Prof. Éric J.M.DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Juillet 2024

Consignes :

- *Durée de l'épreuve : 2 heures et demie.*
- *Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.*

Question I

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\exp\left(a\sqrt{x}\right)}{x}$$

où a désigne un paramètre réel.

En discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre a,

i. déterminez le domaine de définition de f ;

ii. déterminez les éventuels zéros de f ;

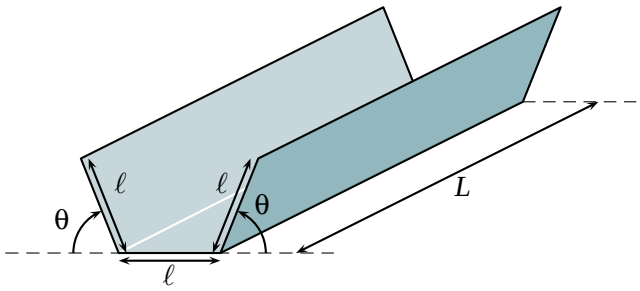
iii. déterminez les éventuelles asymptotes de son graphe ;

iv. étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema ;

v. esquissez le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

Question II

Un bac de corniche est formé à partir d'une tôle de largeur 3ℓ pliée en trois morceaux de largeurs identiques comme indiqué ci-dessous.



Quel angle θ permet de maximiser la quantité d'eau qu'un tronçon de longueur L d'un tel bac de corniche peut contenir sans déborder ? Que vaut le volume maximum correspondant ?

Tournez la page.

Question III

Soit

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n dx$$

où n est un entier positif ou nul quelconque.

i. Calculez I_0.

ii. Calculez I_1.

iii. Montrez, sans calculer explicitement la valeur de I_n, que

$$I_n = b - n\, I_{n-1}$$

où b est un nombre réel à déterminer.

iv. Exprimez

$$J_n = \int_0^1 u^n \,\mathrm{e}^u \, du$$

en fonction de I_n.

SOLUTION TYPE

Avertissement : Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Le choix de la méthode est libre pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.

Question I

Soit

$$f(x) = \frac{\exp(a\sqrt{x})}{x}$$

i. Quel que soit a, la fonction $f(x)$ est définie sur $]0,+\infty[$ puisque $\sqrt{x}$ exige $x \geq 0$ et la division par x, $x \neq 0$.

ii. La fonction f ne possède pas de zéro car $\exp(a\sqrt{x}) > 0$.

iii. • On calcule

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(a\sqrt{x})}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

de sorte que le graphique admet une asymptote verticale en $x = 0$ quel que soit a.

• On calcule ensuite

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(a\sqrt{x})}{x} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } a \leq 0 \\ \dfrac{\infty}{\infty} & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

◇ Si $a \leq 0$, le graphique possède donc une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ et cette asymptote est approchée par le dessus.

◇ Si $a > 0$, l'indétermination peut être levée par deux applications successives de la règle de l'Hospital. On calcule

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\exp(a\sqrt{x}))'}{x'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{a\exp(a\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

puis

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(a\exp(a\sqrt{x}))'}{(2\sqrt{x})'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{a^2\exp(a\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\sqrt{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{a^2\exp(a\sqrt{x})}{2} = +\infty$$

de sorte que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(a\sqrt{x})}{x} = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale en $+\infty$ si $a > 0$.

De façon alternative, ce résultat peut être justifié en se basant sur le fait que l'exponentielle croit plus vite que n'importe quelle puissance de x au voisinage de $+\infty$.

• ◇ Vu la présence de l'asymptote horizontale, il n'y a pas d'asymptote oblique en $+\infty$ si $a \leq 0$.

◇ Si $a > 0$, on calcule

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\exp(a\sqrt{x})}{x^2} = +\infty$$

Ce résultat peut encore être obtenu en se basant sur le fait que l'exponentielle croit plus vite que n'importe quelle puissance de x au voisinage de $+\infty$ ou par quatre applications successives de la règle de l'Hospital.

Il n'y a donc pas d'asymptote oblique en $+\infty$ si $a > 0$.

iv. On calcule

$$f'(x) = \frac{\dfrac{ax\exp\left(a\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} - \exp\left(a\sqrt{x}\right)}{x^2} = \frac{\exp\left(a\sqrt{x}\right)}{x^2}\left(\frac{a\sqrt{x}}{2} - 1\right)$$

- Si $a \leq 0$, $f'(x) < 0$ sur tout le domaine de sorte que la fonction est strictement décroissante et ne présente aucun extremum.

