Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Septembre 2018

Question 1 *Résoudre l'équation trigonométrique suivante :*

$$\sin x - 2\sin 3x + \sin 5x = -\cos 2x + \cos 4x$$

et représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, +\pi[$ *sur le cercle trigonométrique.*

Solution

En appliquant les formules de Simpson à $\sin(x) + \sin(5x)$ dans le membre de gauche et à tout le membre de droite, l'équation devient

$$2\sin(3x)\cos(2x) - 2\sin(3x) = -2\sin(3x)\sin x. \quad \boxed{\text{A}} \tag{1}$$

En ramenant le membre de droite à gauche et en mettant $2\sin(3x)$ en évidence, (1) se réécrit

$$2\sin(3x)(\cos(2x) - 1 + \sin x) = 0. \quad \boxed{\text{B}} \tag{2}$$

En utilisant la formule de Carnot $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, l'équation devient

$$\begin{aligned} 2\sin(3x)(1 - 2\sin^2 x - 1 + \sin x) &= 0 \\ 2\sin(3x)\sin(x)(1 - 2\sin x) &= 0. \quad \boxed{\text{C}} \end{aligned} \tag{3}$$

Chaque facteur de (3) nous donne un ensemble de solutions. Nous avons donc

- $\sin(3x) = 0$ donnant $3x = k\pi$ soit $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\text{D}}$
- $\sin x = 0$ donnant $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\text{E}}$
- $1 - \sin(2x) = 0$ soit $\sin x = \frac{1}{2}$ donnant $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{\text{F}}$

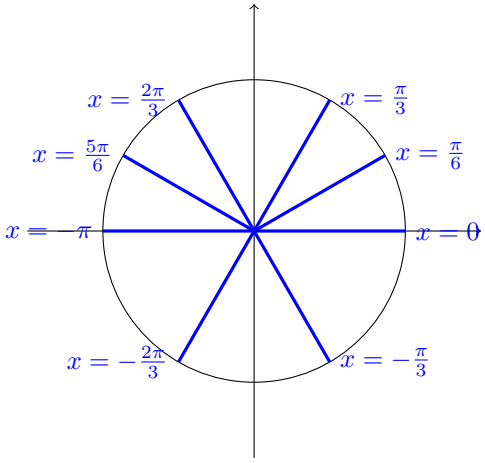


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

Question 2 *Montrer que si A, B, C sont trois angles strictement positifs tels que $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ alors*

$$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan A \tan C = 1.$$

Solution

On commence par remplacer les fonctions $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. On observe que, comme les angles sont strictement positifs, aucun de ceux-ci n'est égal à $\frac{\pi}{2}$ radians et, dès lors, toutes les fonctions tangentes sont définies. On peut donc réécrire l'équation comme

$$\frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} + \frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} + \frac{\sin A \sin C}{\cos A \cos C} = 1. \tag{4}$$

En mettant tout au même dénominateur, (4) peut s'écrire de manière équivalente comme

$$\frac{\sin A \sin B \cos C + \cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C}{\cos A \cos B \cos C} = 1. \tag{5}$$

Comme tous les $\cos x \neq 0$ (x représentant A, B ou C) par hypothèse, on peut réécrire (5) de manière équivalente comme

$$\sin A \sin B \cos C + \cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C - \cos A \cos B \cos C = 0. \tag{6}$$

Comme $A + B + C = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que $\cos C = \sin(A + B)$ et $\sin C = \cos(A + B)$. En remplaçant dans (6), on obtient donc les formes équivalentes

$$\begin{aligned} &\sin A \sin B \sin(A + B) + \cos A \sin B \cos(A + B) + \\ &\qquad \sin A \cos B \cos(A + B) - \cos A \cos B \sin(A + B) = 0 \end{aligned}$$

et

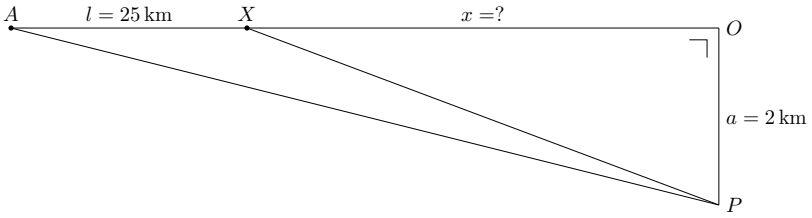
$$\cos(A + B)(\cos A \sin B + \sin A \cos B) + \sin(A + B)(\sin A \sin B - \cos A \cos B) = 0. \tag{7}$$

On observe que $\cos A \sin B + \sin A \cos B = \sin(A+B)$ et que $\sin A \sin B - \cos A \cos B = -\cos(A+B)$. Dès lors, (7) s'écrit de manière équivalente comme

$$\cos(A+B)\sin(A+B) - \sin(A+B)\cos(A+B) = 0. \tag{8}$$

L'équation (8) étant toujours vérifiée et comme toutes les opérations effectuées ont maintenu les équivalences entre les expressions, on en déduit que l'égalité à prouver est bien toujours vérifiée.

Question 3 *Un observateur situé en O dans un désert parfaitement plan est aligné avec deux éléments remarquables A et X séparés entre eux par une distance $l = 25\,\mathrm{km}$. Cet observateur cherche à déterminer la distance qui le sépare du point X en se déplaçant en P d'une distance $a = 2\,\mathrm{km}$ dans une direction perpendiculaire à l'axe AXO. De ce nouveau point de vue, il mesure l'angle $\widehat{XPA} = 1°6'0''$. Les angles seront calculés à la seconde près et les distances avec 5 chiffres significatifs.*



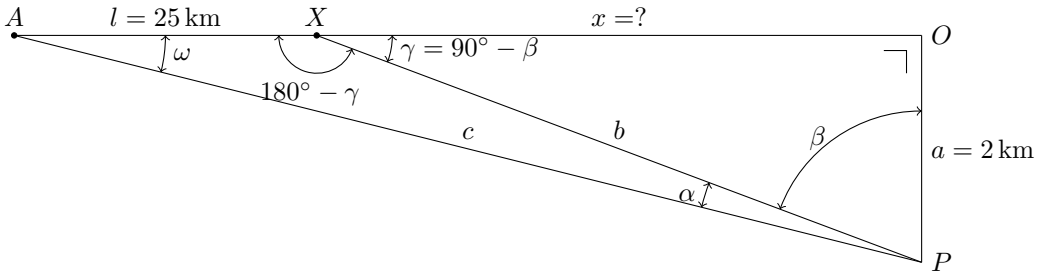
a *Déterminer l'angle $\widehat{PAO}$.*

b *Calculer la distance x entre les points O et X.*

c *Calculer la distance $\overline{PA}$.*

Solution

a Pour des raisons de facilité, définissons les angles α, β, γ et ω comme sur la figure ci-dessous :



Dans le triangle AXP quelconque, la règle des sinus nous donne :

$$\frac{l}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\omega} = \frac{c}{\sin(180° - \gamma)} \rightarrow \sin\omega = \frac{b\sin\alpha}{l} \quad \boxed{\text{A}}$$

Ensuite, dans le triangle rectangle XOP :

$$\sin\gamma = \frac{a}{b} \;\rightarrow\; b = \frac{a}{\sin\gamma} \quad \boxed{\text{B}}$$

En substituant cette valeur de b dans l'expression précédente, il vient :

$$\sin\omega = \frac{a\sin\alpha}{l\sin\gamma} \quad \boxed{\text{C}}$$

En notant que la somme des angles intérieurs du triangle AXP vaut 180°, il vient $\omega + 180° - \gamma + \alpha = 180° \;\rightarrow\; \gamma = \omega + \alpha$, nous obtenons l'équation suivante où seule la valeur de l'angle ω est inconnue :

$$\sin\omega = \frac{a\sin\alpha}{l\sin(\omega+\alpha)} \;\Leftrightarrow\; \sin\omega\sin(\omega+\alpha) = \frac{a\sin\alpha}{l} \quad \boxed{\text{D}}$$

Cette équation est résolue en utilisant la relation $2\sin a\sin b = \cos(a - b) - \cos(a+b)$ ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\left(\cos(\omega+\alpha-\omega) - \cos(\omega+\alpha+\omega)\right) = \frac{a\sin\alpha}{l} \;\Leftrightarrow\; \cos(2\omega+\alpha) = \cos\alpha - \frac{2a\sin\alpha}{l} \quad \boxed{\text{E}}$$

Ce qui donne :

$$2\omega + \alpha = \pm 4.6248° + k360°$$

Ne retenant que la solution positive inférieure à 360°, nous obtenons $\omega = 1.7624° = 1°45'44''$ $\boxed{\text{F}}$.

b Sachant que dans le triangle rectangle XOP :

$$\tan\gamma = \tan(\omega+\alpha) = \frac{a}{x} \;\rightarrow\; x = \frac{a}{\tan(\omega+\alpha)} = 40.000\,\text{km} \quad \boxed{\text{G}}$$

c En repartant de la relation des sinus dans le triangle AXP, nous avons :

$$c = \frac{l\sin(180° - \gamma)}{\sin\alpha} = \frac{l\sin(\omega+\alpha)}{\sin\alpha} = 65.031\,\text{km} \quad \boxed{\text{H}}$$

ATTENTION

- NOM (en MAJUSCULES), prénom (en minuscules) sur chaque feuille.
- Rendre une feuille par question même s'il n'y a pas de réponse.
- Spécifier les conditions d'existence.
- GSM et PC interdits.
- Il est permis d'utiliser une calculette.
- Préparer une pièce d'identité sur la table.
- Fin de l'examen à 12 heures.

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Juillet 2018

Question 1 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation homogène*

$$\sin^3 x + 2\cos^3 x = 3\sin^2 x \cos x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique. Les solutions trouvées ne sont pas toutes exprimables sous la forme d'angles remarquables. Il n'empêche qu'il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique sachant que $\sqrt{3} \simeq 1.732$.

Solution A

Nous sommes en présence d'une équation trigonométrique homogène d'ordre 3. La technique la plus efficace pour résoudre ce genre d'équation est de diviser les deux membres de l'équation par $\cos^3 x$. On vérifie évidemment que $\cos x = 0$ n'est pas solution de l'équation On a donc :

$$\tan^3 x - 3\tan^2 x + 2 = 0.$$

On transforme l'équation trigonométrique en une équation algébrique. On pose $y = \tan x$ et on écrit :

$$y^3 - 3y^2 + 2 = 0.$$

On trouve finalement :

$$(y-1)(y^2 - 2y - 2) = 0.$$

dont les solutions sont

$$y_{1,2,3} = \begin{cases} 1 \\ 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{cases}.$$

Les solutions de l'équation trigonométrique sont donc :

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{\arctan(1+\sqrt{3}) + k\pi\right\} \cup \left\{\arctan(1-\sqrt{3}) + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

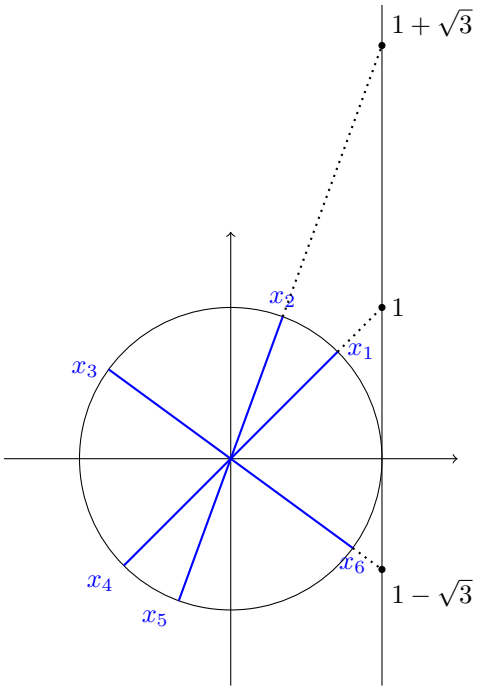


FIGURE 1 – Les 6 solutions $x_1, \ldots, x_6$ de l'équation sur le cercle trigonométrique

Solution B

On peut aussi diviser l'équation de départ par $\sin^3 x$ et vérifier que $\sin x = 0$ n'est pas solution. On obtient

$$2\cot^3 x - 3\cot^2 x + 1 = 0.$$

En posant $y = \cot x$, on a

$$2y^3 - 3y + 1 = 0$$

qui a comme solutions

$$y_{1,2,3} = \begin{cases} 1 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}.$$

qui sont les inverses des solutions en tangente $(1/(1+\sqrt{3}) = 1/2(\sqrt{3}-1))$.

Solution C

Si on pose

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

on trouve

$$(2t)^3 + 2(1-t^2)^3 = 3(2t)^2(1-t^2)$$

ou encore

$$-2t^6 + 18t^4 + 8t^3 - 18t^2 + 2 = 0.$$

qui donne les 6 solutions sur le cercle.

