NOM :	NUMÉRO D'ORDRE :
PRÉNOM :	

Prof. Émilie CHARLIER
Prof. Pierre SACRÉ

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ALGÈBRE

Septembre 2025

Consignes :

- *Durée de l'épreuve : 2 heures et demie.*
- *Déposez une pièce d'identité sur votre table.*
- *Inscrivez votre nom et votre prénom (en MAJUSCULES) ainsi que votre numéro d'ordre dans les cases prévues ainsi que sur chacune des pages que vous rendez.*

- *Sauf indication contraire, n'écrivez rien sur le questionnaire. Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées. Vous pouvez écrire au verso de vos feuilles, mais pas au verso du questionnaire.*
- *Rendez la page d'énoncé correspondante comme première page de chacune de vos réponses.*

- *Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.*
- *Sauf indication contraire, justifiez vos réponses en montrant vos développements. Les réponses doivent être et entièrement simplifiées et exactes, à moins qu'une approximation soit demandée.*

Question I

Démontrer que l'égalité des sommes suivantes

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

est vérifiée quel que soit l'entier $n \geq 1$.

Suggestion : Procéder par récurrence et penser à réindicer les sommes.

NOM :	NUMÉRO D'ORDRE :
PRÉNOM :	

Question II

i. Considérons l'équation cubique dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 + z + 10 = 0.$$

(a) Vérifier que $z = 1 + 2i$ est une solution de cette équation, où i désigne l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$.

(b) Déterminer les deux autres solutions de l'équation.

ii. Considérons l'ensemble A des nombres complexes z tels que $|z - 1| \leq 2$.

(a) Représenter graphiquement l'ensemble A dans le plan complexe.

(b) Déterminer les valeurs minimale et maximale de $|z + 1|$ pour $z \in A$. Indiquer les points $z \in A$ où ces extrêmes sont atteints.

NOM : NUMÉRO D'ORDRE :

PRÉNOM :

Question III

Vos réponses finales aux sous-questions ci-dessous doivent tenir uniquement dans les cadres indiqués sur ce questionnaire. Ne fournissez aucune justification à vos réponses pour ces sous-questions.

Vos réponses peuvent être laissées sous la forme d'opérations arithmétiques élémentaires, factorielles, et coefficients binomiaux.

i. Donner la valeur numérique de $\log_4\left(\frac{1}{1024}\right)$, où $\log_4$ représente le logarithme en base 4.

Réponse :

ii. Déterminer les conditions d'existence de l'inéquation suivante :

$$2\sqrt{\frac{x(x-1)}{4x^2-1}} \geq 0.$$

Réponse :

iii. Déterminer le terme indépendant de x dans le développement de $\left(x+\frac{2}{x}\right)^{10}$.

Réponse :

iv. La somme des n premiers nombres impairs positifs est 400. Trouver la valeur de n.

Réponse :

v. Cinq personnes montent dans un ascenseur qui dessert cinq étages. En supposant que chacune a la même probabilité de descendre à n'importe quel étage, trouver la probabilité qu'elles descendent toutes à des étages différents.

Réponse :

SOLUTION TYPE

Avertissement : Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Le choix de la méthode est libre pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.

Question I

Initialisation. Pour $n = 1$, nous avons pour le membre de gauche

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{(-1)^0}{1} - \frac{(-1)^1}{2} = \frac{1}{2}$$

et pour le membre de droite

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{1+1}.$$

L'égalité est donc vraie pour $n = 1$.

Hérédité. Supposons l'égalité vraie pour n, montrons-la pour $n+1$. Nous souhaitons montrer que

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}.$$

En développant le membre de gauche, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.
\end{aligned}$$

Par hypothèse, nous avons

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

En utilisant ceci et en réindiçant la somme, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}, \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k+1}\right) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}, \\
&= \frac{1}{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1}\right) - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}, \\
&= \frac{1}{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1}\right) - \frac{2}{2n+2}, \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1}.
\end{aligned}$$

Question II

i. (a) Calculons $(1+2i)^3+(1+2i)+10$. Calculons donc d'abord $(1+2i)^2$:

$$(1+2i)^2 = -3+4i.$$

Ensuite calculons $(1+2i)^3 = (1+2i)(-3+4i)$:

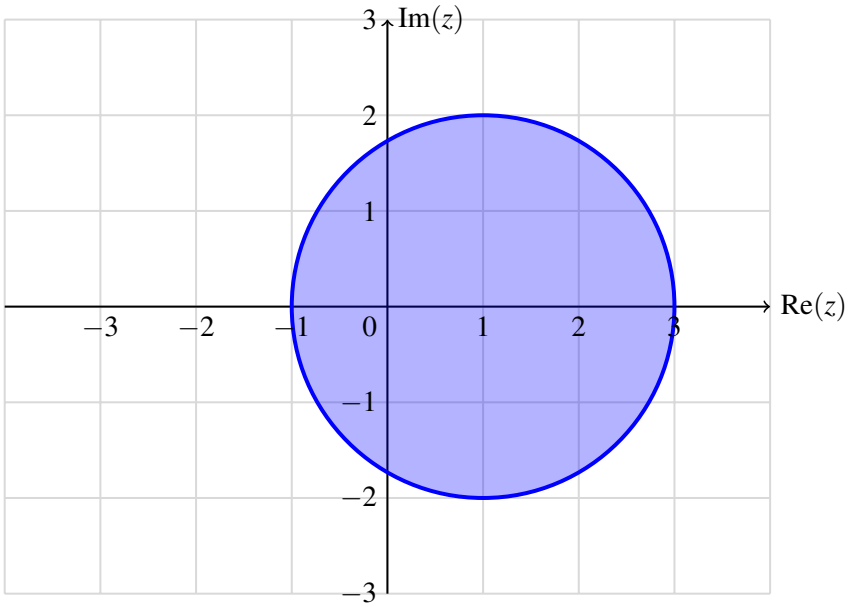
$$(1+2i)(-3+4i) = -11-2i.$$

Nous avons donc finalement

$$(1+2i)^3+(1+2i)+10 = (-11-2i)+(1+2i)+10 = (-11+1+10)+(-2i+2i) = 0.$$

(b) Étant donné que le polynôme possède des coefficients réels, ses racines complexes apparaissent toujours par paires conjuguées. Comme $z_1 = 1+2i$ est une solution d'après le point précédant, nous savons donc que $z_2 = 1-2i$ est également une solution. En observant attentivement l'équation, nous remarquons également que $z_3 = -2$ est une solution.

ii. (a) L'ensemble A des points possibles est un disque fermé de centre $(1,0)$ et de rayon 2.



(b) La valeur minimale de $|z+1|$ est atteinte quand z est le plus proche possible de $(-1,0)$. Il s'agit donc du point $(-1,0)$ lui-même, donc $z_{\min} = -1$. La valeur minimale de $|z+1|$ en ce point vaut donc 0.

La valeur maximale de $|z+1|$ est atteinte quand z est le plus éloigné possible de $(-1,0)$. Il s'agit donc du point $(3,0)$, donc $z_{\max} = 3$. La valeur maximale de $|z+1|$ en ce point vaut donc 4.

Question III

i. -5

ii. $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup[0, \frac{1}{2}[\cup[1, +\infty[$

iii. $2^5 C_{10}^5 = 8064$

iv. 20

v. $\frac{5!}{5^5} = \frac{24}{625} = 0.0384$