Université de Liège

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil

Géométrie et géométrie analytique
Corrigé de l'examen de première session 2024

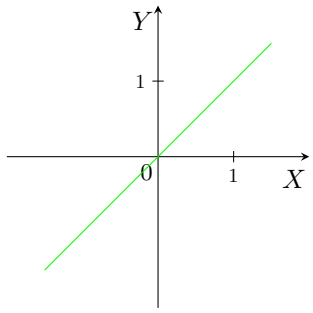
Question 1

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les plans A, B respectivement d'équation cartésienne

$$A \ : \ x - 2y = 1 \qquad B \ : \ x - y + z = 0$$

(1.1) Représenter graphiquement la trace du plan B dans le plan formé par les axes X, Y.
(1.2) Déterminer des équations paramétriques de la droite d, intersection des plans A et B.
(1.3) Déterminer une équation cartésienne du plan D orthogonal à d et passant par l'origine.
(1.4) Déterminer une équation cartésienne du plan C parallèle au plan B et passant par le point P de coordonnées $(1, 1, 1)$.

Exemple de résolution. (1.1) Dans le plan formé par les axes X, Y, la trace de B est la droite d'équation cartésienne $x - y = 0$. La représentation demandée est donc la suivante (droite en vert)



(1.2) On a successivement

$$Q(x, y, z) \in d \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ -y - z = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{-1}.$$

Un vecteur directeur de d a donc pour composantes $(2, 1, -1)$ et le point de coordonnées $(1, 0, -1)$ appartient à d ; des équations paramétriques sont

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(1.3) Le plan D étant orthogonal à d, un vecteur normal au plan est un vecteur directeur de d, soit par exemple le vecteur de composantes $(2, 1, -1)$. Une équation cartésienne est donc $2x+y-z = r$, où r est un réel à déterminer. Comme le plan D passe par l'origine, on a nécessairement $r = 0$. Dès lors D a pour équation $2x + y - z = 0$.

(1.4) Comme C est parallèle à B, ils ont les mêmes vecteurs normaux ; vu l'équation de B, le vecteur de composantes $(1, -1, 1)$ convient. Une équation cartésienne de C est donc $x - y + z = s$, où s est un réel à déterminer. Comme C passe par le point de coordonnées $(1, 1, 1)$, on a $1-1+1 = s$ donc $s = 1$ et finalement C a pour équation cartésienne $x - y + z = 1$.

Question 2

Soient deux droites perpendiculaires X et Y, qui se coupent en un point O. Sur X, on fixe les points A et B, différents de O, de telle sorte que l'on ait $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB}$. Pour tout $P \in Y$, on définit le point Q tel que $3\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP}$.
(2.1) Représenter ces données.
(2.2) Déterminer le lieu des points communs aux droites AP et BQ lorsque P parcourt Y.

Exemple de résolution. Choisissons le point O comme origine du repère et les droites X et Y comme axes du repère, l'orientation étant choisie de telle sorte que le vecteur unité de l'axe X soit $\overrightarrow{OB}$. Ainsi, le point B a pour coordonnées $(1, 0)$ et le point A a pour coordonnées $(2, 0)$.

Cela étant, un point P appartient à l'axe Y si et seulement si ses coordonnées s'écrivent $(0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans ces conditions, le point Q a pour coordonnées $(0, \lambda/3)$, la droite AP a pour équation cartésienne

$$y = -\frac{\lambda}{2}(x-2)$$

et la droite BQ a pour équation cartésienne

$$y = -\frac{\lambda}{3}(x-1).$$

Il s'ensuit que le lieu cherché est l'ensemble des points L de coordonnées cartésiennes (x, y) pour lesquels il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\lambda}{2}(x-2) \\ y = -\dfrac{\lambda}{3}(x-1). \end{cases}$$

Cela étant, si (x, y) est un point du lieu, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\lambda}{2}(x-2) \\ 0 = -\dfrac{\lambda}{2}(x-2) + \dfrac{\lambda}{3}(x-1) = \dfrac{\lambda}{6}(4-x) \end{cases}$$

