NOM :	NUMÉRO D'ORDRE :
PRÉNOM :	

Prof. Émilie CHARLIER
Prof. Pierre SACRÉ

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ALGÈBRE

Juillet 2025

Consignes :

- *Durée de l'épreuve : 2 heures et demie.*
- *Déposez une pièce d'identité sur votre table.*
- *Inscrivez votre nom et votre prénom (en MAJUSCULES) ainsi que votre numéro d'ordre dans les cases prévues ainsi que sur chacune des pages que vous rendez.*

- *Sauf indication contraire, n'écrivez rien sur le questionnaire. Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées. Vous pouvez écrire au verso de vos feuilles, mais pas au verso du questionnaire.*
- *Rendez la page d'énoncé correspondante comme première page de chacune de vos réponses.*

- *Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.*
- *Sauf indication contraire, justifiez vos réponses en montrant vos développements. Les réponses doivent être et entièrement simplifiées et exactes, à moins qu'une approximation soit demandée.*

Question I

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter en fonction du paramètre réel m l'inéquation suivante :

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-m}} > 1.$$

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

NOM :	NUMÉRO D'ORDRE :
PRÉNOM :	

Question II

i. Factoriser le polynôme
$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$$
en un produit de monômes du type $(x - \alpha_i)$ où $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

ii. Décomposer la fraction rationnelle
$$\frac{3x^2 - x + 10}{x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12}$$
en une somme de fractions simples, c'est-à-dire
$$\frac{3x^2 - x + 10}{x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\beta_i}{x - \alpha_i},$$
où les $\alpha_i \in \mathbb{R}$ sont les zéros du dénominateur et les $\beta_i \in \mathbb{R}$ sont des coefficients à déterminer.

iii. Exprimer la somme
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{3k^2 - k + 10}{k^4 + 2k^3 - 7k^2 - 8k + 12}$$
sous la forme d'une somme d'un réel et de deux fractions simples en la variable n (supposée entière et au moins égale à 3).

Suggestion : Utiliser les résultats précédents et changer les indices sommatoires pour transformer l'expression proposée en une somme de quatre termes, où chaque terme est du type $\sum_{j=i_0}^{i_1} \frac{1}{j}$.

NOM : NUMÉRO D'ORDRE :

PRÉNOM :

Question III

Vos réponses finales aux sous-questions ci-dessous doivent tenir uniquement dans les cadres indiqués sur ce questionnaire. Ne fournissez aucune justification à vos réponses pour ces sous-questions.

Vos réponses peuvent être laissées sous la forme d'opérations arithmétiques élémentaires, factorielles, et coefficients binomiaux.

i. Trouver les nombres complexes z satisfaisant les deux conditions suivantes : $z+\bar{z}=6$ et $z\cdot\bar{z}=25$.

Réponse :

ii. Une ville de six quartiers connaît six cambriolages au cours d'une semaine donnée. Supposons que les cambriolages soient localisés aléatoirement, avec toutes les probabilités équivalentes. Quelle est la probabilité qu'il existe au moins un quartier connaissant plus d'un cambriolage ?

Réponse :

iii. Quel est le coefficient du terme en x^2 du polynôme défini par $(x-4)^5+(x+1)^5$?

Réponse :

iv. Quel est le reste de la division de x^5+x^2+1 par x^3+1 ?

Réponse :

v. Simplifier l'expression suivante

$$\left|\frac{i(2+i)^3}{(1+i)^2}\right|.$$

Réponse :

SOLUTION TYPE

Avertissement : Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Le choix de la méthode est libre pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.

Question I

Conditions d'existence. Pour que l'inéquation ait du sens, il faut vérifier que $x^2 - m > 0$ (strict, car on a une racine carrée au dénominateur). Cela donne donc :

— si $m < 0$: $x \in \mathbb{R}$;
— si $m \geq 0$: $x \in \left]-\infty, -\sqrt{m}\right[\cup \left]\sqrt{m}, +\infty\right[$.

Résolution de l'inéquation. Puisque $\sqrt{x^2 - m} > 0$, l'inéquation équivaut à

$$x + 1 > \sqrt{x^2 - m}.$$

Si $x + 1 \leq 0$ ou encore $x \leq -1$, alors le membre de gauche est négatif ou nul, tandis que le membre de droite est strictement positif. L'inéquation n'a pas de solution.

Si $x + 1 > 0$ ou encore $x > -1$, alors nous pouvons élever au carré les deux membres (tous les deux positifs) et obtenir

$$(x+1)^2 > x^2 - m$$

et donc

$$x^2 + 2x + 1 > x^2 - m.$$

En simplifiant cette inégalité, nous avons

$$x > -\frac{m+1}{2}.$$

Discussion selon m. Discutons la solution en fonction de la valeur de m. En particulier, il faut analyser les positions relatives de -1, $-\frac{m+1}{2}$, et (quand cela a du sens) $-\sqrt{m}$ et $\sqrt{m}$.

i. *Si* $m < 0$. Le domaine est $\mathbb{R}$. Il faut $x > -1$ et $x > -\frac{m+1}{2}$.
   Étant donné que $-\frac{m+1}{2} > -1$, alors la solution est $x \in \left]-\frac{m+1}{2}, +\infty\right[$.
ii. *Si* $0 \leq m < 1$. Le domaine est $\left]-\infty, -\sqrt{m}\right[\cup \left]\sqrt{m}, +\infty\right[$. Il faut $x > -1$ et $x > -\frac{m+1}{2}$.
   Étant donné que $-1 < -\frac{m+1}{2} < -\sqrt{m} < \sqrt{m}$, alors la solution est $x \in \left]-\frac{m+1}{2}, -\sqrt{m}\right[\cup \left]\sqrt{m}, +\infty\right[$.
iii. *Si* $m \geq 1$. Le domaine est $\left]-\infty, -\sqrt{m}\right[\cup \left]\sqrt{m}, +\infty\right[$. Il faut $x > -1$ et $x > -\frac{m+1}{2}$.
   Étant donné que $-\frac{m+1}{2} < -\sqrt{m} < -1 < \sqrt{m}$, alors la solution est $x \in \left]\sqrt{m}, +\infty\right[$.