Question 2 *Si A, B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré, montrer que :*

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C$$

Solution

Utilisons tout d'abord la formule de Carnot $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ sur les deux premiers termes du membre de gauche :

$$\begin{aligned}
&\sin^2 A + \sin^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C \\
&\quad \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\cos 2A}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2B}{2} + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C \\
&\quad \Leftrightarrow 1 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C
\end{aligned}$$

En faisant usage de la formule de factorisation $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ et en notant que $\pi = A + B + C$, il vient :

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} + \cos^2 C = 1 + 2\sin A \sin B \cos C \\
&\quad \Leftrightarrow 1 - \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2(A+B) = 1 + 2\sin A \sin B \cos C \\
&\quad \Leftrightarrow -\cos(A+B)\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right] = 2\sin A \sin B \cos C \\
&\Leftrightarrow -\cos(A+B)\left[-2\sin\frac{A-B+A+B}{2}\ \sin\frac{A-B-A-B}{2}\right] = 2\sin A \sin B \cos C \\
&\quad \Leftrightarrow -\cos(\pi - C)\left[-2\sin\frac{2A}{2}\ \sin\frac{-2B}{2}\right] = 2\sin A \sin B \cos C \\
&\quad \Leftrightarrow 2\cos C \sin A\ \sin B = 2\sin A \sin B \cos C
\end{aligned}$$

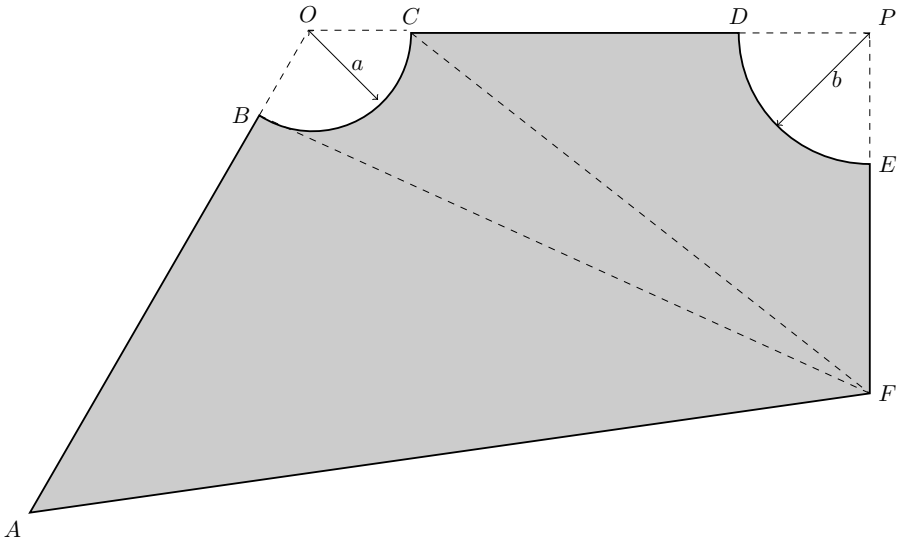
Ce qui démontre l'identité.

Question 3 *Dans le cas d'un quadrilatère quelconque plan, la connaissance de la longueur des quatre côtés et d'une diagonale suffit pour déterminer sa surface. Cependant, on désire ici carreler une pièce $ABCDEF$ dont la forme est celle représentée par la zone grisée de la figure ci-dessous. Les courbes BC et DE sont des arcs de cercle de centre O et P et de rayon a et b respectivement. Les segments rectilignes AB, CD, EF et AF mesurent respectivement* 7 m, 5 m, 3.5 m *et* 12.64 m. *Les deux segments BF et CF mesurent* 10.11 m *et* 8.90 m. *De plus, l'angle $\widehat{CPF}$ est droit. On demande de*

a Déterminer le rayon b de l'arc DE

b Déterminer le rayon a de l'arc BC.

c Calculer l'aire intérieure de la pièce représentée par la surface grisée $ABCDEF$.



Solution

(a) On travaille dans le triangle rectangle CPF. Si on y exprime le théorème de Pythagore , il vient

$$(|CD| + b)^2 + (|EF| + b)^2 = |CF|^2. \boxed{\text{A}}$$

En développant l'équation et en remplaçant par les valeurs connues, on a

$$\begin{aligned} b^2 + 10b + 25 + b^2 + 7b + 12.25 &= 79.21 \\ 2b^2 + 17b - 41.96 &= 0. \boxed{\text{B}} \end{aligned}$$

On calcule le discriminant $\Delta = 17^2 + 8 \cdot 41.96 = 624.68$.
On a donc les deux solutions

$$b = \frac{-17 \pm \sqrt{624.68}}{4} \approx 1.9984\ m, \boxed{\text{C}}$$

la solution négative étant à rejeter. $\boxed{\text{D}}$

(b) On calcule d'abord l'angle $\alpha := \widehat{BAF}$ en utilisant Pythagore généralisé (Al-Kashi). On a

$$|BF|^2 = |AB|^2 + |AF|^2 - 2 \cdot |AB||AF| \cos\alpha \boxed{\text{E}}$$

On a donc

$$\cos\alpha = \frac{|AB|^2 + |AF|^2 - |BF|^2}{2 \cdot |AB||AF|} \approx 0.6022,$$

ce qui nous donne une valeur de l'angle $\widehat{BAF}$ de 0.9246 radians ou 52.98 degrés.

Pour trouver a, on calcule la diagonale $|OF|$ de deux façons, à savoir, d'une part dans le triangle rectangle OPF, et d'autre part dans le triangle OAF. Dans le triangle OPF, on a

$$|OF|^2 = (a + |CP|)^2 + |PF|^2. \tag{1}$$

Dans le triangle OAF, on a

$$|OF|^2 = (|AB| + a)^2 + |AF|^2 - 2 \cdot (|AB| + a)|AF| \cos\alpha \tag{2}$$

. En égalisant (1) et (2), on obtient

$$(a + |CP|)^2 + |PF|^2 = (|AB| + a)^2 + |AF|^2 - 2 \cdot (|AB| + a)|AF| \cos\alpha \boxed{\text{F}}$$

qui, en développant (les a^2 se simplifient), devient

$$a(2 \cdot |AB| - 2 \cdot |AF| \cos\alpha - 2 \cdot |CP|) = |PF|^2 - |AF|^2 + 2 \cdot |AB||AF| \cos\alpha.$$

En remplaçant par les valeurs connues, on trouve

$$a \approx 1.5099\ m. \boxed{\text{G}}$$

(c) Il nous reste à calculer les aires des triangles OAF et OPF, les additionner et soustraire les aires des sections circulaires COB et DPE.

Nous calculons tout d'abord l'aire du triangle rectangle OPF qui vaut

$$\frac{1}{2}(a + b + |CD|)(b + |EF|) \approx 23.391\ m^2.$$

Le triangle OAF est quelconque et son aire se calcule comme

$$\frac{1}{2}(|AB| + a)|AF| \sin\alpha \approx 42.939\ m^2$$

Pour les sections circulaires, il convient de calculer leurs angles. On sait que $\widehat{DPE}$ vaut 90 degrés. L'aire de la section circulaire vaut donc

$$\frac{\pi b^2}{4} \approx 3.137\ m^2.$$

La valeur de l'angle $\widehat{BOC}$ peut être décomposé en la somme de l'angle $\widehat{BOF}$ et $\widehat{DOF}$. L'angle $\widehat{BOF}$ peut être calculé en appliquant la règle des sinus dans le triangle AOF. On a

$$\sin\widehat{BOF} = |AF|\frac{\sin\alpha}{|OF|},$$

où $|OF|$ peut être calculé grâce à Pythagore,

$$|OF| = \sqrt{(a + b + |CD|)^2 + (b + |EF|)^2} \approx 10.13\ m.$$

Dès lors $\sin \widehat{BOF} \approx 0.9962$ c'est-à-dire que $\widehat{BOF}$ mesure 84.98 degrés.
Par ailleurs, l'angle $\widehat{DOF}$ se trouve grâce au triangle rectangle POF,

$$\sin \widehat{POF} = \frac{b + |EF|}{|OF|} \approx 0.5428,$$

soit 32.87 degrés. L'aire de la section circulaire vaut donc

$$\pi a^2 \frac{84.98 + 32.87}{360} \approx 2.344 \ m^2.$$

Nous obtenons donc finalement que l'aire de la pièce vaut approximativement

$$23.391 + 42.939 - 2.344 - 3.137 \approx 60.85 \ m^2.$$

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Juillet 2019

Question 1 *Montrer que, si la relation suivante liant les mesures des trois angles A, B et C d'un triangle est vérifiée*

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$$

alors, A, B ou C vaut $120°$.

Solution

En notant que $\pi = A+B+C$ et en faisant usage de la formule de factorisation :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2},$$

l'identité initiale peut être mise sous la forme :

$$2\cos\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2} + \cos\left[3\pi - 3(A+B)\right] = 1.$$

En utilisant la formule de duplication des arcs $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, il vient :

$$2\cos\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2} + 2\cos^2\left[\frac{3\pi}{2} - \frac{3(A+B)}{2}\right] - 1 = 1$$

Ensuite, il suffit de noter que $\cos^2\left[\frac{3\pi}{2} - \frac{3(A+B)}{2}\right] = \sin^2\frac{3(A+B)}{2} = 1-\cos^2\frac{3(A+B)}{2}$ et nous obtenons la relation suivante qui peut être factorisée aisément :

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{3(A+B)}{2}\cos\frac{3(A-B)}{2} - \cos^2\frac{3(A+B)}{2} = 0\\
&\qquad\Leftrightarrow\ \cos\frac{3(A+B)}{2}\left[\cos\frac{3(A-B)}{2} - \cos\frac{3(A+B)}{2}\right] = 0\\
&\Leftrightarrow\ \cos\frac{3(A+B)}{2}\sin\frac{3A-3B+3A+3B}{4}\sin\frac{3A-3B-3A-3B}{4} = 0\\
&\qquad\qquad\Leftrightarrow\ \cos\frac{3(A+B)}{2}\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2} = 0
\end{aligned}$$

Cette équation est satisfaite pour les conditions suivantes :

— $\cos\dfrac{3(A+B)}{2} = 0$, ce qui entraine $\dfrac{3(A+B)}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow A+B = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow C = \pi - (A+B) = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} = 120°$.

— $\sin\dfrac{3A}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{3A}{2} = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$ (à rejeter) ou $\dfrac{3A}{2} = \pi \;\Rightarrow\; A = 120°$ et

— $\sin\dfrac{3B}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{3B}{2} = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$ (à rejeter) ou $\dfrac{3B}{2} = \pi \;\Rightarrow\; B = 120°$.

Question 2 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation*

$$4\,(\sin x + \cos x) - 8\sin x\cos x = 5$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique. Noter que bien que les solutions trouvées ne soient pas exprimables sous la forme d'angles remarquables, il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique.
Suggestion pour résoudre l'équation : *poser* $y = \sin x + \cos x$

Solution

Méthode 1

Posons

$$y = \sin x + \cos x$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad y^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + 2\sin x\cos x \\ &\Rightarrow \quad 2\sin x\cos x = y^2 - 1. \qquad [1pt] \end{aligned}$$

L'équation à résoudre se réécrit

$$\begin{aligned} 4y - 4(y^2-1) = 5 \quad &\Leftrightarrow \quad y^2 - y + \frac{1}{4} = 0 \qquad [2pt] \\ &\Leftrightarrow \quad \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par définition de y, on obtient donc comme nouvelle équation à résoudre

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2}. \quad [1pt] \tag{1}$$

Tenant compte de l'égalité $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \sin x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{1}{2} && [1pt] \\
&\Leftrightarrow \quad \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} && [1pt] \\
&\Leftrightarrow \quad x + \frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \\
&\text{ou} \quad x + \frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow \quad x = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\
&\text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) && [1pt].
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation trigonométrique sont donc

$$S = \left\{\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi\right\}, \ k \in \mathbb{Z}. \qquad [1pt]$$

Remarques

- Pour obtenir un segment de droite de longueur $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (en unité arbitraire), on peut utiliser le fait que la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont la longueur des côtés adjacents à l'angle droit vaut $\frac{1}{4}$ ou l'approximation $\frac{\sqrt{2}}{4} \approx \frac{1,4}{4} = 0,35$.
- Les solutions de l'équation sont notées

$$\begin{aligned}
x_1 &= \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} + k\pi \\
x_2 &= \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + k\pi = \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + k\pi
\end{aligned}$$

  oÃ¹ $k \in \mathbb{Z}$.

Répartition des points

- 8 points pour la résolution de l'équation dont
  - 4 pour l'obtention de l'équation (1) [détails voir supra]
  - 4 pour la résolution de l'équation (1) [détails voir supra]
- 2 points pour le dessin

Méthode 2

L'équation est inchangé quand on remplace $\sin x$ par $\cos x$ et réciproquement. Cela suggère le changement de variable

$$y = \frac{\pi}{4} - x. \qquad [1pt]$$

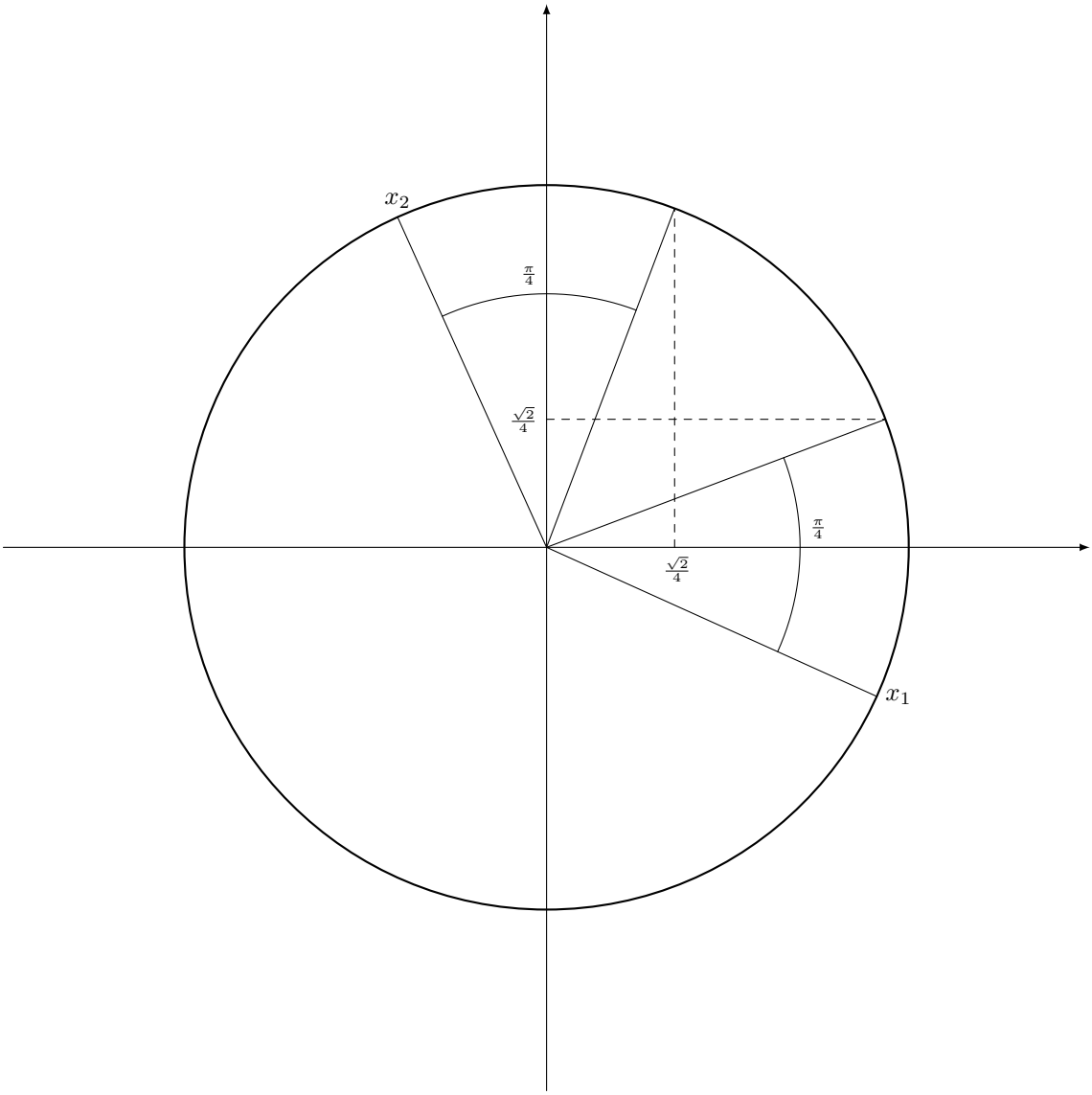


FIGURE 1 – Les solutions x_1 et x_2 de l'équation sur le cercle trigonométrique.