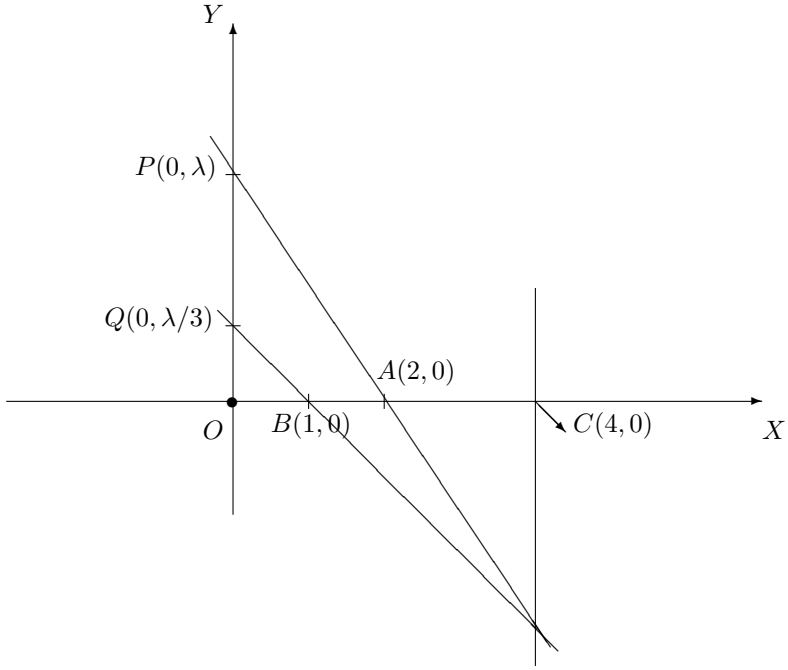
c'est-à-dire tel que

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\lambda}{2}(x-2) \\ 0 = \lambda(x-4) \end{cases}$$

On en déduit que si $\lambda = 0$ alors $y = 0$ et si $\lambda \neq 0$ alors $x = 4$. Les points du lieu sont donc des points de l'axe X ou de la droite verticale d'équation $x = 4$.

Réciproquement, montrons que tout point de l'axe X et tout point de la droite d'équation $x = 4$ sont des points du lieu. De fait, si $y = 0$ alors le point de coordonnées $(x, 0)$ est un point du lieu quel que soit le réel x (il suffit de prendre $\lambda = 0$) et si $x = 4$ alors $(4, y)$ est aussi un point du lieu quel que soit le réel y (il suffit de prendre $\lambda = -y$).

En conclusion, le lieu demandé est l'ensemble des points de l'axe X et de la droite verticale d'équation cartésienne $x = 4$.


Y
$P(0,\lambda)$
$Q(0,\lambda/3)$
$A(2,0)$
O
$B(1,0)$
$C(4,0)$
X

Université de Liège

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil

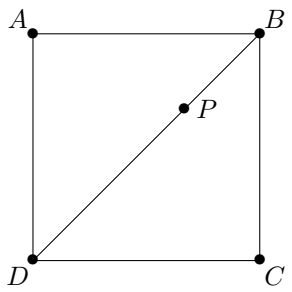
Géométrie et géométrie analytique
Corrigé de l'examen de seconde session 2024

Question 1

On donne un carré $ABCD$ et un point P sur la diagonale BD, situé entre B et D. Démontrer l'égalité

$$\overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{DP} = \|\overrightarrow{AP}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2.$$

Exemple de résolution. On a la représentation suivante.



Par la relation de Chasles puis la linéarité du produit scalaire, on a

$$\overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{DP} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}\right) \bullet \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP}\right) = \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AP}. \ (*)$$

Cela étant, comme les côtés d'un carré sont perpendiculaires, on a

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{DA} = 0.$$

Par ailleurs, par définition du produit scalaire, on a aussi

$$\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{AP} = \|\overrightarrow{AP}\|^2.$$

Considérons alors les deux autres termes de la somme (*) ci-dessus. Comme le produit scalaire est commutatif, linéaire, et comme dans le carré $ABCD$ on a $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{DA} \\
&= \overrightarrow{AP} \bullet \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}\right) \\
&= \overrightarrow{AP} \bullet \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}\right) \\
&= \overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{CA}.
\end{aligned}$$

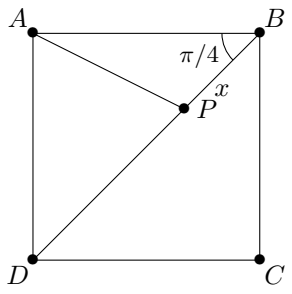
En utilisant alors encore la relation de Chasles, la linéarité du produit scalaire et les propriétés de perpendicularité entre les côtés et entre les diagonales d'un carré, on obtient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{CA} &= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}\right) \bullet \overrightarrow{CA} \\
&= \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{CA} \\
&= \overrightarrow{AD} \bullet \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) \\
&= -\|\overrightarrow{AD}\|^2.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient bien

$$\overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{DP} = \|\overrightarrow{AP}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2.$$

Autre exemple de résolution. Notons x la longueur du segment BP. Comme BD est une diagonale du carré, l'angle en B du triangle ABP vaut $\pi/4$. On a alors la représentation suivante.



Notons aussi l la longueur des côtés du carré.