- Si $a > 0$, $f'(x) = 0$ en $x_* = 4/a^2$. On dresse alors le tableau des variations suivant

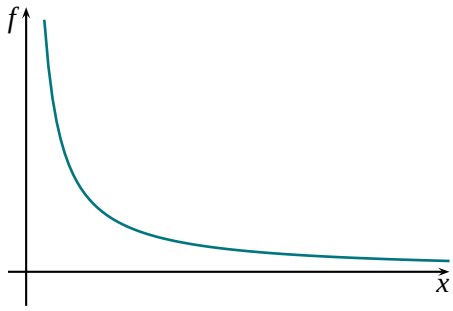
x		x_*	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Ce tableau indique que la fonction présente un minimum en x_* puisqu'elle est décroissante à gauche et croissante à droite de ce point.
La valeur minimale de la fonction f est donnée par $f(x_*) = a^2\,\mathrm{e}^2/4$.

v. Le graphique peut alors être tracé dans les différents cas en vertu des éléments déterminés ci-dessus.

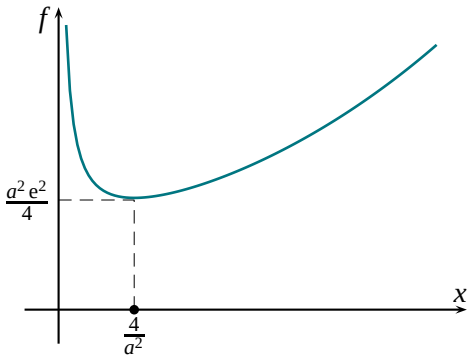
Dans le cas où $a \leq 0$:

- Domaine : $]0, +\infty[$
- Pas de zéro.
- Asymptote horizontale en $+\infty$ approchée par le dessus.
- Asymptote verticale $x = 0$ avec $f(x) \to +\infty$.
- Fonction décroissante sur tout le domaine.



Dans le cas où $a > 0$:

- Domaine : $]0, +\infty[$
- Pas de zéro.
- Asymptote verticale $x = 0$ avec $f(x) \to +\infty$.
- Minimum en x_*.

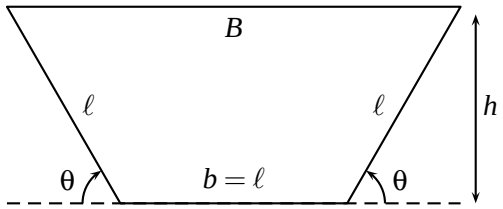


Question II

La quantité d'eau contenue dans un tronçon de longueur L du bac de corniche est donnée par

$$V = L(b+B)\frac{h}{2}$$

où $b = \ell$ est la petite base de la section trapézoïdale, B la grande base et h la hauteur.



Afin d'exprimer ce volume en fonction de la seule variable θ, on calcule

$$B = \ell + 2\ell\cos\theta \quad \text{et} \quad h = \ell\sin\theta$$

Le volume du bac peut alors être exprimée au moyen d'une seule variable sous la forme

$$\begin{aligned} V(\theta) &= L(\ell+\ell+2\ell\cos\theta)\frac{\ell\sin\theta}{2} = L\ell^2(1+\cos\theta)\sin\theta \\ &= L\ell^2(\sin\theta+\cos\theta\sin\theta) \quad \text{où} \quad \theta\in[0,\pi/2] \end{aligned}$$

Pour identifier le maximum de cette fonction, on calcule

$$V'(\theta) = L\ell^2(\cos\theta-\sin^2\theta+\cos^2\theta) = L\ell^2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$$

La dérivée s'annule quand

$$\cos\theta = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{4}$$

c'est-à-dire si $\cos\theta = -1$ ou $\cos\theta = 1/2$. Seule la valeur $\cos\theta = 1/2$ conduit à un angle compris dans l'intervalle $[0,\pi/2]$, à savoir $\theta = \pi/3$. Le point stationnaire $\theta = \pi/3$ correspond bien au volume maximum puisque, comme le montre l'étude du signe de V', V est croissante à gauche de $\pi/3$ et décroissante à droite :

θ	0		$\pi/3$		$\pi/2$
V'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
V		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

