Université de Liège

Examen d'admission aux études de bachelier ingénieur civil et architecte

Test à blanc

Trigonométrie et Calcule Numérique

Avril 2025

Consignes

- NOM (en MAJUSCULES), prénom (en minuscules) et numéro d'ordre sur chaque feuille dans les emplacements prévus.
- Contrôlez soigneusement que vous avez bien les 4 pages.
- Ne pas dégrafer les feuilles.
- Répondez directement sous la question.
- Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, veuillez les demander aux surveillants qui vous en fourniront. Les pages supplémentaires seront ajoutées après la dernière page et numérotées.
- Les pages verso peuvent être utilisées comme brouillon ; elles ne **seront pas corrigées !**
- GSM, smartphones et tablettes interdits MAIS il est permis d'utiliser une calculette.
- Préparer une pièce d'identité sur la table.
- Fin de l'examen à 18 heures.

Question 1 *Résoudre l'équation suivante dans* $\mathbb{R}$

$$4\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x + \sin x = 0 \tag{1}$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

Solution Nous constatons qu'il s'agit presque d'une équation homogène puisque les deux premiers termes sont de degré 3 alors que le troisième terme est de degré 1. En utilisant l'identité $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$, on peut transformer le dernier terme en terme d'ordre 3 en multipliant $\sin x$ par $\cos^2 x + \sin^2 x$. On transforme donc (1) en

$$4\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x + \sin^3 x + \sin x\cos^2 x = 0. \tag{2}$$

Nous obtenons maintenant une équation homogène de degré 3. Pour la résoudre, il convient de diviser par $\cos^3 x$. Au préalable, nous devons vérifier que $\cos x = 0$ ne mène pas à une solution possible. Cependant, on voit aisément que si $\cos x = 0$, les deux premiers termes de (1) s'annulent et il reste $\sin x = 0$, ce qui est incompatible avec $\cos x = 0$. En divisant (2) par $\cos^3 x$, on obtient donc

$$4 - 2\tan x + \tan^3 x = 0. \tag{3}$$

On remplace $y = \tan x$ dans (3) et on obtient le polynôme $y^3 - 2y + 4 = 0$. En testant les diviseurs de 4, on constate que $y = -2$ est solution. On peut donc factoriser en

$$(y+2)(y^2 - 2y + 2) = 0 \tag{4}$$

Par la règle du produit nul, on trouve $y = -2$ ou $y^2 - 2y + 2 = 0$, dont on peut calculer $\Delta = 4 - 8 = -4$ et qui n'a donc pas de solution. On trouve donc finalement $\tan x = -2$, c'est-à-dire $x = \arctan(-2) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Les valeurs comprises entre $-\pi$ et π sont $\arctan(-2)$ et $\arctan(-2) + \pi$.

