Université de Liège
Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Trigonométrie et calcul numérique

Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Juillet 2024

Question 1 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation trigonométrique suivante :*

$$2\sin(2x) + \cos(2x) = -2$$

et représenter les solutions appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Solution A

L'équation est linéaire en $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$. En posant $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, nous pouvons écrire :

$$\sin(2x) + \operatorname{tg}\alpha\cos(2x) = -1 \;\Leftrightarrow\; \sin(2x) + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos(2x) = -1 \quad \boxed{\text{A : 2pt}}$$

Après mise au même dénominateur et simplification par $\cos\alpha$, l'équation devient :

$$\sin(2x)\cos\alpha + \cos(2x)\sin\alpha = -\cos\alpha,$$

soit

$$\sin(2x+\alpha) = -\cos\alpha \quad \boxed{\text{B : 2pt}}$$

Ensuite, en notant que $-\cos\alpha = \cos(\pi-\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi + \alpha\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, l'équation de départ donne finalement :

$$\sin(2x+\alpha) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \quad \boxed{\text{C : 2pt}}$$

dont les solutions sont :

- $2x + \alpha = \alpha - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ soit $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $\boxed{\text{D : 1pt}}$ et
- $2x + \alpha = \pi - \alpha + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ soit $x = \dfrac{3\pi}{4} - \alpha + k\pi = \dfrac{3\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\right) + k\pi$ $\boxed{\text{E : 1pt}}$

La représentation de ces solutions sur le cercle trigonométrique dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ se fait en utilisant la définition de la tangente et est reprise à la Figure **??**.

Solution B

Une autre solution consiste à exprimer $\sin(2x)$ et $\cos(2x)$ par les formules de l'angle moitié, soit :

- $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ et
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\boxed{\text{A : 2pt}}$

L'équation de départ devient alors :

$$4\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \underbrace{-2}_{-2(\sin^2 x + \cos^2 x)} \quad \boxed{\text{B : 2pt}}$$

En divisant les deux membres par $\cos^2 x$ ($\cos x$ ne peut pas être solution de l'équation !) et en ré-organisant les différents termes :

$$4\frac{\sin x}{\cos x} + 3 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 3 = 0 \quad \boxed{\text{C : 2pt}}$$

Cette équation du second degré possède les solutions :

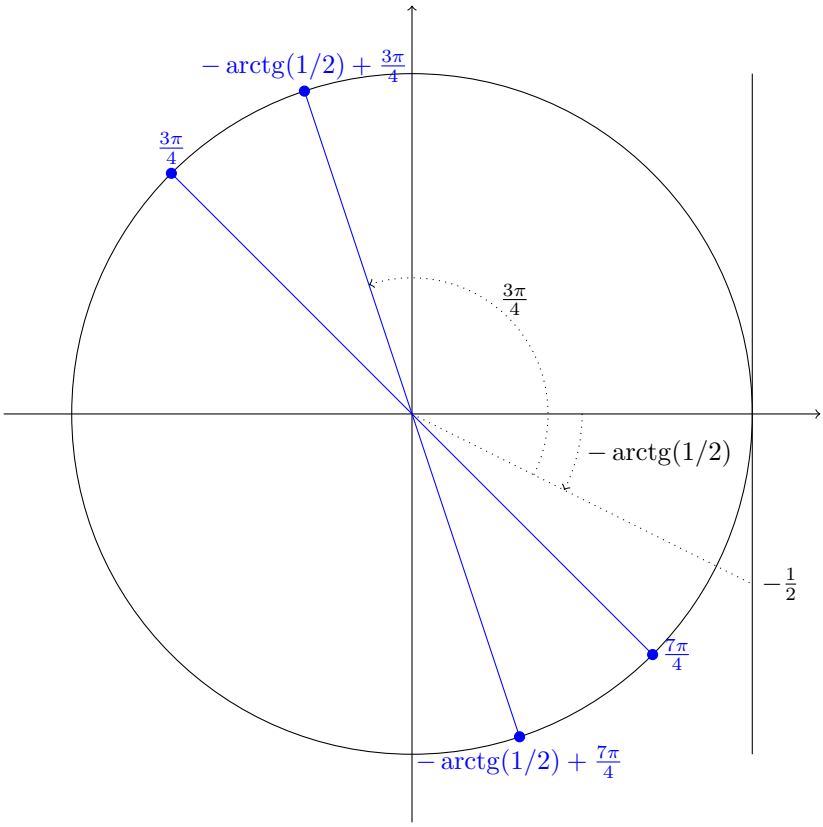


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique $\boxed{\text{F : 2pt}}$.