On a, en utilisant les formules d'addition,

$$\begin{aligned}\sin y &= \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x),\\ \cos y &= \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x + \sin x) \qquad [1pt]\end{aligned}$$

dont on déduit

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin x + \cos x),\\ \cos x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x). \qquad [1pt]\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}(\cos^2 y - \sin^2 y) = \frac{1}{2}(2\cos^2 y - 1)$$

et

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos y. \qquad [1pt]$$

En injectant ces résultats dans l'équation trigonométrique initiale, on obtient l'équation

$$8\cos^2 y - 4\sqrt{2}\cos y + 1 = 0$$

ou de manière équivalente, en posant $z = \cos y$,

$$8z^2 - 4\sqrt{2}z + 1 = 0. \qquad [1pt]$$

Cette équation admet pour unique solution

$$z = \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad [1pt]$$

dont on déduit

$$\begin{aligned}&\cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow y = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\\ &\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \qquad [1pt].\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation trigonométrique sont donc

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{4} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi\right\}, \ k \in \mathbb{Z}. \qquad [1pt]$$

La représentation des solutions sur le cercle trigonométrique faite précédemment reste bien entendu valable et vaut toujours [2pt].

Méthode 3

On a

$$4(\sin x + \cos x) - 8\sin x \cos x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4(\sin x + \cos x) = 5 + 8\sin x \cos x.$$

Elevons les deux membres au carré (attention, cela peut engendrer des solutions parasites), on en déduit

$$\begin{aligned} & 16(\sin x + \cos x)^2 = (5 + 8\sin x \cos x)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 16(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x + \cos x) = 25 + 64\sin^2 x \cos^2 x + 80 \sin x \cos x \\ \Leftrightarrow \quad & 64\sin^2 x \cos^2 x + 48 \sin x \cos x + 9 = 0 \qquad [1pt]. \qquad (2) \end{aligned}$$

Posons

$$y = 2\sin x \cos x = \sin 2x. \qquad [1pt]$$

L'équation (2) se réécrit

$$16y^2 + 24y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4} \qquad [1pt].$$

On en déduit

$$\sin 2x = -\frac{3}{4} \qquad (3)$$

L'équation originale peut alors se réécrire

$$\begin{aligned} & 4(\sin x + \cos x) = 5 + 4\sin 2x \\ & \Rightarrow 4(\sin x + \cos x) = 2 \\ & \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{1}{2} \qquad [1pt] \end{aligned}$$

Cette dernière équation est précisément l'équation (1) obtenue à la méthode 1. A partir d'ici, la résolution est donc la même qu'à la méthode 1.
Une autre option consiste à résoudre directement l'équation (3) ([2pt] pour ne pas accorder trop de points à l'élimination des solutions parasites) et à éliminer les solutions parasites ([2pt]). Dans ce cas, les solutions de l'équation trigonométrique s'écrivent

$$S = \left\{-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4} + 2k\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4} + 2k\pi\right\}, \ k \in \mathbb{Z}. \qquad [1pt]$$

La construction de la représentation des solutions de l'équation sur le cercle trigonométrique est différente mais peut encore valoir [2pt].

Question 3 *Deux poulies de rayons respectifs* 5 cm *et* 8 cm *sont disposées à* 15 cm *de distance centre à centre. Calculer la longueur L de la courroie autour de ces poulies. La courroie est représentée en gras sur la figure fournie au verso de cette feuille et les points A, B, C et D représentent les points de tangence de cette courroie avec les poulies.*

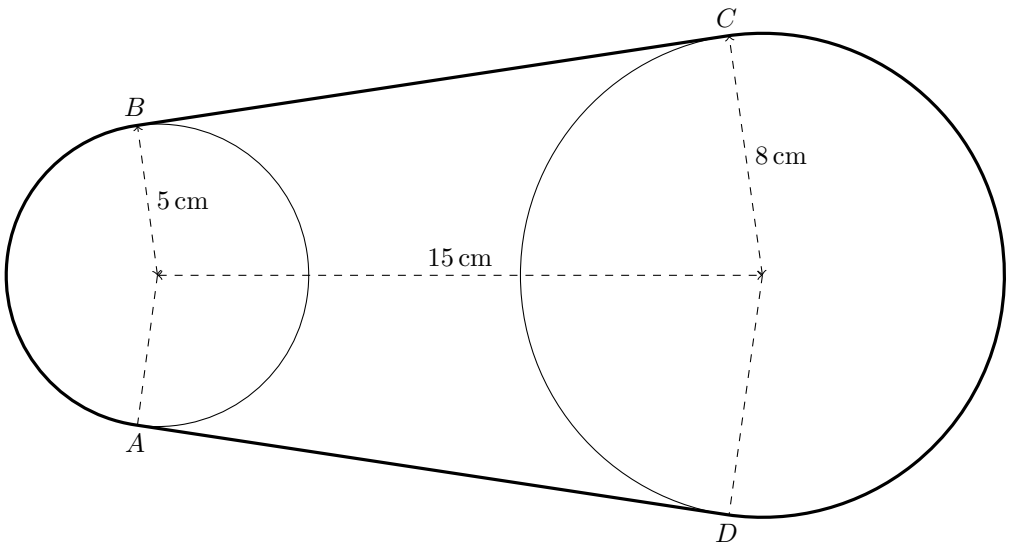


FIGURE 2 – Le système à deux poulies

Solution

On appelle O le centre de la poulie de rayon 5 cm. On appelle P le centre de la poulie de rayon 8 cm. Observons que, par définition de la tangence, les angles $\widehat{OBC}$ et $\widehat{PCB}$ sont de 90°.

Partant de O, on trace la parallèle à BC, qui intersecte le segment de droite PC en E (voir Figure). Observons que $OBCE$ est donc un rectangle et le triangle OEP un triangle rectangle. On en déduit que $\overline{CE}$ vaut 5 cm et $\overline{EP}$ vaut 3 cm. Dans le triangle rectangle OEP, on peut donc calculer

$$\begin{aligned}\overline{OE} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{EP}^2} \\ &= \sqrt{15^2 - 3^2} \approx 14.7 \text{ cm.}\end{aligned}$$

On remarque que la figure est parfaitement symétrique selon l'axe OP. Dès lors, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{OE} \approx 14.7$ cm.

Il nous reste à calculer les longueurs des arcs $\widehat{BA}$ et $\widehat{CD}$. Pour ce faire, on doit calculer les angles $\widehat{BOA}$ et $\widehat{DPC}$. L'angle $\widehat{EOP}$ peut se calculer dans le triangle rectangle. On a $\sin(\widehat{EOP}) = \frac{\overline{EP}}{\overline{OP}} = \frac{3}{15}$. Donc $\widehat{EOP} \approx 11.54°$. Par symétrie de la figure, l'angle permettant de déterminer l'arc de cercle vaut

$$\widehat{BOA} = 360° - 2 \cdot (90° + \widehat{EOP}) \approx 156.93°.$$

On peut donc calculer

$$\widehat{BA} = 2\pi r \frac{\widehat{BOA}}{360} = 10\pi \frac{156.93}{360} \approx 13.7 \text{ cm.}$$

Pour l'autre arc, on calcule l'angle $\widehat{EPO}$ qui est le complémentaire de $\widehat{EOP}$ donc $\widehat{EPO} = 90° - 11.54° \approx 78.46°$. L'angle qui intercepte l'arc de cercle vaut

donc $360° - 2 \cdot 78.46° \approx 203.08°$ L'arc de cercle recherché vaut donc

$$\widehat{CD} = 2\pi \cdot 8 \cdot \frac{203.08}{360} \approx 28.4\text{cm}.$$

Le périmètre total s'obtient donc comme la somme des deux arcs de cercle, de $\overline{BC}$ et de $\overline{AD}$, c'est-à-dire $14.7 + 14.7 + 13.7 + 28.4 \approx 71.5$ cm.

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Septembre 2019

Question 1 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$

$$\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x} = \cos x$$

en spécifiant les conditions d'existence et représenter les solutions comprises dans $[-\pi, \pi[$ *sur le cercle trigonométrique.*

Solution

C. E. : $\sin x \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{\text{A}}$

Les conditions d'existence étant posées, nous pouvons à présent multiplier par $\sin x$ des deux côtés de l'équation et obtenir

$$\cos x - \cos 3x - \cos x \sin x = 0.$$

Nous utilisons ensuite la formule de factorisation de Simpson sur les deux premiers termes de l'équation. Celle-ci peut donc se transformer en

$$-2\sin(2x)\sin(-x) - \cos x \sin x = 0. \quad \boxed{\text{B}} \tag{1}$$

On peut alors factoriser en

$$\sin x(2\sin 2x - \cos x) = 0. \quad \boxed{\text{C}}$$

Nous pouvons ensuite utiliser l'expression de $\sin 2x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ et obtenir

$$\sin x(4\cos x \sin x - \cos x) = 0$$
$$\sin x \cos x(4\sin x - 1) = 0. \quad \boxed{\text{D}}$$

Par la règle du produit nul, on étudie les familles de solutions :

1. $\sin x = 0$ qui sont à rejeter en vertu des conditions d'existence $\boxed{\text{E}}$

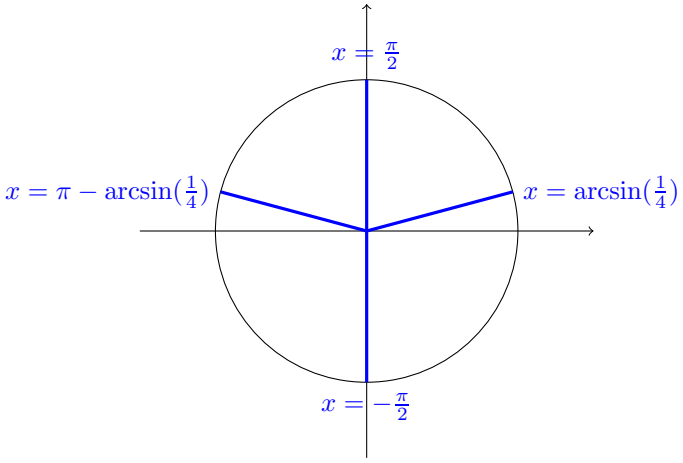


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

2. $\cos x = 0$ qui donne lieu aux solutions $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{\text{F}}$
3. $4\sin x - 1 = 0$ qui donne lieu à $x = \arcsin(\frac{1}{4}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\boxed{\text{G}}$
   et $x = \pi - \arcsin(\frac{1}{4}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\boxed{\text{H}}$

Question 2 *Démontrez qu'un triangle est rectangle si la relation*

$$\cos B + \cos C = \sin A$$

reliant la mesure de ses angles A, B, C est vérifiée.

Solution

En factorisant le membre de gauche de l'équation par application de la relation $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ et en utilisant la relation de duplication d'un angle $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ au membre de droite, il vient :

$$2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

La somme des mesures des angles d'un triangle étant égale à π, nous pouvons écrire $A + B + C = \pi \;\Rightarrow\; \cos\dfrac{B+C}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}\right) = \sin\dfrac{A}{2}$. En remplaçant cette dernière expression dans le membre de gauche de l'égalité, nous obtenons :

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{A}{2}\right) = 0$$

Le second facteur est factorisé par application de la relation $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$ et donne :

$$-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C+A}{4}\sin\frac{B-C-A}{4} = 0$$

Par la règle du produit nul, cette relation est vérifiée lorsque une des conditions suivantes est vérifiée :

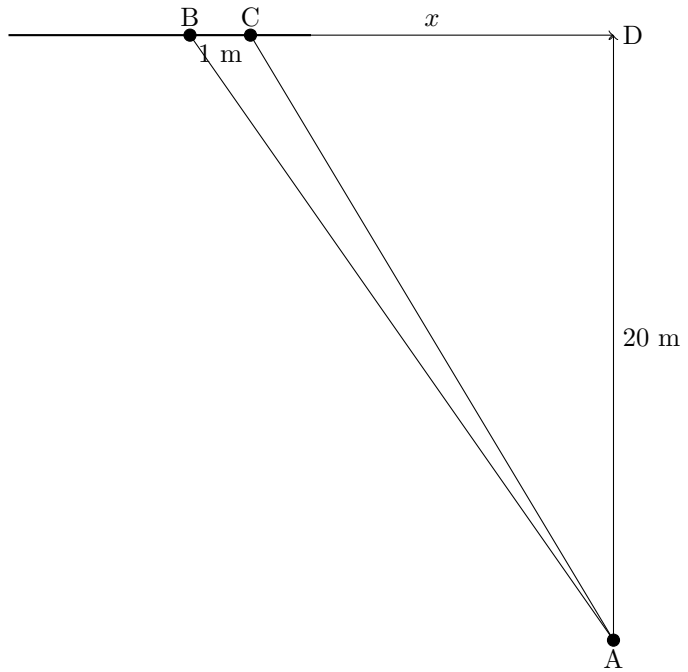
— $\sin \dfrac{A}{2} = 0$ soit $A = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Solution à rejeter puisque $0 < A < \pi$.

