +\infty[$
- Pas de zéro.
- Asymptote horizontale en $+\infty$ approchée par le dessus.
- Asymptote verticale $r = 0$ avec $V(r) \to +\infty$.
- Fonction décroissante sur tout le domaine.



Dans le cas où $\mu > 0$:

- Domaine : $]0, +\infty[$
- Zéro en r_1.
- Asymptote horizontale en $+\infty$ approchée par le dessous.
- Asymptote verticale $r = 0$ avec $V(r) \to +\infty$.
- Minimum en $r_2 > r_1$.



Question IV

i.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

ii.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

iii.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left[x - \operatorname{arctg} x\right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

iv. Afin de calculer I_4, on remarque d'abord que l'intégrande peut être transformé par division polynomiale selon

$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{x^2(1+x^2)-x^2}{1+x^2} = x^2 - \frac{x^2}{1+x^2}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{1+x^2}\right)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - I_2 = \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

v. Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$$

Pour tout $n \geq 2$, l'intégrande peut être transformé selon

$$\frac{x^n}{1+x^2} = \frac{x^{n-2}(1+x^2)-x^{n-2}}{1+x^2} = x^{n-2} - \frac{x^{n-2}}{1+x^2}$$

Dès lors

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \left(x^{n-2} - \frac{x^{n-2}}{1+x^2}\right)\,dx \\ &= \left[\frac{x^{n-1}}{n-1}\right]_0^1 - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} - I_{n-2} \end{aligned}$$

Ceci correspond bien à la formule annoncée

$$I_n = f(n) - I_{n-2}, \qquad n \geq 2$$

avec

$$f(n) = \frac{1}{n-1}$$

Remarquons que les réponses obtenues plus haut sont bien compatibles avec la formule générale établie. On a en effet

$$I_2 = 1 - I_0 \qquad \text{et} \qquad I_4 = \frac{1}{3} - I_2$$

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Les copies corrigées manquent souvent de justifications. Il est indispensable de justifier les réponses données. Ceci peut être fait par un calcul, par l'énoncé d'une formule, par une phrase expliquant le raisonnement effectué, ... Une réponse correcte donnée sans justification n'est pas complète. Dans de nombreux cas, les grilles de correction prévoient la valorisation d'éléments de raisonnement. C'est un moyen d'obtenir quelques points même si la réponse finale est fausse. Par contre, si le raisonnement n'est pas explicité, une telle valorisation n'est pas possible.

Les copies corrigées sont parfois très peu soignées. Il faut veiller à écrire lisiblement et à rendre des copies propres. Il s'agit d'une marque de respect pour les correcteurs mais aussi de la façon de s'assurer que ce qui est écrit sera bien compris.

Question I

i.
- Dans la majorité des cas, les étudiants qui sont passés par le développement

$$C_7^4 \cdot C_6^4 \cdot 4!$$

n'ont pas considéré la formation des couples et ont donc oublié le facteur 4!.
- Dans beaucoup de cas, ceux qui sont passés par le développement

$$\frac{A_7^4 \cdot A_6^4}{4!}$$

ont oublié de retirer les ensembles de couples identiques comptés plusieurs fois (oubli de diviser par 4!, ou même parfois calcul de $4! \cdot A_7^4 \cdot A_6^4$).

ii.
- Les évènements A (ou $A^{\complement}$) et B n'étaient pas indépendants. Ainsi,

$$P(A^{\complement} \cap B) \neq P(A^{\complement}) \cdot P(B).$$

- Une probabilité doit être comprise entre 0 et 1. Cette vérification élémentaire permet d'identifier d'éventuelles incohérences du raisonnement.
- Oubli de $-P(A^{\complement} \cap B)$ dans $P(A^{\complement} \cup B) = P(A^{\complement}) + P(B) - P(A^{\complement} \cap B)$. Les événements dans $A^{\complement} \cap B$ sont comptés 2 fois avec $P(A^{\complement}) + P(B)$ donc il faut les retirer 1 fois.

iii. La démonstration a été bien faite dans la plupart des copies, mais seuls quelques étudiants ont donné une interprétation correcte (très peu d'étudiants en ont donné une en fait).

Question II

- Dans la résolution du système linéaire, la deuxième équation est souvent simplifiée trop précipitamment. La partie imaginaire y pourrait aussi valoir 0 et diviser par 0 n'est pas admissible.
- Étant donné que $\bar{z} = x - iy \neq z = x + iy$ en général, on ne peut donc pas calculer directement le discriminant Δ.
- Oubli de $\pm$ quand on prend la racine carrée.
- Erreur de calcul (facteur 2 manquant, $+$ au lieu d'un $-$, ...).
- Pas de réponse finale récapitulative.