— $\operatorname{tg} x = -1$ soit $x = \operatorname{arctg}(-1) + k\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ $\boxed{\text{D : 1pt}}$ et
— $\operatorname{tg} x = -3$ soit $x = \operatorname{arctg}(-3) + k\pi$ $\boxed{\text{E : 1pt}}$

A première vue, cette dernière solution est différente de celle donnée par la solution A. Cependant, il est aisé de prouver que ce n'est pas le cas en évaluant :

$$\operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}(3) - \operatorname{arctg}(1/2)\right] = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

Ce dont nous pouvons conclure que $\operatorname{arctg}(3) = \operatorname{arctg}(1/2) + \frac{\pi}{4} + k\pi$. En exprimant le second ensemble de solutions, nous avons $x = -\operatorname{arctg}(3) + k\pi = -\operatorname{arctg}(1/2) + \frac{\pi}{4} + k\pi = \frac{3\pi}{4} - \operatorname{arctg}(1/2) + k\pi$ qui est identique à la solution A.

Question 2 *Soit les angles A et B tel que* $\sin A = \frac{21}{29}$, $\cos A = \frac{20}{29}$, $\sin B = \frac{12}{13}$ *et* $\cos B = \frac{5}{13}$. *Déterminer, sans calculatrice, la valeur exacte de l'expression :*

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$$

Solution
Par définition de la tangente, nous pouvons transformer l'expression de départ en :

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \quad \boxed{\text{A : 1pt}}$$

Ensuite en utilisant la formule du sinus de l'angle moitié :

$$\sin(A+B) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\sin(A+B)}{2\cos^2\frac{A+B}{2}} \quad \boxed{\text{B : 1pt}}$$

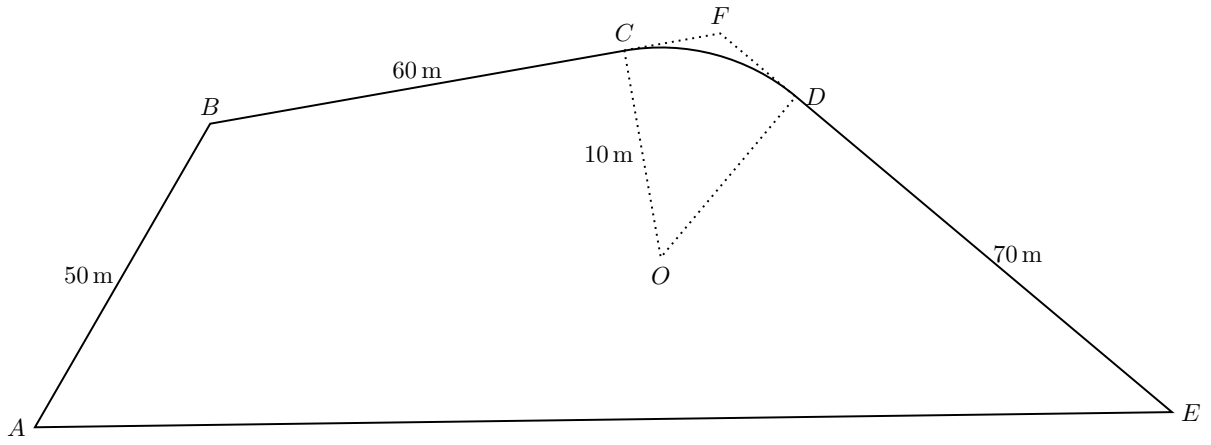
Par la relation $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, nous pouvons écrire l'expression de départ en fonction des sinus et cosinus de la somme des angles :

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{\sin(A+B)}{1+\cos(A+B)} \quad \boxed{\text{C : 1pt}}$$