— $\sin \dfrac{B - C + A}{4} = 0$ soit $\dfrac{B - C + A}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. En tenant compte du fait que $A + B + C = \pi$, cette solution s'exprime $C = \dfrac{\pi}{2}(1 - 4k), k \in \mathbb{Z}$. Toutes ces solutions sont à rejeter sauf celle correspondant à $k = 0$ pour laquelle $C = \dfrac{\pi}{2}$.

— $\sin \dfrac{B - C - A}{4} = 0$ soit $\dfrac{B - C - A}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. En tenant compte du fait que $A + B + C = \pi$, cette solution s'exprime $B = \dfrac{\pi}{2}(1 + 4k), k \in \mathbb{Z}$. Toutes ces solutions sont à rejeter sauf celle correspondant à $k = 0$ pour laquelle $B = \dfrac{\pi}{2}$.

Les seules solutions retenues sont $B = \dfrac{\pi}{2}$ et $C = \dfrac{\pi}{2}$ et le triangle est bien rectangle en B ou C.

Question 3 *Lors d'un match de football, un coup franc doit être tiré du point A situé à 10 mètres à droite du poteau du gardien et à 20 mètres dans la profondeur du terrain (voir Figure). On suppose que le gardien occupe une largeur de 1 mètre sur sa ligne de but, entre les points B et C et que le tir s'effectuera en ligne droite en négligeant la présence d'autres joueurs sur le terrain. Déterminer la distance $x = \overline{DC}$ où doit se placer le gardien afin de couper 2 degrés de l'angle de tir de l'attaquant, c'est-à-dire, afin que l'angle $\widehat{BAC}$ vale 2 degrés.*



Solution

On note α l'angle $\widehat{CAD}$ et x la longueur recherchée $\overline{DC}$.
Dans le triangle ACD, on peut exprimer la tangente d'α comme $\tan(\alpha) = \dfrac{x}{20}$.
Dans le triangle ABD, on peut exprimer la tangente de l'angle $\widehat{BAD}$ comme $\tan(\alpha + 2°) = \dfrac{x+1}{20}$, en utilisant le fait que l'angle $\widehat{BAC}$ vaut $2°$ et que la distance $\overline{BC} = 1\ m$.
On peut ensuite utiliser la formule d'addition des tangentes sur la dernière expression et écrire

$$\tan(\alpha + 2°) = \frac{\tan\alpha + \tan 2°}{1 - \tan\alpha \tan 2°}. \tag{2}$$

En remplaçant $\tan\alpha = \dfrac{x}{20}$ dans (2), et, afin de soulager la notation, $\tan 2°$ par t, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x}{20} + t}{1 - t\frac{x}{20}} &= \frac{x+1}{20} \\ \frac{x + 20t}{20 - tx} &= \frac{x+1}{20}. \end{aligned} \tag{3}$$

Remarquons au passage que x doit être différent de $\dfrac{20}{\tan 2°}$ pour que l'expression ait du sens, ce qui correspond à un angle α de $88°$. En simplifiant (3), on obtient successivement

$$\begin{aligned} 20x + 400t &= (20 - tx)(x+1) \\ 20x + 400t &= 20x + 20 - tx^2 - tx, \end{aligned}$$

ce qui, après simplification, donne l'équation du second degré

$$tx^2 + tx + 400t - 20 = 0.$$

On calcule le discriminant $\Delta = t^2 - 4t(400t - 20) = -1599t^2 + 80t$, ce qui, en remplaçant $t = \tan 2° \approx 0.0349$ nous donne $\Delta \approx 0.8437$. On obtient donc les deux solutions

$$x = \frac{-t \pm \sqrt{\Delta}}{2t},$$

soit 12.652 et -13.652. La deuxième solution est à rejeter car elle signifierait que le gardien est en dehors de son goal. On obtient donc finalement $x \approx 12.652\ m$.

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Septembre 2020

Question 1 *Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation trigonométrique :*

$$\tan^2(x) - 3\frac{\tan(x)}{\cos(x)} - \frac{1}{\cos^2(x)} = 1$$

et représenter les solutions en x sur le cercle trigonométrique.

Solution

On pose tout d'abord les conditions d'existence. On a que $\cos x \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant $\tan(x)$ par $\sin x / \cos x$, l'équation trigonométrique à résoudre peut se réécrire comme suit

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} \sin^2 x - 3\sin x - 1 &= \cos^2 x \\ \sin^2 x - 3\sin x - 1 &= 1 - \sin^2 x \\ 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

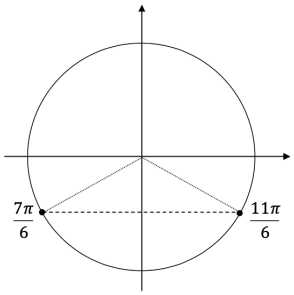
On pose alors $y = \sin x$, ce qui nous permet d'écrire l'équation précédente comme

$$2y^2 - 3y - 2 = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré admettant deux racines dans l'ensemble des réels $y_1 = 2$ et $y_2 = -1/2$. La première racine doit être éliminée étant donné que $\sin x$ est compris entre -1 et 1. La deuxième racine nous donne $\sin x = -1/2$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x &= \frac{7\pi}{6} + 2k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z}, \\ x &= \frac{11\pi}{6} + 2k_2\pi, k_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

On conserve toutes les solutions vu la condition d'existence exprimée plus haut. Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique :



$x \in \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

Question 2 *On voudrait construire un lance-balles afin d'entrainer un joueur de tennis professionnel. Pour simplifier, on suppose que ce lance-balles envoie des balles tellement rapides que celles-ci ont une trajectoire rectiligne. Le fabricant aimerait savoir quelle devrait être la hauteur d'où sont envoyées les balles afin qu'elles puissent passer au-dessus du filet et simuler un service rebondissant à l'intersection entre la ligne du couloir et la ligne du carré de service (du point A au point B sur la Figure 1. Les dimensions du terrain sont renseignées sur la Figure 1. De plus, on considérera que le filet peut être vu comme un arc de cercle de 50 mètres de rayon et de centre situé au milieu du terrain. La hauteur du filet au centre du terrain est réglementairement fixée à 91,4 centimètres (voir Figure 2).*
En supposant que le lance-balles est placé sur la ligne de fond, au milieu du terrain au point A, calculer la hauteur minimale nécessaire pour envoyer la balle sur le point B tout en garantissant que la balle passe au-dessus du filet au point C. Pour rappel, on suppose que la trajectoire est rectiligne, on suppose également que la balle est un point n'ayant pas de dimension.

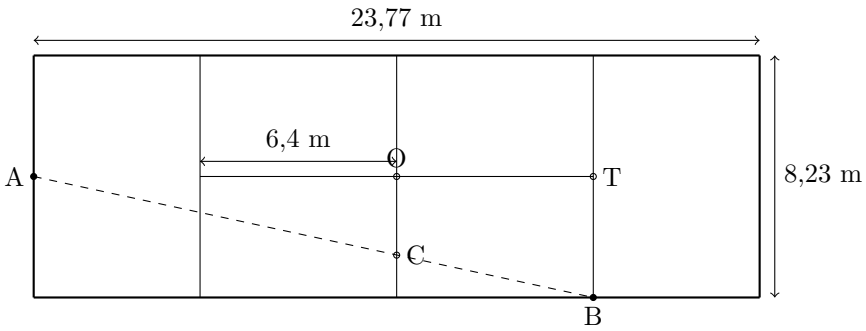


FIGURE 1 – Les dimensions du terrain de tennis

Solution

Appelons O le centre du terrain et T l'intersection des lignes de service (voir Figure).

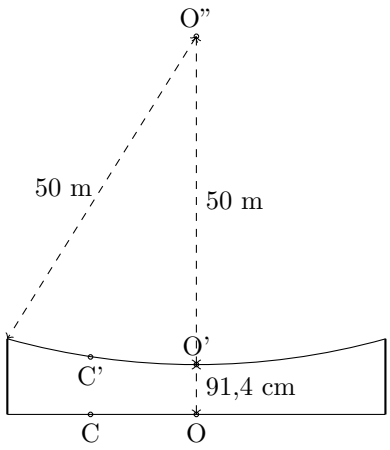


FIGURE 2 – La modélisation du filet

Dans un premier temps, nous nous plaçons dans le plan du sol et calculons l'angle $\widehat{OAC}$. Celui-ci s'obtient aisément grâce aux relations dans le triangle rectangle ABT, nous avons

$$\begin{aligned}\widehat{OAB} &= \arctan\left(\frac{|BT|}{|AT|}\right)\\ \widehat{OAB} &= \arctan(\frac{8.23/2}{6.4+23.77/2})\\ &\approx 12.683^\circ\end{aligned}$$

Nous pouvons à présent calculer la distance $|OC|$ au niveau du sol. Nous avons $|OC| = \tan(\widehat{OAB}) \cdot |OA| = \tan(12.683) \cdot 11.885 \approx 2.675\ m$. Remarquons que cette distance peut également être directement calculée par le théorème de Thalès.

Connaissant la position du point C, nous pouvons à présent calculer la hauteur du filet au point C. Pour ce faire, nous nous plaçons à présent dans le plan du filet. Nous appelons O' le point situé sur le filet à la verticale du milieu du terrain, et O" le centre de l'arc de cercle décrivant le filet. De même, nous appelons C', le point à la verticale de C, à hauteur du filet. Nous cherchons à déterminer la hauteur $|CC'|$. Observons que nous pouvons déterminer l'angle $\alpha = \widehat{C'O''O'}$ car $\sin\alpha = \frac{|OC|}{50}$ et donc $\alpha = \arcsin(2.675/50) \approx 3.066^\circ$. Connaissant cet angle, nous pouvons déterminer la hauteur $|CC'|$ comme étant égale à $|OO'| + (50 - 50 \cdot \cos\alpha) \approx 0.9856\ m$.

Pour clôturer l'exercice, il nous reste à nous mettre dans le plan de la trajectoire de la balle. Nous pouvons calculer l'angle de la trajectoire, c'est-à-dire l'angle $\beta = \widehat{CBC'}$. En effet, BC est obtenu par le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned}|BC|^2 = 6.4^2 + ((8.23/2) - |OC|)^2 &= 6.4^2 + (4.115 - 2.675)^2\\ |BC| &\approx 6.56\ m.\end{aligned}$$

Quant à l'angle de la trajectoire, il satisfait $\tan\beta = \frac{|CC'|}{|BC|}$ et donc $\beta = \arctan(\frac{0.9856}{6.56}) \approx 8.544°$. Finalement, pour déterminer la hauteur $|AA''|$, nous calculons d'abord $|AC|$ qui est donnée par le théorème de Pythagore

$$|AC|^2 = |AO|^2 + |OC|^2$$
$$|A'C'| = |AC| = \sqrt{11.885^2 + 2.675^2} \approx 12.182\ m$$

Nous avons finalement, dans le triangle rectangle $A'C'A''$, que l'angle $\widehat{A'C'A''} = \widehat{CBC'} = \beta$ et donc que

$$|A'A''| = \tan\beta \cdot |A'C'| \approx 0.1502 \cdot 12.182 = 1.83\ m.$$

Comme $|AA'| = |CC'| = 0.9856\ m$, on a finalement que la hauteur $|AA''| = 1.83 + 0.986 = 2.816\ m$.

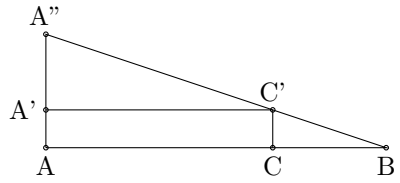


FIGURE 3 – Le plan de trajectoire de la balle

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Juillet 2020

Question 1 *Trouvez toutes les solutions de l'équation trigonométrique suivante*

$$3\left(\sin(x)+\cos(x)\right)-4\left(\sin^3(x)+\cos^3(x)\right)=0.$$

Tracez les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution

Soit on remplace $\sin^2 x$ par $(1-\cos^2 x)$ (resp. $\cos^2 x$ par $(1-\sin^2 x)$) et on obtient

$$3\left(\sin x+\cos x\right)-4\left(\sin x-\sin x\cos^2 x+\cos x-\cos x\sin^2 x\right)=0,$$

puis on met en évidence $(\sin x+\cos x)$ dans les différents termes.
Soit on met directement $(\sin x+\cos x)$ en évidence dans l'équation de départ, ce qui donne

$$(\sin x+\cos x)\left[3-4\left(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x\right)\right]=0.$$

Dans un cas comme dans l'autre, on obtient une forme factorisée de l'équation :

$$\boxed{(\sin x+\cos x)\left(4\sin x\cos x-1\right)=0.}$$

On a donc d'une part les solutions

$$\sin x=-\cos x \quad \rightarrow \boxed{x=\frac{3\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in Z}$$

Et d'autre part

$$2\sin x\cos x=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\sin(2x)=\frac{1}{2}},$$

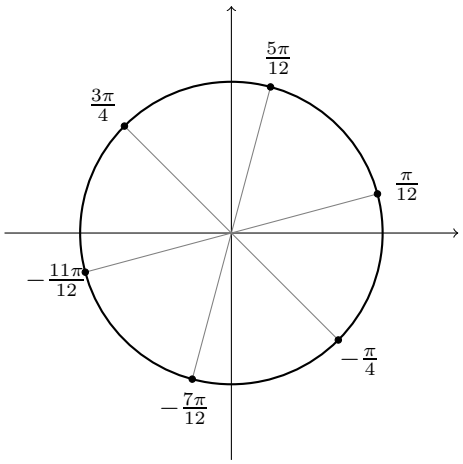
qui donne

$$2x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in Z \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in Z \end{cases}$$

et finalement

$$\boxed{x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + k\pi \ , \ k \in Z \\ \frac{5\pi}{12} + k\pi \ , \ k \in Z \end{cases}}$$