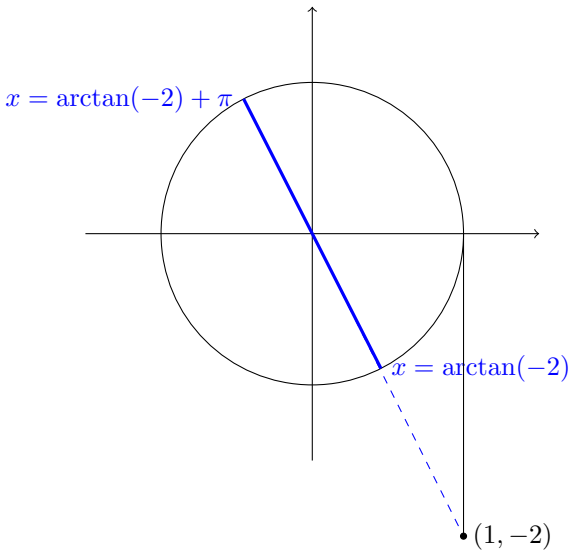
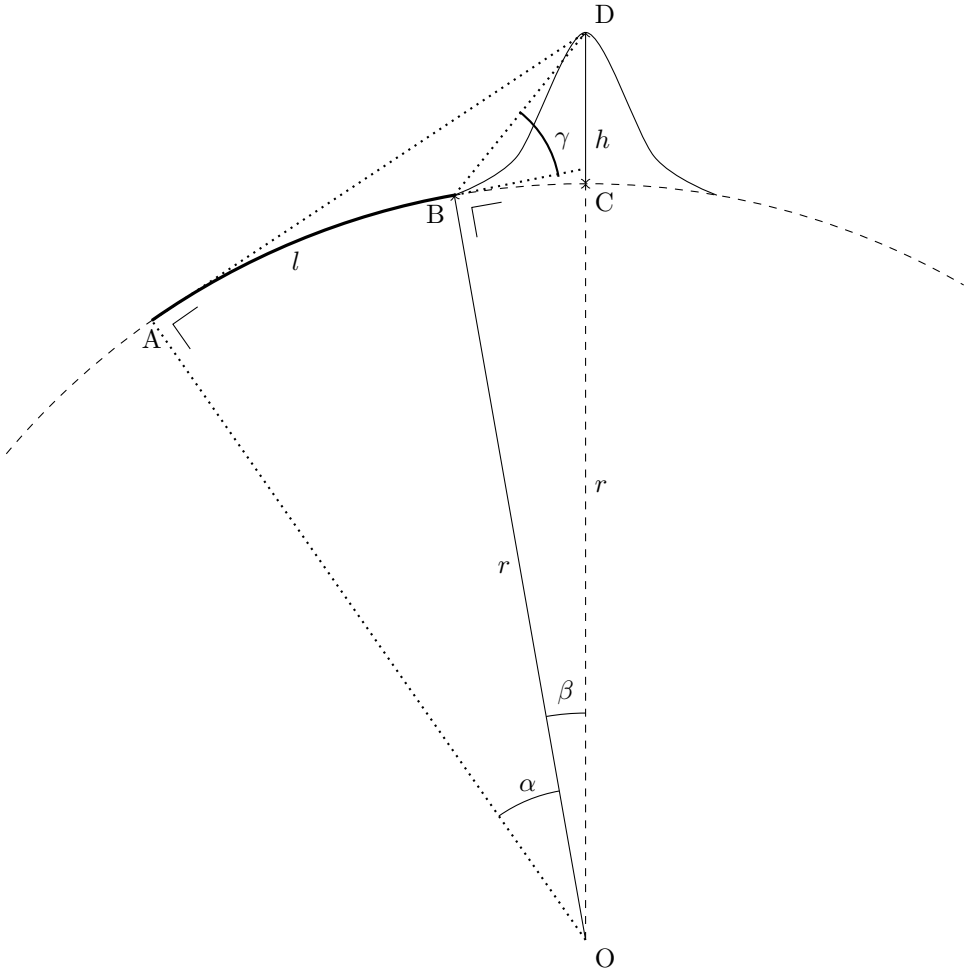


FIGURE 1 – Représentation des solutions sur le cercle trigonométrique

Question 2 *Des géographes désirent mesurer l'altitude du sommet d'une île volcanique. A la base du volcan, l'angle d'élévation du sommet par rapport à l'horizon est* $\gamma = 7.7247°$. *Lorsque le bateau d'observation s'éloigne sur la mer, les observateurs voient le sommet du volcan disparaitre à l'horizon après avoir parcouru une distance* $l = 146.710\,\text{km}$. *Sachant que le rayon moyen de la Terre est* $r = 6371.010\,\text{km}$ *et en supposant une Terre parfaitement sphérique, on vous demande de :*

1. *Calculer la valeur de l'angle* α *.*
2. *Exprimer le rapport* $\frac{r}{r+h}$ *dans les deux triangles* OBD *et* OAD.
3. *Déterminer la valeur de l'angle* β *en vous servant de l'équation obtenue au point précédent.*
4. *Déterminer la valeur de la hauteur* h *du volcan.*



Les calculs doivent être effectués au mètre près et avec une précision de 4 décimales pour les angles. Les points O, A, B, C et D sont tous situés dans le plan du même méridien local. Le dessin n'est pas à l'échelle !