L'utilisation des formules d'addition des angles nous permet ensuite d'obtenir l'expression de départ en fonction des sinus et cosinus des angles A et B connus $\boxed{\text{D : 1pt}}$:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \frac{\sin A\cdot\cos B + \cos A\cdot\sin B}{1+\cos A\cdot\cos B - \sin A\cdot\sin B} = \frac{\frac{21}{29}\cdot\frac{5}{13}+\frac{20}{29}\cdot\frac{12}{13}}{1+\frac{20}{29}\cdot\frac{5}{13}-\frac{21}{29}\cdot\frac{12}{13}} = \frac{345}{225} = \frac{23}{15} \quad \boxed{\text{E : 1pt}}$$

Question 3 *Un champ $ABCDE$ est représenté en trait plein sur la figure ci-dessous (le dessin n'est pas à l'échelle !). Les mesures des segments de droite sont $\overline{AB} = 50\,\text{m}$, $\overline{BC} = 60\,\text{m}$ et $\overline{DE} = 70\,\text{m}$. En raison de la présence d'un obstacle, la longueur du segment AE n'a pu être directement mesurée mais l'angle formé par les côtés AB et BC a été mesuré et vaut $127°$. L'arc de cercle CD de rayon $10\,\text{m}$ est tangent aux côtés BC et DE dont les prolongements forment un angle de $132°$ en F. Calculer la longueur du segment de droite AE et évaluer la surface totale du champ $ABCDE$. Les calculs doivent être effectués avec 5 chiffres significatifs.*



Solution
Par construction, les triangles OCF et ODF sont rectangles respectivement en C et D (l'arc de cercle est tangent aux segments BC et DE). Ils sont aussi identiques puisqu'ils ont l'hypoténuse et le rayon de l'arc de cercle en commun. Par symétrie, nous pouvons alors écrire :

$$\widehat{COF} = 90° - \frac{132°}{2} \text{ et } \operatorname{tg}\widehat{COF} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{DO}} \Rightarrow \overline{CF} = \overline{FD} = 10\cdot\operatorname{tg}24° = 4{,}45\,\text{m} \quad \boxed{\text{A : 2pt}}$$

Ensuite, l'application de la relation d'Al-Kashi dans le triangle quelconque BFE permet d'évaluer la diagonale BE :

$$\overline{BE}^2 = (\overline{BC}+\overline{CF})^2 + (\overline{DE}+\overline{DF})^2 - 2\cdot(\overline{BC}+\overline{CF})\cdot(\overline{DE}+\overline{DF})\cdot\cos\widehat{BFE} \quad \boxed{\text{B : 1pt}}$$

Après remplacement par les valeurs numériques de l'énoncé, on trouve $\overline{BE} = 126{,}96\,\mathrm{m}$.
Dans le même triangle BFE, l'application de la formule des sinus donne :

$$\frac{\overline{BE}}{\sin\widehat{BFE}} = \frac{\overline{DE}+\overline{DF}}{\sin\widehat{FBE}} \Rightarrow \widehat{FBE} = \arcsin\left(\frac{(\overline{DE}+\overline{DF})\cdot\sin\widehat{BFE}}{\overline{BE}}\right) = 25{,}835^\circ \quad \boxed{\text{C : 1pt}}$$

Maintenant, en travaillant dans le triangle quelconque ABE, il est possible de déterminer la longueur du segment AE :

$$\widehat{ABE} = \widehat{ABC} - \widehat{FBE} = 127^\circ - 25{,}835^\circ = 101{,}165^\circ \quad \boxed{\text{D : 1pt}}$$

et ensuite :

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BE}\cdot\cos\widehat{ABE} \Rightarrow \overline{AE} = 145{,}18\,\mathrm{m} \quad \boxed{\text{E : 1pt}}$$

La surface totale du champ peut être évaluée par la somme des surfaces des triangles ABE et BFE dont il faut ensuite retrancher la surface excédentaire CFD délimitée par l'arc de cercle.

$$S_{ABE} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BE}\cdot\sin\widehat{ABE}}{2} = 3114\,\mathrm{m}^2 \text{ et } S_{BFE} = \frac{\overline{BF}\cdot\overline{FE}\cdot\sin\widehat{BFE}}{2} = 1783\,\mathrm{m}^2 \quad \boxed{\text{F : 2pt}}$$