Représentation sur le cercle trigonométrique



Question 2 *A un instant initial, deux observateurs A et B distants de* $2700\,\mathrm{m}$ *voient un avion situé dans le plan vertical de la base d'observation sous des angles $\widehat{C_1AO_1} = 35°$ et $\widehat{C_1BO_1} = 64°$, l'avion se situant entre A et B. Après quelques secondes, ils font une seconde observation sous des angles $\widehat{C_2AO_2} = 30.5°$ et $\widehat{C_2BO_2} = 80°$, l'avion se situant à la droite de B. Déterminez l'angle de montée de l'avion par rapport au segment AB, c'est-à-dire déterminez l'angle formé par la droite C_1C_2 et la droite AB.*

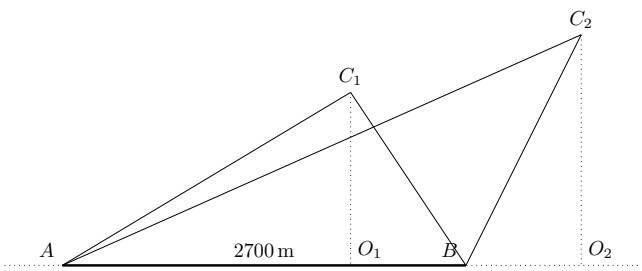


FIGURE 1 – Points d'observation

Solution

Dans le triangle ABC_1, $\widehat{C_1AB} + \widehat{C_1BA} + \widehat{AC_1B} = 180° \;\rightarrow\; \widehat{AC_1B} = 180° - 35° - 64° = 81°$. Toujours dans ce triangle, l'application de la formule des sinus donne :

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \widehat{AC_1B}} = \frac{\overline{AC_1}}{\sin \widehat{C_1BA}} \;\rightarrow\; \overline{AC_1} = \frac{\sin 64°}{\sin 81°} \times 2700 = 2457\text{m}.$$

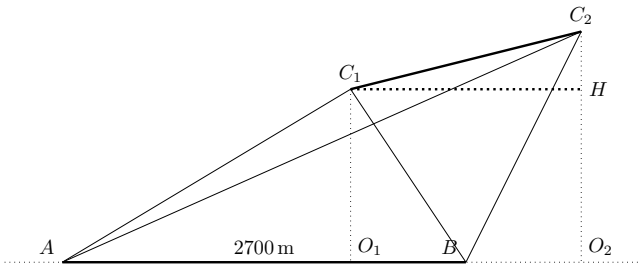
Dans le triangle rectangle C_1O_1A, il vient :

$$\sin \widehat{C_1AO_1} = \frac{\overline{O_1C_1}}{\overline{AC_1}} \;\rightarrow\; \overline{O_1C_1} = 1409\text{m}$$

et

$$\cos \widehat{C_1AO_1} = \frac{\overline{AO_1}}{\overline{AC_1}} \;\rightarrow\; \overline{AO_1} = 2013\text{m}$$

De manière similaire, dans le triangle ABC_2, on trouve $\overline{AC_2} = 3497$m et dans le triangle AO_2C_2, $\overline{C_2O_2} = 1775$m et $\overline{AO_2} = 3013$m.
Traçons la parallèle à O_1O_2 passant par C_1 pour former le triangle rectangle C_1HC_2 dans lequel l'angle $\widehat{C_2C_1H}$ est l'angle recherché :



$$\operatorname{tg} \widehat{C_1C_2H} = \frac{\overline{C_2H}}{\overline{C_1H}} = \frac{\overline{C_2O_2} - \overline{C_1O_1}}{\overline{AO_2} - \overline{AO_1}} \;\rightarrow\; \widehat{C_1C_2H} = 20°.$$

Alternativement, il est possible de déterminer la longueur des côtés BC_1 et BC_2 en appliquant la formule des sinus respectivement dans les triangles ABC_1 et ABC_2 :

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \widehat{AC_1B}} = \frac{\overline{BC_1}}{\sin \widehat{C_1AB}} \;\rightarrow\; \overline{BC_1} = \frac{\sin 35°}{\sin 81°} \times 2700 = 1568\text{m}.$$

et

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \widehat{AC_2B}} = \frac{\overline{BC_2}}{\sin \widehat{C_2AB}} \;\rightarrow\; \overline{BC_2} = \frac{\sin 30.5°}{\sin 49.5°} \times 2700 = 1802\text{m}.$$

En appliquant Al-Kashi dans le triangle BC_1C_2, on obtient alors la longueur du segment C_1C_2 :

$$\begin{aligned}\overline{C_1C_2} &= \sqrt{\overline{BC_1}^2 + \overline{BC_2}^2 - 2\overline{BC_1} \times \overline{BC_2} \times \cos \widehat{C_1BC_2}} \\ &= \sqrt{1568^2 + 1802^2 - 2 \times 1568 \times 1802 \times \cos(180° - 64° - 80°)} \\ &= 1065\text{m}\end{aligned}$$

Toujours dans le triangle BC_1C_2, la formule des sinus donne :

$$\frac{\overline{C_1C_2}}{\sin\widehat{C_1BC_2}} = \frac{\overline{BC_2}}{\sin\widehat{C_2C_1B}} \;\rightarrow\; \widehat{C_2C_1B} = \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_1C_2}}\sin\widehat{C_1BC_2} = 84^\circ.$$

Puisque les angles $\widehat{HC_1B}$ et $\widehat{C_1BO_1}$ sont égaux (angles alterne-interne), L'angle recherché est donné par $\widehat{C_2C_1H} = \widehat{C_2C_1B} - \widehat{C_1BO_1} = 84^\circ - 64^\circ = 20^\circ$.

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Septembre 2021

Question 1 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique*

$$\cos^3 x - \sin^3 x = \frac{3}{5}\left(\cos x - \sin x\right). \tag{1}$$

Représenter précisément les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Solution

Méthode 1
Le membre de gauche de (1) peut se factoriser sous la forme

$$\begin{aligned}
\cos^3 x - \sin^3 x &= (\cos x - \sin x)\left(\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x \cos x\right) \\
&= (\cos x - \sin x)\left(1 + \sin x \cos x\right) \\
&= (\cos x - \sin x)\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right).
\end{aligned}$$

L'équation (1) se réécrit donc

$$\begin{aligned}
& (\cos x - \sin x)\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \cos x - \sin x = 0 \text{ ou } \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\sin 2x = 0.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\cos x - \sin x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos x = \sin x \\
&\Leftrightarrow \quad \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\sin 2x = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sin 2x = -\frac{4}{5} \\
\Leftrightarrow \quad & 2x = \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right) + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi - \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
\Leftrightarrow \quad & x = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions s'écrit donc

$$\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + k\pi, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

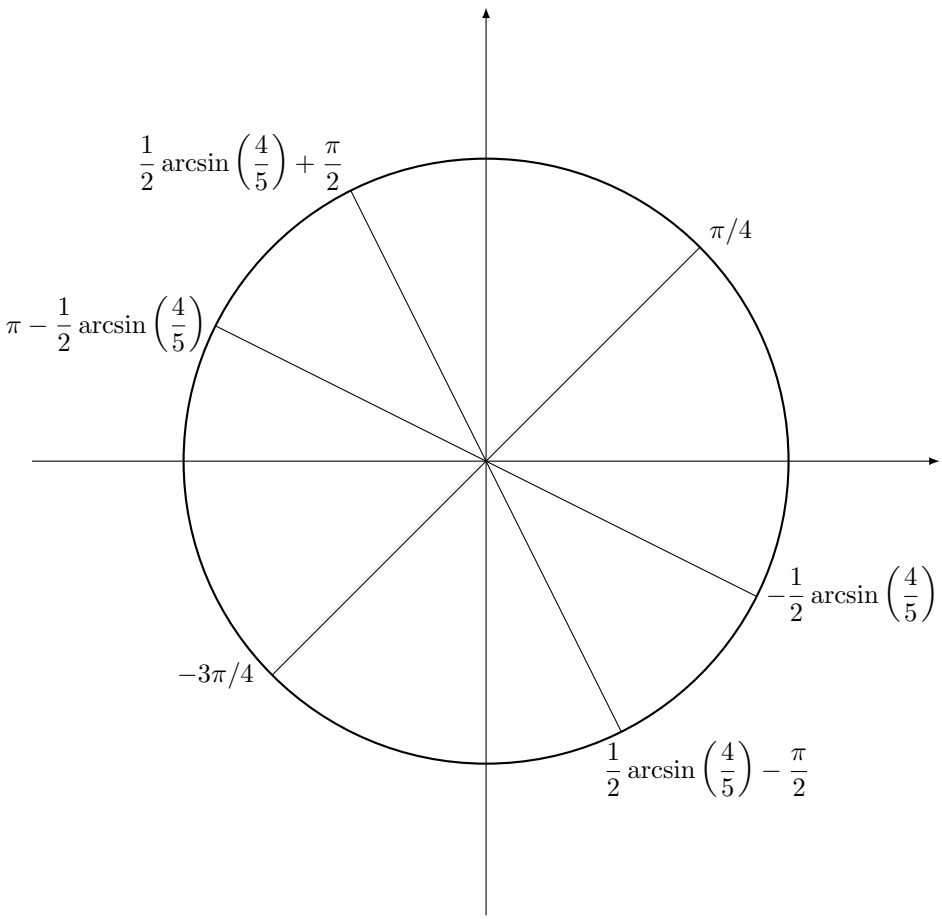


FIGURE 1 – Solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi,\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Méthode 2
On vérifie que la relation (1) n'est pas vérifiée si $\cos x = 0$.
On divise ensuite les deux membres de l'équation par $\cos^3 x$. On obtient

$$\begin{aligned}
& (1-\operatorname{tg}^3 x) = \frac{3}{5}(1-\operatorname{tg} x)\frac{1}{\cos^2 x} \\
\Leftrightarrow\quad & (1-\operatorname{tg}^3 x) = \frac{3}{5}(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg}^2 x) \\
\Leftrightarrow\quad & (1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x) = \frac{3}{5}(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg}^2 x) \\
\Leftrightarrow\quad & (1-\operatorname{tg} x)(2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+2) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{tg} x = 1 \text{ ou } (2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+2) = 0.
\end{aligned}$$

Or,

$$2\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{tg} x=-\frac{1}{2} \text{ ou } \operatorname{tg} x=-2.$$

L'ensemble des solutions s'écrit donc

$$\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi, \operatorname{arctg}(-2)+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

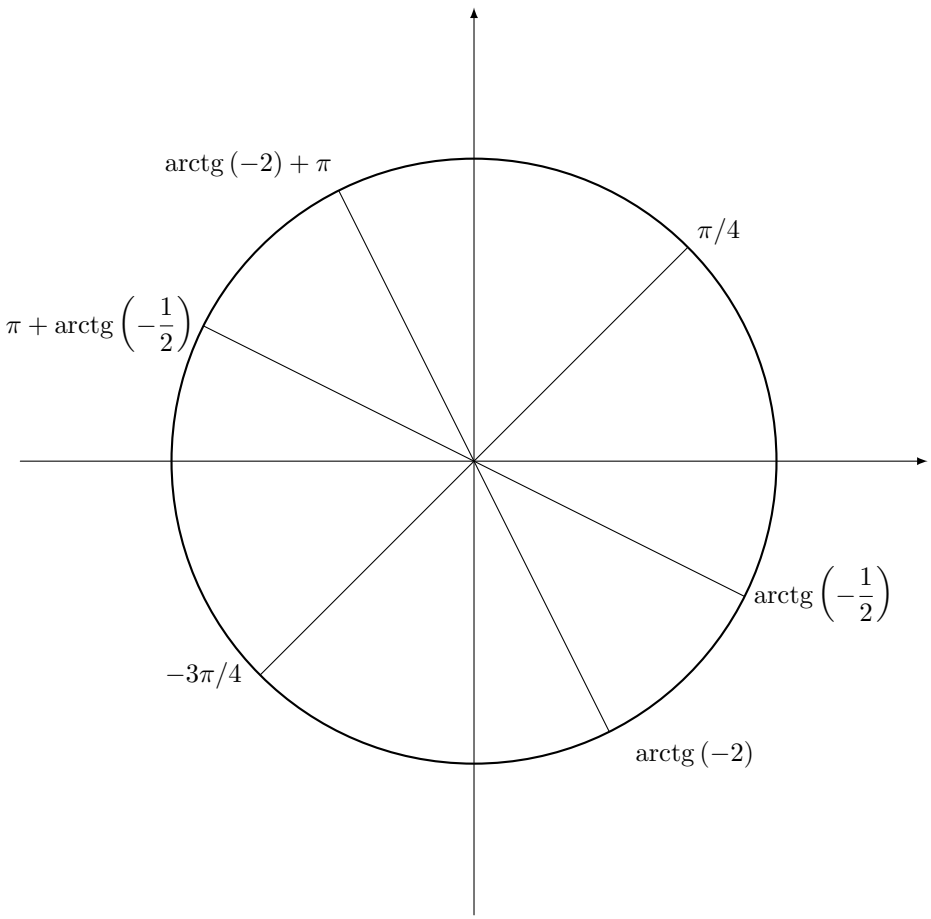


FIGURE 2 – Solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi,\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Méthode 3
Cette méthode est plus compliquée mais pourrait être suivie par certains étudiants. Commençons par réécrire l'équation (1) sous la forme

$$\begin{aligned}
\cos^3 x-\sin^3 x=\frac{3}{5}(\cos x-\sin x) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^3 x-\frac{3}{5}\cos x=\sin^3 x-\frac{3}{5}\sin x\\
&\Leftrightarrow \quad \cos x\,\left(\cos^2 x-\frac{3}{5}\right)=\sin x\,\left(\sin^2 x-\frac{3}{5}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \cos x\,\left(\frac{2}{5}-\sin^2 x\right)=\sin x\,\left(\sin^2 x-\frac{3}{5}\right) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Élevons les deux membres au carré :