Le volume maximum recherché est égal à

$$V\left(\frac{\pi}{3}\right) = L\ell^2\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3} = L\ell^2\frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}L\ell^2$$

Question III

i. Soit
$$I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^0 \, dx$$
Il vient immédiatement
$$I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} dx = \mathrm{e} - 1$$

ii. Soit
$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \, dx$$
Par application de la formule d'intégration par parties
$$\int_a^b f g' dx = \Big[f g \Big]_a^b - \int_a^b f' g \, dx$$
avec
$$\begin{cases} f = \ln x \\ g' = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = 1/x \\ g = x \end{cases}$$
on obtient
$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \, dx = x \ln x \Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} dx = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$$

iii. Soit
$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \, dx$$
Pour vérifier la relation de récurrence proposée, effectuons une intégration par parties en posant
$$\begin{cases} f = (\ln x)^n \\ g' = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = \dfrac{n}{x} (\ln x)^{n-1} \\ g = x \end{cases}$$
On obtient
$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n \Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} n (\ln x)^{n-1} dx = \mathrm{e} - n I_{n-1}$$
qui correspond à la relation donnée avec $b = \mathrm{e}$.

iv. Soit
$$J_n = \int_0^1 u^n \, \mathrm{e}^u \, du$$
En posant $u = \ln x$ c'est-à-dire $\mathrm{e}^u = x$, $du = (1/x) dx$, $u = 0 \to x = 1$, $u = 1 \to x = \mathrm{e}$, on peut transformer l'intégrale selon
$$J_n = \int_0^1 u^n \, \mathrm{e}^u \, du = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n dx = I_n$$

Prof. Éric J.M.DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Septembre 2024

Durée de l'épreuve : 2 heures et demie.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

La fonction arccotangente hyperbolique peut être définie par

$$\operatorname{arcoth}(x) = f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$

i. Déterminez le domaine de définition de f.
ii. Étudiez la parité de f.
iii. Déterminez les éventuels zéros de f.
iv. Déterminez les éventuelles asymptotes de son graphe.
v. Étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema.
vi. Esquissez le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus.

Question II

Trois nombres positifs forment une progression géométrique de raison $r > 1$. Le produit des deux plus grands nombres est égal à 1. Pour quelle valeur de r, la somme de ces trois nombres présente-t-elle la plus petite valeur ?

Question III

Évaluez chacune des expressions suivantes :

i.
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

ii.
$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x\, dx$$

iii.
$$\int \frac{x^2}{1-x}\, dx$$

iv.
$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

SOLUTION TYPE

Avertissement : Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Le choix de la méthode est libre pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.

Question I

Soit

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$

i. Les conditions qui définissent le domaine de f sont $x \neq 1$, pour que l'argument du logarithme soit défini, et

$$\frac{x+1}{x-1} > 0$$

pour que le logarithme existe. On a donc

$$\mathrm{dom} f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

ii. D'une part, le domaine est symétrique par rapport à l'origine. D'autre part,

$$f(-x) = \frac{1}{2}\ln\frac{-x+1}{-x-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1} = -\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = -f(x)$$

La fonction est donc impaire.

La suite de l'étude sera réalisée sur $]1, +\infty[$.

iii. Les zéros éventuels vérifient

$$\frac{x+1}{x-1} = 1$$

Cette équation n'ayant pas de solution, la fonction f n'a pas de zéro.

iv.
- On calcule

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2}\ln\left[\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}\right] = +\infty$$

puisque

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$$

Le graphique admet donc une asymptote verticale en $x = 1$.

- On calcule ensuite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2}\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}\right] = \frac{1}{2}\ln 1 = 0^+$$

où l'approche de la limite 0 par valeurs positives résulte de ce que l'argument du logarithme est supérieur à 1 sur $]1, +\infty[$.

Le graphique possède donc une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ et cette asymptote est approchée par le dessus.