La surface CFD est évaluée par différence entre la surface totale des triangles rectangles OCF et ODF et la portion du disque OCD :

$$S_{CFD} = 2\cdot\frac{\overline{OC}\cdot\overline{CF}}{2} - \frac{2\cdot 24^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot\overline{OC}^2 = 2{,}6\,\mathrm{m}^2 \quad \boxed{\text{G : 1pt}}$$

La surface totale demandée vaut donc :

$$S_{ABCDE} = S_{ABE} + S_{BFE} - S_{CFD} = 4894{,}4\,\mathrm{m}^2 \quad \boxed{\text{H : 1pt}}$$

NOM :	NUMÉRO D'ORDRE :
PRÉNOM :	

Prof. Pierre DEWALLEF
Prof. Quentin LOUVEAUX

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE DE TRIGONOMÉTRIE ET CALCUL NUMÉRIQUE

Septembre 2024

Consignes :

- *Durée de l'épreuve : 2 heures et demie.*
- *Déposez une pièce d'identité sur votre table.*
- *Inscrivez votre nom et votre prénom (en MAJUSCULES) ainsi que votre numéro d'ordre dans les cases prévues ainsi que sur chacune des pages que vous rendez.*
- *N'écrivez rien sur le questionnaire. Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées. Vous pouvez écrire au verso de vos feuilles, mais pas au verso du questionnaire.*
- *Rendez la page d'énoncé correspondante comme première page de chacune de vos réponses.*
- *L'usage d'une calculatrice scientifique est autorisé pour cette épreuve.*
- *Justifiez toutes vos démarches et raisonnement.*

Question I

Pour quelles valeurs du paramètre réel m, l'équation trigonométrique suivante admet-elle des solutions dans $\mathbb{R}$?

$$\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = m$$

Résoudre ensuite cette équation dans $\mathbb{R}$ si $m = \sqrt{3}$ et représenter toutes les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution

Notons que $\sqrt{3}$ est la tangente de l'angle remarquable $\pi/3$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cos 2x - \sin 2x = \frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x - \cos\frac{\pi}{3}\sin 2x}{\cos\frac{\pi}{3}} = m$$

Ensuite, l'utilisation de la formule d'addition des angles permet de ré-écrire l'équation de départ :

$$\sin(\frac{\pi}{3} - 2x) = \frac{m}{2}$$

Pour que cette équation accepte des solutions réelles, les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$-1 \leq \frac{m}{2} \leq 1 \;\Rightarrow\; -2 \leq m \leq 2.$$

Si $m = \sqrt{3}$, l'équation devient :

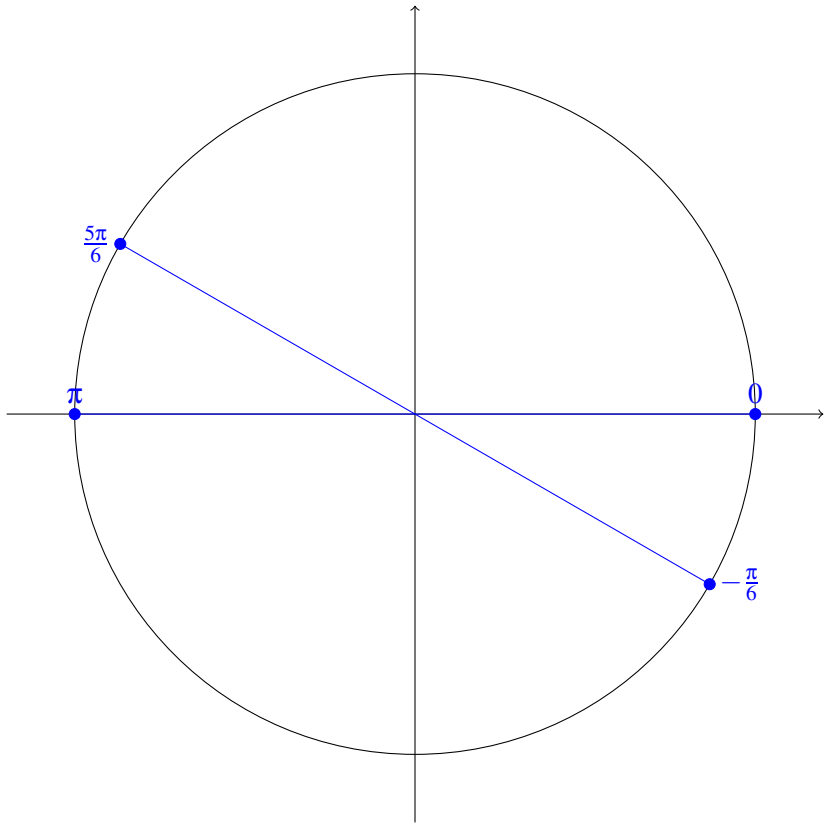
$$\sin(\frac{\pi}{3} - 2x) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