Solution

1. L'angle α détermine l'arc de cercle l selon la relation :

$$l = r \times \alpha \frac{\pi}{180} \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{l \times 180}{r \times \pi} = \frac{146\,710 \times 180}{6\,371\,010 \times \pi} = 1.3194°$$

2. Ensuite l'application de la formule du cosinus dans le triangle rectangle OAD donne :

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{r}{r + h}$$

La formule des sinus appliquée au triangle OBD donne :

$$\frac{r}{\sin(180° - (\gamma + 90°) - \beta} = \frac{r + h}{\sin(90° + \gamma)}$$

Après simplification, nous obtenons la relation :

$$\frac{r}{r + h} = \frac{\sin(90° - (\beta + \gamma))}{\cos\gamma} = \frac{\cos(\beta + \gamma)}{\cos\gamma}$$

3. En combinant les deux relations obtenues, nous pouvons écrire une équation dont la seule inconnue est l'angle β :

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\beta + \gamma)}{\cos\gamma}$$

que nous pouvons développer en utilisant la formule du cos de la somme de deux angles :

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta}{\cos\gamma} = \cos\beta - \operatorname{tg}\gamma\sin\beta$$

En divisant les deux membres par $\cos\beta$:

$$\cos\alpha - \sin\alpha\operatorname{tg}\beta = 1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\beta = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{tg}\gamma - \sin\alpha} \;\Rightarrow\; \beta = 0.1349°$$

4. La réponse finale est obtenue en utilisant la relation :

$$h = \frac{r}{\cos(\alpha+\beta)} - r = 2053\,\mathrm{m}$$

Université de Liège

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil

Géométrie et géométrie analytique
Corrigé de l'examen à blanc, avril 2025

Question 1

Dans un repère orthornormé de l'espace on donne les points A, B, C respectivement de coordonnées

$$(1,0,1), \quad (1,-1,0), \quad (0,1,1).$$

On demande de éterminer
(1.1) la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$,
(1.2) la mesure $\theta \in [0,\pi]$ de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (on demande la valeur <u>exacte</u>, pas mesurée à partir d'un dessin ; et rappel : les calculatrices sont interdites),
(1.3) l'équation cartésienne du plan contenant les points A, B et C.

Exemple de résolution. **(1.1)** Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont respectivement $(0,-1,-1)$ et $(-1,1,0)$; on a donc

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0 \times (-1) + (-1) \times 1 + (-1) \times 0 = -1.$$

(1.2) On a

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \ \|\overrightarrow{AC}\| \ \cos(\theta)$$

où $\|\vec{v}\|$ désigne la norme (longueur) du vecteur $\vec{v}$.

Puisque les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont respectivement $(0,-1,-1)$ et $(-1,1,0)$ on a aussi

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \sqrt{(-1)^2+1^2+0} = \sqrt{2}.$$

Comme $\theta \in [0,\pi]$ on obtient finalement

$$-1 = \sqrt{2}\ \sqrt{2}\ \cos(\theta) \ \Leftrightarrow\ \cos(\theta) = -1/2 \ \Leftrightarrow\ \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

(1.3) Le plan dont il est question passe par le point A de coordonnées $(1,0,1)$ et a comme vecteurs directeurs les deux vecteurs non parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ respectivement de composantes $(0,-1,-1)$ et $(-1,1,0)$. L'équation cartésienne de ce plan est donc

$$det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y & -1 & 1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Comme

$$det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y & -1 & 1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (x-1) \ + \ 0 + \ (-1)\ (-y+z-1) = x+y-z$$

l'équation demandée est

$$x+y-z=0.$$

Question 2

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole d'équation cartésienne

$$y = (x+1)^2.$$

(2.1) Déterminer le lieu des milieux des cordes découpées par la parabole sur les droites comprenant l'origine des axes.
(2.2) Dans le même repère orthonormé, représenter la parabole donnée ainsi que le lieu que vous avez obtenu au point précédent.