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x\,\left(\frac{2}{5}-\sin^2 x\right)^2=\sin^2 x\,\left(\sin^2 x-\frac{3}{5}\right)^2\\
\Leftrightarrow \quad &(1-\sin^2 x)\,\left(\frac{2}{5}-\sin^2 x\right)^2=\sin^2 x\,\left(\sin^2 x-\frac{3}{5}\right)^2. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Attention : l'élévation au carré introduit des solutions parasites qu'il faudra éliminer. Posons $y=\sin^2 x$ et distribuons. Nous obtenons

$$50y^3-75y^2+33y-4=0. \qquad (4)$$

On voit assez facilement que l'équation (1) est vérifiée si $\sin x=\cos x$. On en déduit que $y=1/2$ est solution de l'équation (4). L'équation (4) peut ainsi se

factoriser

$$\begin{aligned} 50y^3 - 75y^2 + 33y - 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(y - \frac{1}{2}\right)(50y^2 - 50y + 8) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{5}\right)\left(y - \frac{4}{5}\right) = 0. \end{aligned}$$

Les solutions de (4) sont donc

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}.$$

Les solutions de (3) s'en déduisent :

$$\begin{aligned} &\left\{\pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\right. \\ &\arcsin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2k\pi, \pi - \arcsin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2k\pi, \\ &\left.\arcsin\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2k\pi, \pi - \arcsin\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

L'étude des signes des membres de l'équation (2) permet d'éliminer les solutions parasites, c'est-à-dire les solutions de (3) qui ne sont pas solutions de (2). L'ensemble des solutions de (1) s'écrit finalement sous la forme compacte

$$\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + k\pi, -\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Méthode 4

On pose $y = x + \pi/4$. On a

$$\sin y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$$

et

$$\cos y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x)$$

dont on déduit

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin y + \cos y)$$

et

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin y - \cos y).$$

L'équation (1) se réécrit en termes de y

$$\cos^3 y + 3\sin^2 y \cos y - \frac{6}{5}\cos y = 0. \tag{5}$$

En mettant $\cos y$ en évidence et en se servant de la relation $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$, on obtient

$$\cos y\left(2\sin^2 y - \frac{1}{5}\right) = 0$$

dont on déduit

$$\cos y = 0 \text{ ou } \sin^2 y = \frac{1}{10}$$

ou de manière équivalente

$$\cos y = 0 \text{ ou } \sin y = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

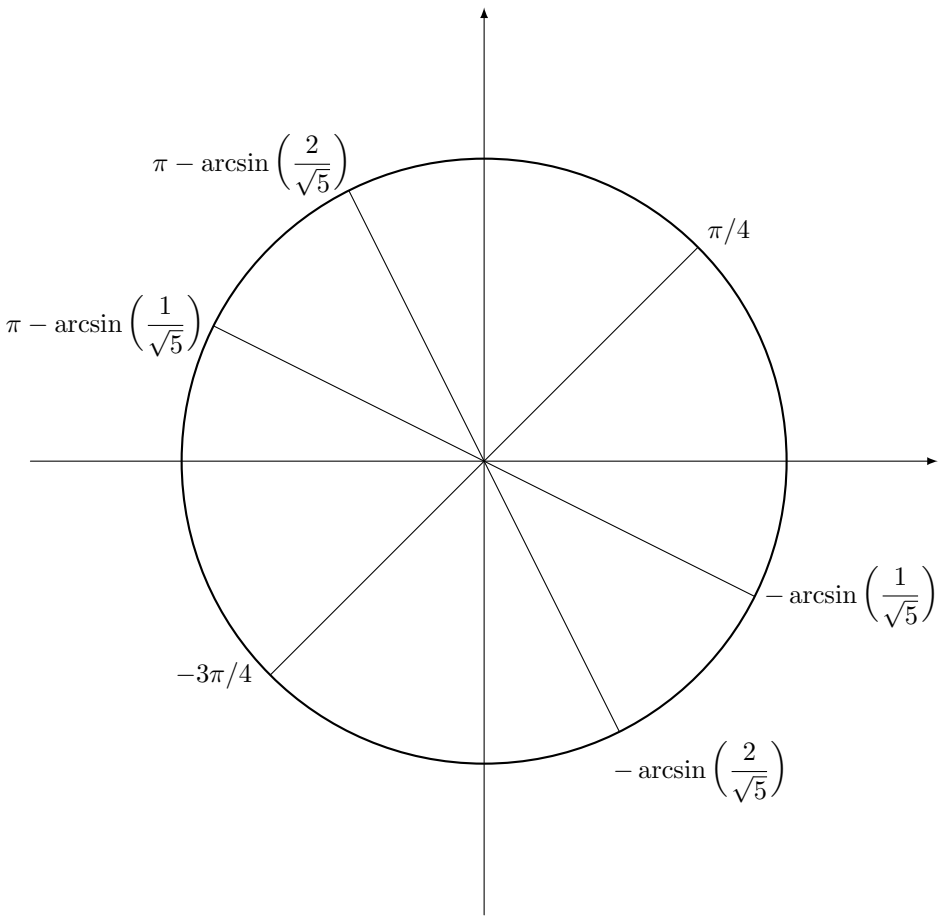


FIGURE 3 – Solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Les solutions de (5) sont donc

$$\left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + k\pi, \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \qquad .$$

Comme $y = x + \pi/4$, on en déduit que les solutions de (1) sont données par

$$\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + k\pi, -\frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

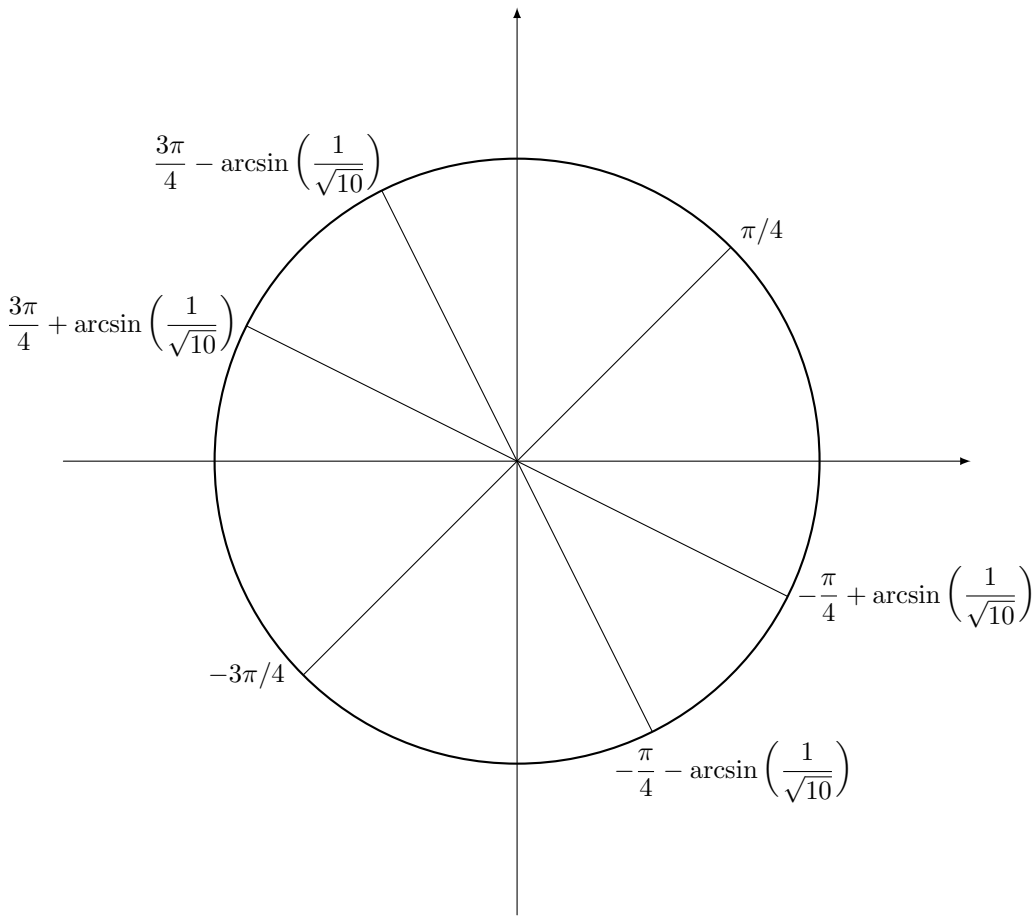


FIGURE 4 – Solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Question 2 *Trois cercles avec un rayon de respectivement* 5 cm*,* 3 cm *et* 2 cm *sont tangents deux à deux (voir Figure 5). Déterminer l'aire de la surface intérieure grisée délimitée par les trois cercles.*

Solution

Un dessin du problème ainsi que la notation utilisée sont représentés sur la Figure 6. On appelle A, B, C les trois centres des trois cercles. On appelle D, E, F les points de tangence des trois cercles. Les trois centres des trois cercles forment un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont respectivement de $|AB| = 8cm$, $|AC| = 7cm$ et $|BC| = 5cm$. En effet, les perpendiculaires aux tangentes des cercles sont alignées, car l'angle qu'elles forment est de $90+90 = 180$ degrés.

L'aire recherchée est égale à l'aire du triangle ABC de laquelle on retranche l'aire des trois secteurs circulaires. Nous devons donc calculer l'aire du triangle d'une part et calculer les trois angles du triangle d'autre part. Pour ce faire, nous utilisons la formule d'Al-Kashi. Nous obtenons

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos(\widehat{BAC}),$$

ce qui donne

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB||AC|} = \frac{64 + 49 - 25}{2 \cdot 8 \cdot 7} = 0.7857$$

En prenant l'arccos, on obtient $\widehat{BAC} = 38.21°$. En fonctionnant de manière similaire pour $\widehat{ABC}$, on obtient

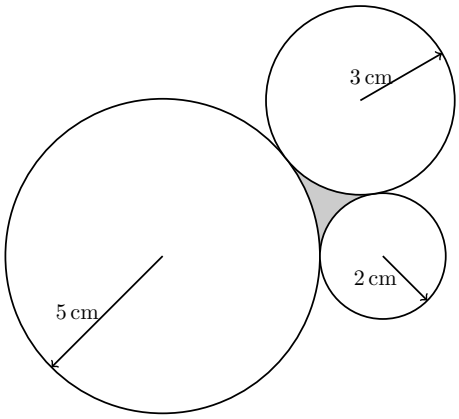


FIGURE 5 – Trois cercles tangents deux à deux.

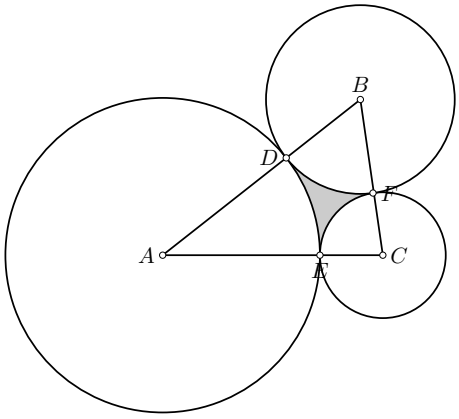


FIGURE 6 – Notation solution

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2|AB||BC|} = \frac{64 + 25 - 49}{2 \cdot 8 \cdot 5} = 0.5,$$

et donc $\widehat{ABC} = 60°$. Finalement, on obtient le troisième angle comme

$$\widehat{BCA} = 180° - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 81.79°.$$

On peut vérifier le résultat par Al-Kashi pour s'assurer qu'aucune erreur n'a été commise en chemin !

L'aire du triangle ABC vaut

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{|AB||AC|\sin(\widehat{ABC})}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \approx 17.32\ cm^2.$$

Les aires des secteurs circulaires peuvent être calculées comme

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\widehat{DBF}) &= \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 3^2 \quad \approx 4.712\ cm^2 \\
\mathcal{A}(\widehat{DAE}) &= \frac{38.21}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 \approx 8.336\ cm^2 \\
\mathcal{A}(\widehat{ECF}) &= \frac{81.79}{360} \cdot \pi \cdot 2^2 \approx 2.855\ cm^2
\end{aligned}$$

On trouve donc finalement que l'aire recherchée vaut

$$\mathcal{A}(\widehat{DEF}) = 17.32 - 4.712 - 8.336 - 2.855 \approx 1.417\ cm^2.$$

Examen de trigonométrie (juillet 2021)

Question 1

Trouver toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

$$\cos x - \cos(2x) - \sin(3x) = 0.$$

Présenter sur le cercle trigonométrique celles appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

Solution

Il n'y a pas de conditions d'existence à préciser puisque toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{A}}$

En utilisant la formule de factorisation de la différence de cosinus, on peut réécrire l'équation en factorisant les deux premiers termes $\boxed{\text{B}}$, comme

$$-2\sin(\frac{3x}{2})\sin(-\frac{x}{2}) - \sin(3x) = 0.$$

En posant $u = \frac{3}{2}x$ et en utilisant le fait que $\sin(2u) = 2\sin u \cos u$ $\boxed{\text{C}}$, il vient

$$-2\sin(\frac{3x}{2})\sin(-\frac{x}{2}) - 2\sin(\frac{3x}{2})\cos(\frac{3x}{2}) = 0,$$

ce qui, en mettant $\sin(\frac{3x}{2})$ en évidence et en divisant par 2, devient $\boxed{\text{D}}$

$$\sin(\frac{3x}{2})\left(-\sin(-\frac{x}{2}) - \cos(\frac{3x}{2})\right) = 0.$$

En annulant chacun des facteurs, on trouve des solutions potentielles. On a donc soit $\sin(\frac{3x}{2}) = 0$ qui admet comme solutions $\frac{3x}{2} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire $x = \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\boxed{\text{E}}$ soit

$$\begin{aligned}
\sin(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{3x}{2}) &= 0 \\
\cos(\frac{3x}{2}) &= \sin(\frac{x}{2}) \\
\cos(\frac{3x}{2}) &= \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}), \boxed{\text{F}}
\end{aligned}$$

ce qui admet comme solutions

$$\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions s'écrit donc

$$\left\{\frac{2}{3}k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Les solutions appartenant à $[-\pi, \pi[$ sont $\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \}$ et sont représentées à la Figure 1. $\boxed{\text{I}}$

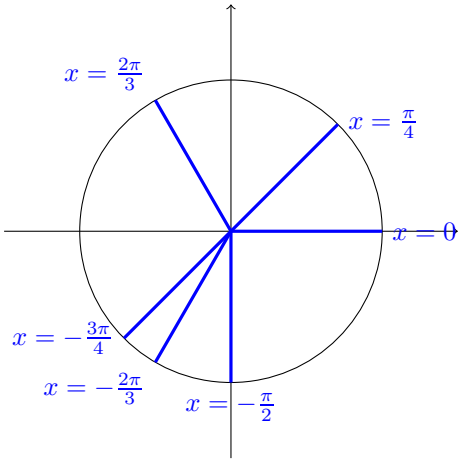


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

Question 2

Les billes d'un roulement sont enserrées entre deux gorges métalliques. La gorge de la bague extérieure possède un angle d'ouverture de 120° quant à celle de la bague intérieure, elle possède un angle de 100° comme décrit sur la figure de gauche ci-dessous. On suppose que les sommets des gorges se trouvent sur la même ligne verticale et on se rappelle que les surfaces de contact sont tangentes à la bille.