qui possède les solutions suivantes :

— $\frac{\pi}{3} - 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ soit $x = k\pi \;\forall\, k \in \mathbb{Z}$

— $\frac{\pi}{3} - 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ soit $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \;\forall\, k \in \mathbb{Z}$

Les solutions sont représentées sur le cercle trigonométrique ci-dessous :


$\frac{5\pi}{6}$
π
0
$-\frac{\pi}{6}$

NOM : NUMÉRO D'ORDRE :

PRÉNOM :

Question II

Démontrer que dans tout triangle quelconque non dégénéré dont les côtés ont une longueur a, b et c et dont la mesure des angles opposés vaut respectivement A, B et C :

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}$$

Solution

Dans un triangle quelconque non dégénéré, nous pouvons écrire :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle.

$$\left.\begin{array}{l} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{2R(\sin A - \sin B)}{2R(\sin A + \sin B)}$$

Après simplification et factorisation du numérateur et du dénominateur par les formules de Simpson :

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

L'utilisation de la définition de la tangente permet de démontrer :

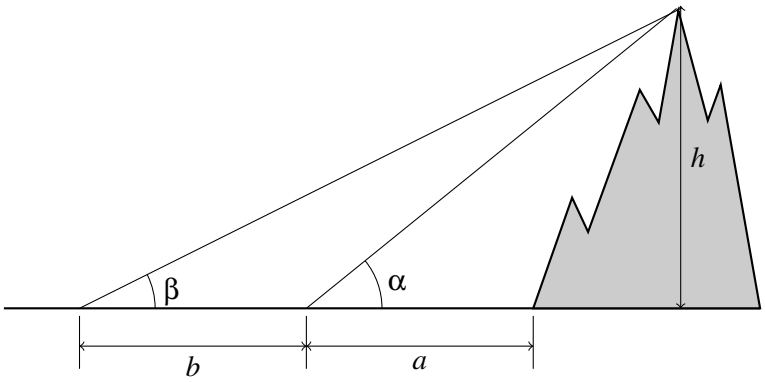
$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}$$

NOM : NUMÉRO D'ORDRE :

PRÉNOM :

Question III

Un observateur se situant à une distance $a = 4230\,\text{m}$ de la base d'une montagne mesure un angle d'élévation $\alpha = 40{,}854°$ entre l'horizontale et le sommet de cette montagne. Cette même personne recule ensuite de manière rectiligne d'une distance $b = 3400\,\text{m}$ et mesure un nouvel angle d'élévation $\beta = 28{,}298°$ entre l'horizontale et le sommet. En supposant que le sol est parfaitement plat et horizontal, évaluer la hauteur verticale h de cette montagne.



Solution

Appelons x, la distance entre le premier point d'observation et le pied de la hauteur h. Nous pouvons alors écrire :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{h}{a+x} \\ \operatorname{tg}\beta &= \frac{h}{a+b+x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (a+x)\operatorname{tg}\alpha = (a+b+x)\operatorname{tg}\beta$$

En remplaçant les valeurs de a, b, α et β dans l'équation précédente et en résolvant par rapport à x, nous obtenons :

$$x = \frac{(a+b)\operatorname{tg}\beta - a\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = 1377{,}9\,\text{m}$$

Ensuite, nous pouvons exprimer h par :

$$h = (a+x)\operatorname{tg}\alpha = 4849{,}8\,\text{m}$$