Exemple de résolution. **(2.1)** L'axe de la parabole donnée est parallèle à l'axe Y ; les droites parallèles à Y ne la coupent donc qu'en un seul point. Les droites comprenant l'origine et qui coupent la parabole en deux points (éventuellement confondus dans le cas des tangentes) sont donc d'équation $y = mx$ où $m \in \mathbb{R}$.

Les points d'intersection de la parabole donnée et de la droite d'équation $y = mx$ sont les solutions du système

$$\begin{cases} y = mx \\ y = (x+1)^2. \end{cases}$$

Les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation $mx = (x+1)^2$ (*). On a

$$mx = (x+1)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + (2-m)x + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation étant égal à $\Delta = (2-m)^2 - 4 = -4m + m^2 = m(m-4)$, l'équation (*) possède des solutions réelles si et seulement si $\Delta \geq 0$ c'est-à-dire si et seulement si $m \in]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$. Dans ces conditions, les points d'intersection de la parabole donnée et de la droite d'équation $y = mx$ ont pour coordonnées

$$\left(\frac{m-2-\sqrt{\Delta}}{2}, m\,\frac{m-2-\sqrt{\Delta}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{m-2+\sqrt{\Delta}}{2}, m\,\frac{m-2+\sqrt{\Delta}}{2}\right).$$

Pour tout $m \in]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$, le point milieu de la corde découpée par la parabole sur la droite d'équation $y = mx$ a ainsi pour coordonnées

$$\left(\frac{m-2}{2}, m\,\frac{m-2}{2}\right)$$

et pour déterminer l'équation cartésienne du lieu, il reste à éliminer m dans le système

$$\begin{cases} x = (m-2)/2 \\ y = m\ (m-2)/2. \end{cases}$$

On a

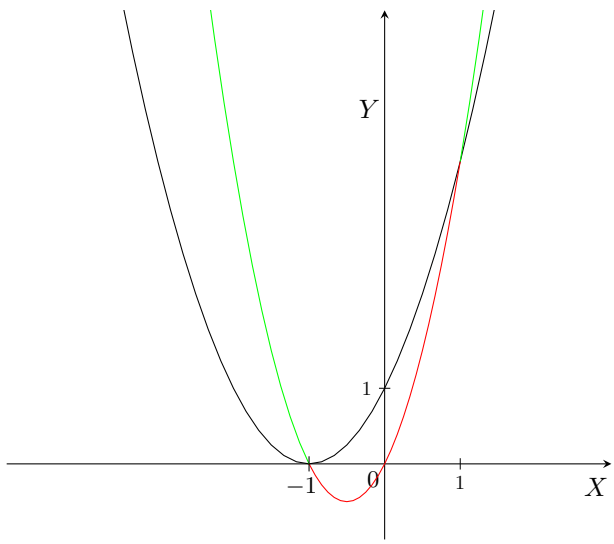
$$\begin{cases} x = (m-2)/2 \\ y = m\ (m-2)/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(x+1) \\ y = m\ (m-2)/2 \end{cases}$$

donc on obtient l'équation cartésienne

$$y = 2(x+1)x.$$

Le lieu cherché est donc composé de l'union de deux arcs de cette parabole : l'un correspondant à $m \leq 0$, c'est-à-dire à $x \leq -1$, et l'autre à $m \geq 4$, c'est-à-dire $x \geq 1$. En résumé, le lieu est l'ensemble des points de la parabole d'équation $y = 2x(x+1)$ tels que $|x| \geq 1$.

(2.2) Voici les représentations demandées :
- la parabole donnée est en noir
- le lieu, en vert, est la partie de la parabole d'équation cartésienne $y = 2x(x+1)$ dont les abscisses appartiennent à $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$; l'autre partie de cette parabole est en rouge.


Y
1
−1
0
1
X