1. En utilisant les données du plan, déterminer le diamètre d de la bille tel que la distance entre les bagues intérieure et extérieure soit $H = 12\,\text{mm}$ exactement.
2. Si le roulement est constitué de 12 billes juxtaposées comme sur le dessin de droite ci-dessous, calculer le rayon R de la bague intérieure du roulement.

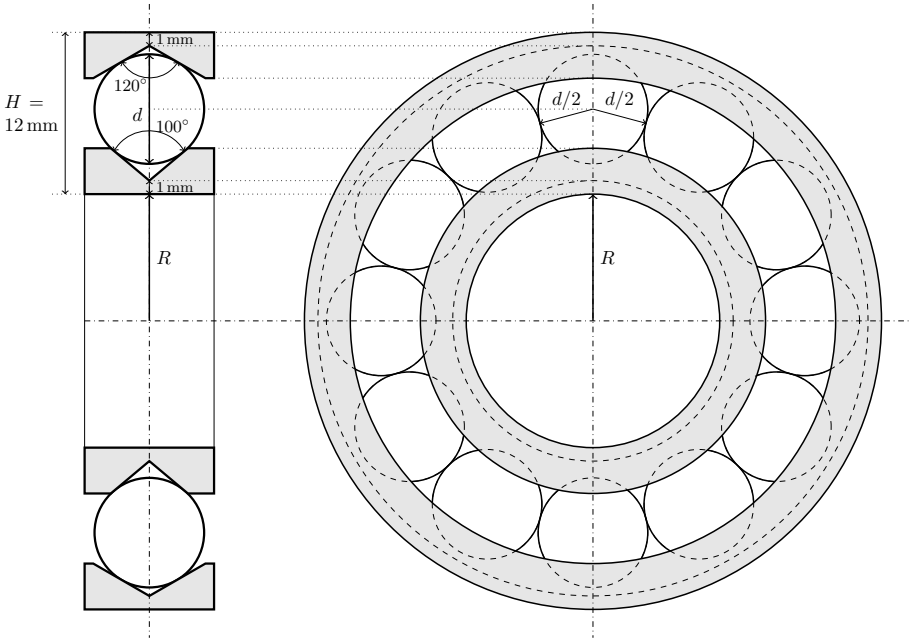
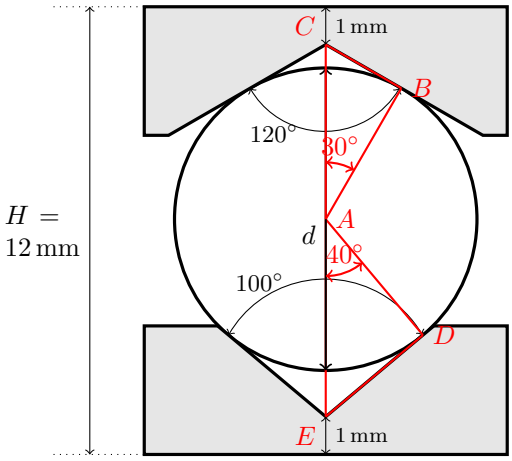


FIGURE 2 – Coupe transversale et vue latérale du roulement à bille.

Solution

Point 1

Les côtés des gorges métalliques sont tangents à la bille aux points de contact notés B et D pour les bagues extérieure et intérieure respectivement. Si le centre de la bille est noté A, les rayons du cercle AB et AD sont perpendiculaires aux côtés des gorges métalliques. En notant les sommets des gorges extérieure et intérieure C et E respectivement, les triangles rectangles ABD et ADE peuvent être définis. $\boxed{\text{A}}$



Par symétrie du problème :

$$\widehat{ACB} = \frac{120}{2} = 60^\circ \text{ et } \widehat{CAB} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ. \boxed{\text{B}}$$

ce qui permet de calculer la longueur $\overline{AC}$:

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{AC} = \frac{d}{2\ cos 30^\circ} \boxed{\text{C}},$$

De même pour le triangle ADE par symétrie :

$$\widehat{AED} = \frac{100}{2} \text{ et } \widehat{EAD} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ, \boxed{\text{D}}$$

La longueur $\overline{AE}$ vaut :

$$\cos 40^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \rightarrow \overline{AE} = \frac{d}{2\ cos 40^\circ}. \boxed{\text{E}}$$

Ensuite en notant que :

$$H - 2 \times 1\,\text{mm} = \overline{AC} + \overline{AE}, \boxed{\text{F}}$$

nous obtenons l'équation suivante permettant de déterminer le diamètre de la bille :

$$\frac{d}{2\ cos 30^\circ} + \frac{d}{2\ cos 40^\circ} = 10 \rightarrow d = \frac{2 \times 10}{\frac{1}{\cos 30^\circ} + \frac{1}{\cos 40^\circ}} = 8.13\,\text{mm} \boxed{\text{G}}$$

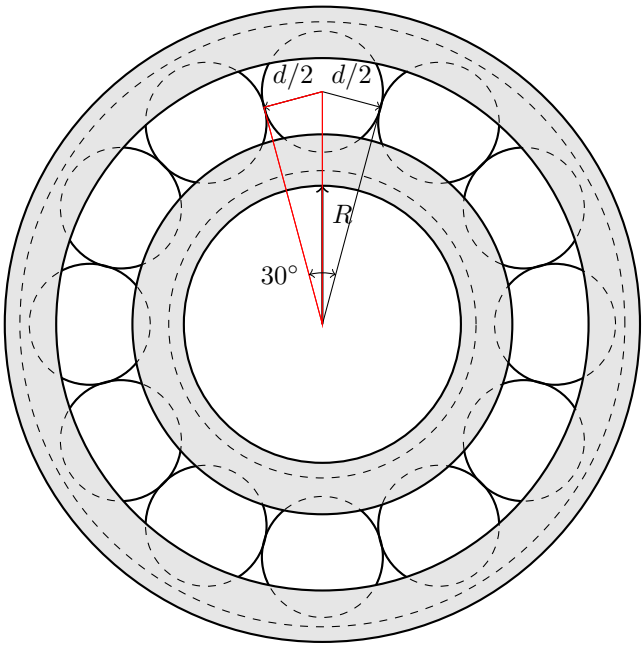
Point 2

Pour résoudre le point 2, il suffit de noter que la bille couvre un arc valant un douxième de la circonférence soit un angle de 30°. Par symétrie, nous pouvons tracer le triangle rouge qui est rectangle puisque le rayon est perpendiculaire à la tangente au cercle $\boxed{\text{H}}$.
Nous pouvons alors écrire :

$$\sin \frac{30^\circ}{2} = \frac{d}{2 \times \left(R + 1\,\text{mm} + \overline{AE}\right)} \text{ avec } \overline{AE} = \frac{d}{2\ cos 40^\circ} = 5.306\,\text{mm} \boxed{\text{I}}$$

En résolvant l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$R = \frac{d}{2 \times \sin 15^\circ} - 1\,\text{mm} - 5.306\,\text{mm} = 9.400\,\text{mm} \boxed{\text{J}}$$


$d/2$
$d/2$
R
$30°$

Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Septembre 2022

Consignes

- NOM (en MAJUSCULES), prénom (en minuscules) et numéro d'ordre sur chaque feuille dans les emplacements prévus.
- Contrôlez soigneusement que vous avez bien les 4 pages.
- Rendre les feuilles DANS L'ORDRE.
- Répondez directement sous la question.
- Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, veuillez les demander aux surveillants qui vous en fourniront. Les pages supplémentaires seront ajoutées après la dernière page et numérotées.
- Les pages verso peuvent être utilisées comme brouillon ; elles ne **seront pas corrigées !**
- GSM, smartphones et tablettes interdits MAIS il est permis d'utiliser une calculette.
- Préparer une pièce d'identité sur la table.
- Fin de l'examen à 12 heures.

Question 1 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique suivante en précisant les conditions d'existence :*

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$$

Représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ sur le cercle trigonométrique en page 4.

Solution

Nous commençons par écrire les conditions d'existence :

- $\tan x$ doit être défini : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\tan 2x$ doit être défini : $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$
- $\tan x \neq 0$ et $\tan 2x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq k\frac{\pi}{2}$

En résumé, $x \neq k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

Les conditions d'existence étant posées, nous pouvons appliquer le produit croisé, nous obtenons donc

$$\tan^2 x = \tan^2 2x.$$

En ramenant tout dans le même membre et en factorisant la différence de carrés, on obtient

$$(\tan x + \tan 2x)(\tan x - \tan 2x) = 0.$$

Par la règle du produit nul, on en déduit que l'on a soit $\tan x = \tan 2x$, ce qui mène à $2x = x + k\pi$ c'est-à-dire $x = k\pi$, soit $\tan x = -\tan 2x$ et donc $2x = -x + k\pi$, c'est-à-dire $x = k\frac{\pi}{3}$.

Les familles $2k\pi$ et $\pi + 2k\pi$ sont à rejeter en vertu des conditions d'existence. Notre ensemble des solutions est donc

$$S = \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\} + 2k\pi$$

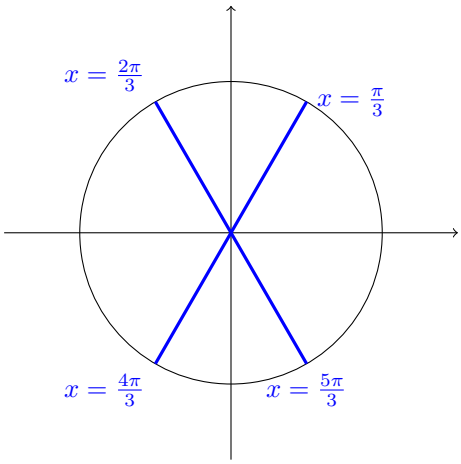


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

Question 2 *Si A, B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré et a, b et c les longueurs des côtés opposés, démontrer que :*

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

Solution

La règle des sinus nous donne

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Observons que, comme le triangle est non dégénéré, aucun des numérateurs ou des dénominateurs n'est nul. On en déduit que

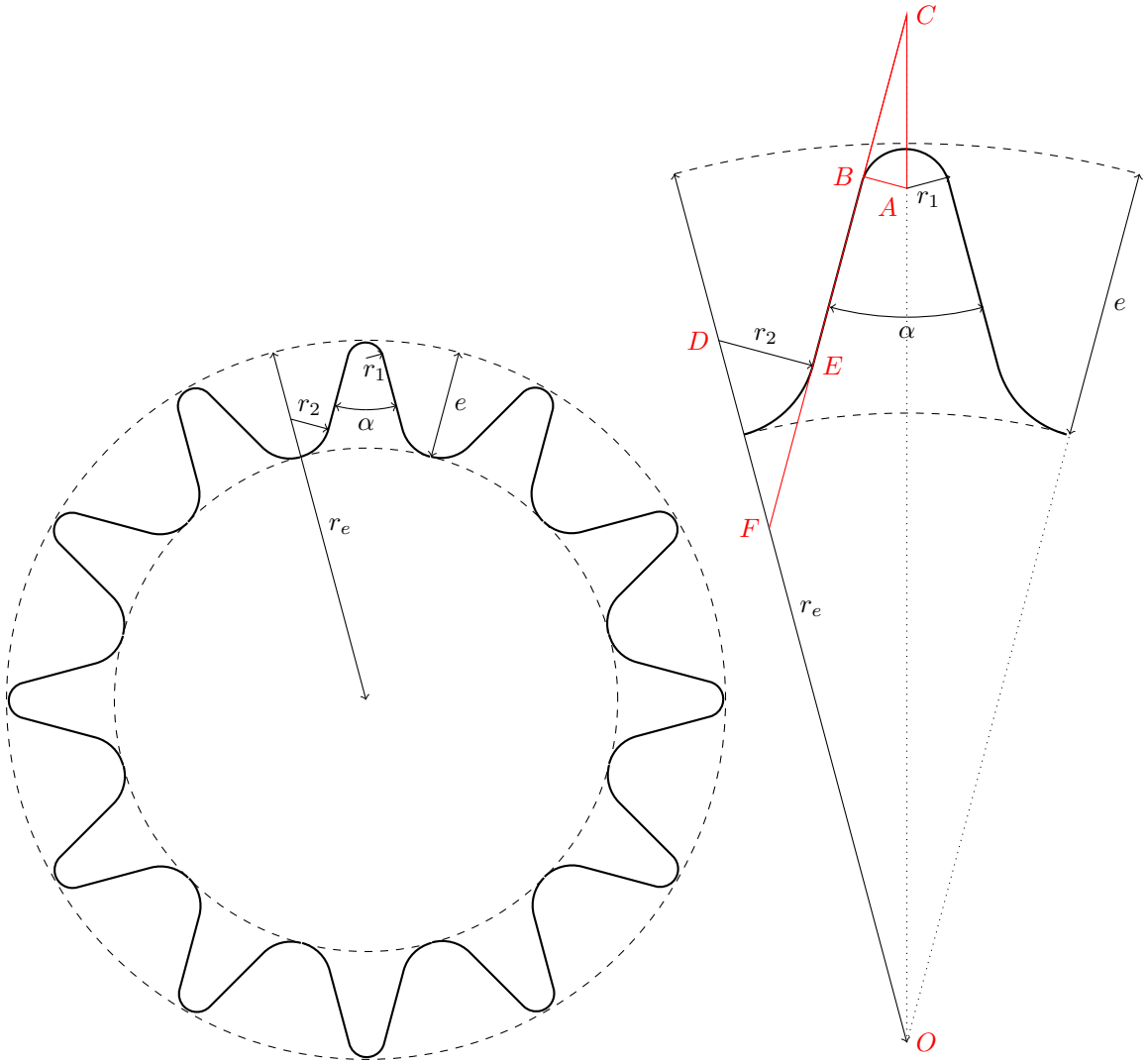
$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}. \tag{1}$$

Comme $A+B+C=\pi$ dans un triangle, on a que $\sin C = \sin(\pi-(A+B)) = \sin(A+B)$. En remplaçant dans (1) et en utilisant la formule d'addition du sinus, on trouve

$$\begin{aligned} c &= \frac{a\sin(A+B)}{\sin A} \\ &= a\frac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{\sin A} \\ &= a\cos B + a\frac{\cos A\sin B}{\sin A}. \end{aligned} \tag{2}$$

En utilisant encore la règle des sinus, on a que $\sin A = \frac{a\sin B}{b}$. Si on réinjecte cette expression dans (2), on obtient $c = a\cos B + b\cos A$ qui est bien l'expression recherchée.