Question III

i.
- De trop nombreuses erreurs ont été commises en tentant d'exprimer $V(r)$ sous la force d'une fraction unique afin d'en déterminer les zéros.
- La discussion en fonction du paramètre μ s'imposait dès ce premier item puisque le zéro $r_1 = h^2/2\mu$ n'appartient au domaine admissible que pour $\mu > 0$.
- Ce n'est pas parce que le zéro r_1 n'existe pas si $\mu = 0$ et n'appartient pas au domaine admissible si $\mu < 0$ que la fonction n'est pas définie pour ces valeurs de μ. Elle a simplement une autre allure que pour $\mu > 0$ puisqu'elle ne présente en particulier aucun zéro.

ii.
- Quand une limite est infinie, comme ici la limite pour x tendant vers 0^+, il convient de préciser si cette limite vaut $+\infty$ ou $-\infty$ car cela donne des informations précieuses sur l'allure du graphique.
- Quand on détecte une asymptote horizontale, il est opportun de déterminer si la fonction approche cette asymptote par au-dessus ou par en dessous. Ici, cette approche dépend du paramètre μ. On obtient encore un comportement différent pour $\mu \leq 0$ et $\mu > 0$.
- Il ne faut rechercher la présence d'asymptotes horizontales que si le domaine s'étend jusqu'à $+\infty$ et/ou $-\infty$. Ici, le domaine admissible étant $]0, +\infty[$, il ne fallait pas rechercher d'asymptote horizontale en $-\infty$.
- Vu l'existence d'une asymptote horizontale en $+\infty$, il ne fallait pas envisager celle d'une asymptote oblique.

iii.
- Ici aussi, l'étude du signe de la dérivée $V'(r)$ amenait une discussion en fonction du paramètre μ. Dans le cas $\mu \leq 0$, la dérivée est strictement négative sur $]0, +\infty[$ alors que dans le cas $\mu > 0$, la dérivée s'annule en un point et change de signe de part et d'autre de ce point.
- Quand une fonction présente un extremum, il faut calculer sa valeur en ce point.
- Il ne faut pas confondre la valeur minimale de la fonction et le point où cette valeur est atteinte.

iv.
- Les graphiques présentés doivent correspondre aux caractéristiques de la fonction qui ont été déterminées. Si on ne peut réconcilier dans le graphique les différentes caractéristiques identifiées par le calcul des limites et des dérivées, c'est souvent le signe d'une erreur dans le calcul de ces éléments.
- Il est important de noter les valeurs remarquables des abscisses, voire des valeurs de la fonction, sur les axes des graphiques.

Question IV

- L'intégrale d'une fonction réelle est un nombre réel unique. Une intégrale n'est pas définie à une constante près.
- En analyse, on travaille en radians, pas en degrés. On écrira donc $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$ et non $\operatorname{arctg} 1 = 45°$.
- Il ne faut jamais donner une valeur approchée d'un résultat. On ne doit pas fournir une écriture décimale de $\pi/4$, $\sqrt{2}$,...
- Il faut simplifier les réponses obtenues en utilisant les valeurs connues des fonctions : $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\ln 1 = 0$, ...
- Rappelons que l'intégrale d'un produit de fonctions n'est pas égale au produit des intégrales de ces fonctions.

i. La fonction $1/(1+x^2)$ est la dérivée de la fonction $\operatorname{arctg} x$, pas celle de $\arcsin x$.

ii. Quand un changement de variable est utilisé pour calculer une intégrale, il ne faut pas oublier d'appliquer aussi ce changement de variable aux bornes d'intégration.

Si le changement de variable est utilisé pour calculer une primitive qu'on fait ensuite varier entre les bornes d'intégration, il faut soit écrire la primitive en fonction de la variable initiale et utiliser les bornes initiales, soit garder l'expression de la primitive en fonction de la nouvelle variable et

utiliser les bornes adaptées par le changement de variable. On ne peut par contre panacher entre les expressions initiales et transformées de la variable et des bornes d'intégration.

iii.
- De nombreux essais de calcul par parties de cette intégrale ont été tentés. Il ne s'agissait pas de la voie à suivre. La fonction à intégrer étant une fraction rationnelle, il fallait commencer par effectuer la division polynomiale.
- Lors de ces tentatives infructueuses, la formule d'intégration par parties est souvent mal utilisée. Pour rappel, on a
$$\int_a^b fg'\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'g\,dx$$
Dans
$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$
de trop nombreux étudiants considèrent $f(x) = 1+x^2$ et $g'(x) = x^2$ au lieu de $f(x) = 1/(1+x^2)$ et $g'(x) = x^2$.

iv. Mêmes erreurs qu'à l'item iii.

v.
- On demandait de déterminer la fonction $f(n)$, c'est-à-dire une fonction ne dépendant que de la variable entière n.
- On ne peut pas deviner l'expression de $f(n)$ en se basant sur les résultats correspondant à une valeur particulière de n.