Vu la présence de l'asymptote horizontale, il n'y a pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

v. On calcule

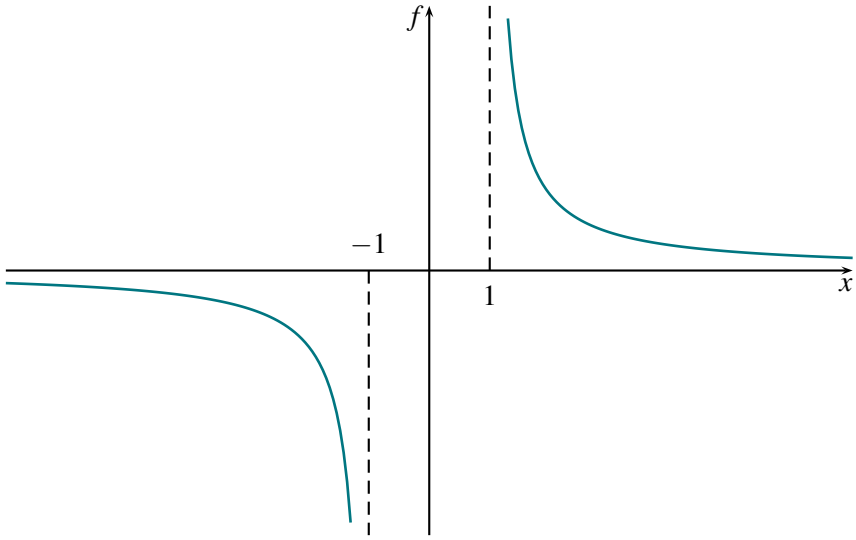
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{1-x^2}$$

Puisque $x > 1$, $f'(x) < 0$ sur $]1,+\infty[$ de sorte que la fonction est strictement décroissante et ne présente aucun extremum.

vi. Le graphique peut alors être tracé en vertu des éléments déterminés ci-dessus et en prenant en compte le caractère impair de la fonction pour représenter le graphique sur $]-\infty,-1[$.

Sur $]1,+\infty[$, on a

- Pas de zéro.
- Asymptote horizontale en $+\infty$ approchée par le dessus.
- Asymptote verticale $x = 1$ avec $f(x) \to +\infty$.
- Fonction décroissante sur tout le domaine.



Question II

Les 3 nombres en progression géométrique de raison $r > 1$ s'écrivent a, ar et ar^2. Leur somme à minimiser vaut donc

$$S = a + ar + ar^2 = a(1+r+r^2)$$

Afin d'exprimer cette somme en fonction de la seule variable r, on utilise l'information selon laquelle le produit des deux plus grands de ces nombres vaut 1, soit

$$a^2r^3 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{r^{3/2}}$$

ce qui donne

$$S(r) = \frac{1+r+r^2}{r^{3/2}} \quad \text{où} \quad r \in]1,+\infty[$$

Pour identifier le minimum de cette fonction, on calcule

$$\begin{aligned} S'(r) &= \frac{(1+2r)r^{3/2} - \frac{3}{2}r^{1/2}(1+r+r^2)}{r^3} \\ &= \frac{r^{1/2}}{2r^3}\left[2r(1+2r) - 3(1+r+r^2)\right] = \frac{r^2-r-3}{2r^{5/2}} \end{aligned}$$

La dérivée s'annule quand

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Seule la valeur $r = r_\star = (1+\sqrt{13})/2$ est supérieure à 1. Le point stationnaire $r = r_\star$ correspond bien à la somme minimale puisque, comme le montre l'étude du signe de S', S est décroissante à gauche de $r*$ et croissante à droite :

r	1		$r_\star$		$+\infty$
S'	$-3/2$	$-$	0	$+$	$+$
S		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Question III

i.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^1 = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{4}$$

ii. Soit

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x \, dx$$

Par application de la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b fg'dx = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f'g \, dx$$

avec

$$\begin{cases} f = x \\ g' = \mathrm{e}^x \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = 1 \\ g = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

on obtient

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x \, dx = \Big[x\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x dx = \Big[x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\Big]_0^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 1$$

iii.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{1-x} \, dx &= \int \frac{x^2-1+1}{1-x} \, dx = \int \frac{x^2-1}{1-x} \, dx + \int \frac{1}{1-x} \, dx \\ &= -\int (1+x) \, dx + \int \frac{1}{1-x} \, dx = -x - \frac{x^2}{2} - \ln|1-x| + C \end{aligned}$$

où C est une constante.

iv. En posant $x = a\sin\theta$ ($dx = a\cos\theta \, d\theta$, $x = 0 \to \theta = 0$, $x = a \to \theta = \pi/2$), on obtient successivement

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \, dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} \; a\cos\theta \, d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta \\ &= a^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4} \end{aligned}$$