Question 3 *Soit l'engrenage constitué de 12 dents représenté à la figure ci-dessous. Chaque dent possède un angle d'ouverture $\alpha = 30°$ et un sommet constitué d'un arc de cercle de rayon $r_1 = 2\,\text{mm}$ (les côtés rectilignes de la dent sont tangents à l'arc de cercle aux points de contact). Le rayon extérieur de l'engrenage est $r_e = 40\,\text{mm}$. La jonction entre chaque dent est faite d'un arc de cercle de rayon r_2 (les côtés de la dent sont tangents à cet arc de cercle aux points de contact). Déterminez la valeur de r_2 de manière à ce que la hauteur e des dents soit exactement de $12\,\text{mm}$.*



(a) Vue d'ensemble (b) Détail d'une dent

FIGURE 2 – L'engrenage à 12 dents.

Solution

Commençons par noter quelques points remarquables sur le schéma. Notons O le centre de l'engrenage, A et D les centres des arcs de cercle de rayon r_1 et r_2 respectivement. De manière similaire, notons B et E les points de tangence entre le côté de la dent et les arcs de cercle de rayon r_1 et r_2 respectivement. L'intersection entre le prolongement du segment BE et le prolongement du segment OA donne le point C et l'intersection entre le prolongement du segment BE et le segment OD donne le point F.
Les rayons des arcs de cercle aux points de tangence sont perpendiculaires aux côtés de la dent et les triangles ABC et DEF sont rectangles en B et E respectivement.
A l'aide de ces points, il est possible d'exprimer l'équation liant e à r_2 :

$$e = r_e - \overline{OF} - \overline{DF} + r_2$$

Commençons par déterminer $\overline{OF}$ par application de la règle des sinus dans le triangle CFO :

$$\frac{\overline{OC}}{\sin\widehat{CFO}} = \frac{\overline{OF}}{\sin\widehat{OCF}} \rightarrow \overline{OF} = \frac{\overline{OC} \times \sin\widehat{OCF}}{\sin\widehat{CFO}}$$

L'angle $\widehat{OCF} = \widehat{ACB} = \dfrac{\alpha}{2} = 15°$. L'engrenage ayant 12 dents, l'angle $\widehat{COF} = \dfrac{360°}{12 \times 2} = 15°$. En conséquence, $\widehat{CFO} = 180° - \widehat{COF} - \widehat{OCF} = 150°$.
La longueur du côté OC est donnée par :

$$\overline{OC} = r_e - r_1 + \overline{AC}$$

Le triangle ABC est rectangle en B et il vient :

$$\sin\widehat{ACB} = \frac{\overline{r_1}}{\overline{AC}} \rightarrow \overline{AC} = \frac{2}{\sin 15°} = 7,73mm$$

et $\overline{OC} = r_e - r_1 + \overline{AC} = 45,73$ mm.

$$\overline{OF} = \frac{\overline{OC} \times \sin\widehat{OCF}}{\sin\widehat{CFO}} = \frac{45,73 \times \sin 15°}{\sin 150°} = 23,67mm$$

Il reste à calculer $\overline{DF}$ dans le triangle DEF rectangle en E :

$$\sin\widehat{EFD} = \sin(180° - \widehat{CFO}) = \frac{r_2}{\overline{DF}}$$

qui donne $\overline{DF} = \dfrac{r_2}{\sin\widehat{CFO}} = \dfrac{r_2}{\sin 150°}$.
En reprenant l'équation de départ $e = r_e - \overline{OF} - \overline{DF} + r_2$, nous exprimons

$$r_2\left(\frac{1}{\sin 150°} - 1\right) = r_e - e - \overline{OF} = 40 - 12 - 23.67.$$

Soit $r_2 = 4{,}33$ mm.

Université de Liège

Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Juillet 2022

Consignes

- NOM (en MAJUSCULES), prénom (en minuscules) et numéro d'ordre sur chaque feuille dans les emplacements prévus.
- Contrôlez soigneusement que vous avez bien les 4 pages.
- Ne pas dégrafer les feuilles.
- Répondez directement sous la question.
- Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, veuillez les demander aux surveillants qui vous en fourniront. Les pages supplémentaires seront ajoutées après la dernière page et numérotées.
- Les pages verso peuvent être utilisées comme brouillon ; elles ne **seront pas corrigées !**
- GSM, smartphones et tablettes interdits MAIS il est permis d'utiliser une calculette.
- Préparer une pièce d'identité sur la table.
- Fin de l'examen à 12 heures.

Question 1 *Soit l'équation trigonométrique suivante :*

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos x \ sinx. \tag{1}$$

Déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$ sur le cercle trigonométrique en page 4.

Solution

Méthode 1

On élève au carré les deux membres de l'équation et on obtient

$$\cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) + \sin^2(x) = 2\cos^2(x)\sin^2(x)$$

$$1 + \sin(2x) = \frac{\sin^2(2x)}{2}$$

On pose $y = \sin(2x)$ ce qui nous mène à une équation du second degré.

$$y^2 - 2y - 2 = 0$$

dont les solutions sont $y = 1 \pm \sqrt{3}$. La solution $1 + \sqrt{3}$ est à rejeter car plus grande que 1. On obtient donc

$$2x = \arcsin(1 - \sqrt{3}) + 2k\pi \text{ ou}$$

$$2x = \pi - \arcsin(1 - \sqrt{3}) + 2k\pi$$

ce qui mène à quatre solutions de base. Il faut maintenant s'assurer que les solutions ainsi générées ne sont pas des solutions menant aux deux membres de l'égalité de signe opposé dans (1), appelées également solutions parasites dues à l'élévation au carré. Il faut dès lors rejeter

$$x = \frac{1}{2}\arcsin(1 - \sqrt{3}) + 2k\pi \text{ et } x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin(1 - \sqrt{3}) + 2k\pi.$$

Il nous reste les solutions

$$x = \pi + \frac{1}{2}\arcsin(1 - \sqrt{3}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ et } x = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin(1 - \sqrt{3}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Méthode 2

L'équation (1) est symétrique en $\sin(x)$ et $\cos(x)$. On pose donc $y = x - \pi/4$:

$$\cos(x) = \cos(y + \pi/4) = \cos(y)\cos(\pi/4) - \sin(y)\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(y) - \sin(y)),$$

$$\sin(x) = \sin(y + \pi/4) = \sin(y)\cos(\pi/4) + \cos(y)\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(y) + \sin(y)),$$

et donc

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos(y).$$

On a aussi

$$\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{2}(\cos^2(y) - \sin^2(y)) = \frac{1}{2}(2\cos^2(y) - 1).$$

L'équation (1) s'écrit donc, en fonction de y, comme :

$$\sqrt{2}\cos(y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\cos^2(y) - 1) \quad \rightarrow \quad \boxed{2\cos^2(y) - 2\cos(y) - 1 = 0.}$$

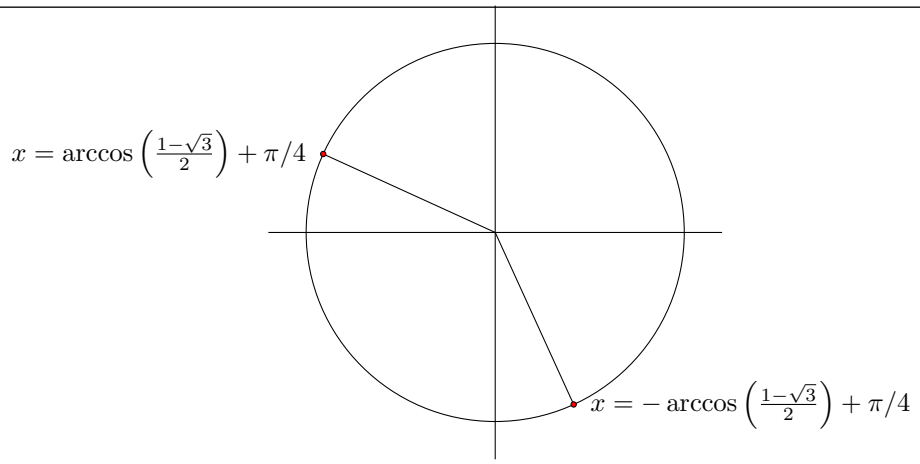
La solution est donc

$$\cos(y) = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}. \tag{2}$$

La solution $\cos(y) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ est à rejeter car $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$.
On trouve donc

$$y = \pm\arccos\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \boxed{x = \pm\arccos\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) + \pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.}$$

Finalement, on peut dessiner les solutions sur le cercle trigonométrique.



Question 2 *Si A, B et C sont les mesures des angles d'un triangle quelconque non dégénéré, démontrer que :*

$$\frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2}.$$

Solution

Appliquons la formule de factorisation de Simpson $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ au membre de gauche. En remplaçant dans l'inégalité de départ nous obtenons

$$\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2}.$$

On remarque que dans un triangle non dégénéré, $A + B + C = \pi$ ce qui entraine $0 < A + B < \pi$ et dès lors $0 < \sin \frac{A+B}{2} < 1$. En conséquence il est possible de simplifier l'inégalité en divisant gauche et droite par $\sin \frac{A+B}{2}$ strictement positif et non nul, on obtient donc

$$\cos \frac{A-B}{2} \leq 1.$$

Cette inégalité est toujours vérifiée par définition du cosinus.

Question 3 *Une barre en acier d'une longueur de $2\,\mathrm{m}$ est ancrée à une extrémité A dans un mur vertical à une hauteur de $3\,\mathrm{m}$ avec un angle de $45°$ par rapport à la verticale. A son autre extrémité O, elle soutient une poulie de $0.5\,\mathrm{m}$ de rayon. Un cable d'acier est fixé dans ce même mur en B à une hauteur de $4\,\mathrm{m}$ et soutient une caisse cubique de $0.5\,\mathrm{m}$ de côté par l'intermédiaire de la poulie. Calculer la longueur $BCDE$ du cable pour que le bas de la caisse se situe exactement à $1\,\mathrm{m}$ du sol (au centimètre près). Le système est représenté à la Figure 1 ci-dessous. Le cable est tangent à la poulie aux points de contact C et D.*

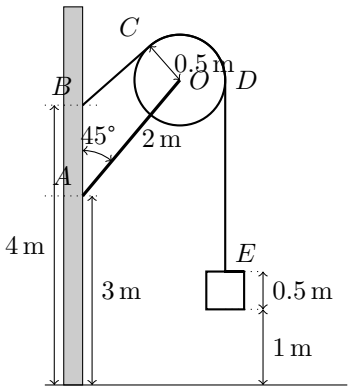


FIGURE 1 – Le système de poulie (le dessin n'est pas à l'échelle).

Solution

La longueur à déterminer vaut $\overline{BC} + \widehat{COD} \cdot \overline{OC} \cdot \dfrac{\pi}{180} + \overline{DE}$.
Commençons par le segment DE, qui est vertical et perpendiculaire au rayon OD. Le segment OD est donc horizontal et la longueur de DE vaut

$$\overline{DE} = 3 + \overline{AO}\cos 45 - 1 - 0.5 = 2,91m.$$

Passons ensuite au segment BC qui est la base du triangle rectangle BCO rectangle en C, point de contact du cable sur la poulie :

$$\overline{BC}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{BO}^2 \;\Rightarrow\; \overline{BC}^2 = \overline{BO}^2 - \overline{OC}^2$$

Le segment BO fait partie du triangle quelconque BOA et nous pouvons appliquer Al-Kashi :

$$\overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AO} \cdot \cos 45 = 2.17m^2.$$

Cela donne les valeurs $\overline{BO} = 1,47m$ et $\overline{BC} = 1,39m$. Nous terminerons par la détermination de l'angle $\widehat{COD}$ en notant qu'il est égal à l'angle $\widehat{CBA}$ car ils ont les côtés perpendiculaires deux à deux :

$$\widehat{COD} = \widehat{CBA} = \widehat{CBO} + \widehat{OBA}.$$

Le triangle BOC est rectangle et $\widehat{CBO} = \arctan\left(\frac{\overline{OC}}{\overline{BC}}\right) = 19,8°$. Dans le triangle quelconque OBA, la règle des sinus donne

$$\widehat{OBA} = \arcsin\left(\frac{\overline{OA}\sin 45}{\overline{OB}}\right) = 74,2° \; ou \; 105,8°.$$

Attention dans ce cas, l'angle doit être plus grand que 90° et $\widehat{OBA} = 105,8°$. Finalement la longueur du cable vaut : $\overline{BC} + 0,5 \cdot (\widehat{CBO} + \widehat{OBA}) \cdot \dfrac{\pi}{180} + \overline{DE} = 5,40m$.