Conclusion. Nous avons

— si $m < 0$, $x \in \left]-\frac{m+1}{2}, +\infty\right[$;
— si $0 \leq m < 1$, $x \in \left]-\frac{m+1}{2}, -\sqrt{m}\right[\cup \left]\sqrt{m}, +\infty\right[$;
— si $m \geq 1$, $x \in \left]\sqrt{m}, +\infty\right[$.

Question II

i. Nous devons factoriser $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$. Cherchons les racines rationnelles possibles parmi les diviseurs de 12 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Testons quelques valeurs :
— $P(1) = 1 + 2 - 7 - 8 + 12 = 0$ ✓
— $P(-1) = 1 - 2 - 7 + 8 + 12 = 12$ ✗
— $P(2) = 16 + 16 - 28 - 16 + 12 = 0$ ✓
— $P(-2) = 16 - 16 - 28 + 16 + 12 = 0$ ✓
— $P(3) = 81 + 54 - 63 - 24 + 12 = 60$ ✗
— $P(-3) = 81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$ ✓
Nous avons donc les quatre racines suivantes : $1, -2, 2, -3$. Puisque toutes les racines sont distinctes, nous avons

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x-1)(x+2)(x-2)(x+3).$$

ii. Nous cherchons à décomposer la fraction rationnelle en fractions simples

$$\frac{3x^2 - x + 10}{x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\beta_i}{x - \alpha_i},$$

où les α_i sont les zéros du dénominateur. la décomposition en fractions simples s'écrit :

$$\frac{3x^2 - x + 10}{x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12} = \frac{3x^2 - x + 10}{(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)} = \frac{\beta_1}{x-1} + \frac{\beta_2}{x+2} + \frac{\beta_3}{x-2} + \frac{\beta_4}{x+3}.$$

Multiplions par le dénominateur, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 3x^2 - x + 10 = \beta_1(x+2)(x-2)(x+3) + \beta_2(x-1)(x-2)(x+3) \\ + \beta_3(x-1)(x+2)(x+3) + \beta_4(x-1)(x+2)(x-2). \quad (1) \end{aligned}$$

Utilisons la méthode des valeurs particulières pour déterminer les coefficients $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.
— Pour $x = 1$ dans (1) :

$$3 - 1 + 10 = \beta_1(3)(-1)(4) = -12\beta_1 \quad \Rightarrow \quad 12 = -12\beta_1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = -1.$$

— Pour $x = -2$ dans (1) :

$$12 + 2 + 10 = \beta_2(-3)(-4)(1) \quad \Rightarrow \quad 24 = 12\beta_2 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = 2.$$

— Pour $x = 2$ dans (1) :

$$12 - 2 + 10 = \beta_3(1)(4)(5) \quad \Rightarrow \quad 20 = 20\beta_3 \quad \Rightarrow \quad \beta_3 = 1.$$

— Pour $x = -3$ dans (1) :

$$27 + 3 + 10 = \beta_4(-4)(-1)(-5) \quad \Rightarrow \quad 40 = -20\beta_4 \quad \Rightarrow \quad \beta_4 = -2.$$

Nous obtenons donc la décomposition en fractions simples suivante :

$$\frac{3x^2 - x + 10}{x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+3}$$

iii. D'après le résultat précédent, nous avons

$$\frac{3k^2 - k + 10}{k^4 + 2k^3 - 7k^2 - 8k + 12} = -\frac{1}{k-1} + \frac{2}{k+2} + \frac{1}{k-2} - \frac{2}{k+3}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}\frac{3k^2-k+10}{k^4+2k^3-7k^2-8k+12} &= \sum_{k=3}^{n}\left[-\frac{1}{k-1}+\frac{2}{k+2}+\frac{1}{k-2}-\frac{2}{k+3}\right]\\ &= -\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-1}+2\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2}-2\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+3}.\end{aligned}$$

En utilisant la suggestion et en effectuant un changement d'indice, le membre de droite s'écrit

$$-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{1}{j}+2\sum_{j=5}^{n+2}\frac{1}{j}+\sum_{j=1}^{n-2}\frac{1}{j}-2\sum_{j=6}^{n+3}\frac{1}{j}.$$

En groupant ces sommes deux par deux, nous avons

$$\left(\sum_{j=1}^{n-2}\frac{1}{j}-\sum_{j=2}^{n-1}\frac{1}{j}\right)+2\left(\sum_{j=5}^{n+2}\frac{1}{j}-\sum_{j=6}^{n+3}\frac{1}{j}\right).$$

En simplifiant, nous avons

$$\left(1-\frac{1}{n-1}\right)+2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{7}{5}-\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n+3}.$$

Donc nous avons finalement

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{3k^2-k+10}{k^4+2k^3-7k^2-8k+12}=\frac{7}{5}-\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n+3}.$$

Question III

i. $z = 3 + 4i \quad \text{ou} \quad z = 3 - 4i$

ii. $1 - 6!/6^6 = \frac{319}{324} \approx 0.9846$

iii. -630

iv. 1

v. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$