Cela étant, la longueur du segment BD, diagonale du carré, est égale à $\sqrt{2}l$ donc on a

$$\left\|\overrightarrow{DP}\right\| = \left\|\overrightarrow{DB}\right\| - x = \sqrt{2}l - x.$$

Ainsi, comme les vecteurs $\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{DP}$ sont parallèles mais de sens opposé, on a

$$\overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{DP} = \left\|\overrightarrow{BP}\right\| \left\|\overrightarrow{DP}\right\| (-1) \;=\; x\,(\sqrt{2}l - x)\,(-1) \;=\; x^2 - \sqrt{2}lx.$$

Par ailleurs, dans le triangle APB, la formule « des cosinus » donne

$$x^2 + l^2 = \left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 + 2lx\cos(\pi/4) = \left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 + \sqrt{2}lx$$

et dès lors

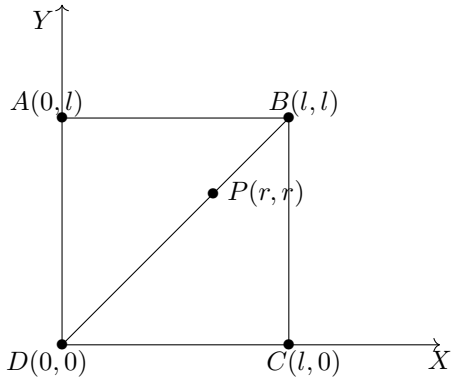
$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 - l^2 = x^2 - \sqrt{2}lx = \overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{DP},$$

ce qui est l'égalité qu'il fallait démontrer.

Encore un autre exemple de résolution. Cette fois, procédons analytiquement. On définit un repère orthonormé en prenant D pour origine. Si l désigne la longueur des côtés du carré, on a alors

$$A(0,l), \quad B(l,l), \quad C(l,0), \quad P(r,r)$$

où r est un réel (ici $r \in [0,l]$ puisqu'on dit que le point P est entre B et D).



Cela étant, les vecteurs $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{AP}$ ont respectivement pour composantes

$$(r-l, r-l), \quad (r,r), \quad (r, r-l)$$

donc on obtient d'une part

$$\overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{DP} = 2\,r\,(r-l) = 2r^2 - 2rl$$

et d'autre part

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 = r^2 + (r-l)^2 = 2r^2 - 2rl + l^2.$$

Dès lors on a

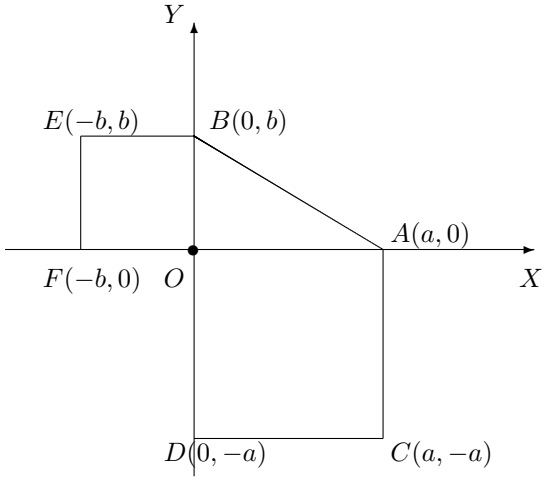
$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 - l^2 = 2r^2 - 2rl = \overrightarrow{BP} \bullet \overrightarrow{DP},$$

ce qui est l'égalité qu'il fallait démontrer.

Question 2

Sur les côtés OA et OB d'un triangle OAB rectangle en O, on construit les carrés $OACD$ et $OBEF$ à l'extérieur du triangle OAB. Démontrer que la hauteur du triangle issue de O et les droites AE et BC sont concourantes.

Exemple de résolution.



Choisissons le point O comme origine d'un repère orthonormé dont l'axe des abscisses est la droite OA et l'axe des ordonnées la droite OB. Dans ce repère, les points A, B, C, D, E, F ont pour coordonnées $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(a,-a)$, $D(0,-a)$, $E(-b,b)$ et $F(-b,0)$ avec $a, b \in \mathbb{R}_0$ puisque $OACD$ et $OBEF$ sont des carrés et que OAB est un triangle rectangle en O.

Cela étant, d'une part la hauteur issue de O est orthogonale à la droite AB, dont un vecteur directeur est le vecteur $\overrightarrow{AB}(-a,b)$. Cette hauteur a donc pour équation cartésienne

$$ax - by = 0.$$

D'autre part, les droites AE et BC ont respectivement pour équation cartésienne

$$bx + (a+b)y - ab = 0 \quad \text{et} \quad (a+b)x + ay - ab = 0.$$

L'intersection de ces deux droites est donnée par les solutions du système

$$\begin{cases} bx + (a+b)y - ab = 0 \\ (a+b)x + ay - ab = 0. \end{cases}$$

Comme $-(a^2+b^2+ab) = det\begin{pmatrix} b & a+b \\ a+b & a \end{pmatrix} \neq 0$, ce système admet une seule solution, à savoir le couple

$$\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2+ab}, \frac{a^2b}{a^2+b^2+ab}\right). \qquad (*)$$

Ce couple (*) vérifiant l'équation cartésienne de la hauteur issue de O, on conclut donc que cette hauteur et les droites AE et BC sont bien concourantes.