Prof. Éric J.M.DELHEZ

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Juillet 2025

Consignes :

- *Durée de l'épreuve : 2 heures et demie.*
- *Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.*

Question I

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$$

i. Déterminez le domaine de définition de f.

ii. Déterminez la parité éventuelle de f.

iii. Déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f.

iv. Étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels points stationnaires (points où la dérivée s'annule).

v. Esquissez le graphique de f en reliant explicitement les caractéristiques de celui-ci aux résultats des points précédents.

Question II

Évaluez les expressions suivantes :

i. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

ii. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$

iii. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx$

iv. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} \, dx$

v. $\displaystyle\int x \sin x \, dx$

Tournez la page.

Question III

Souhaitant donner plus de poids à la première des deux questions de l'examen qu'il vient d'administrer à ses étudiants, un enseignant calcule la note finale μ par la moyenne géométrique

$$\mu = \sqrt[3]{x^2 y}$$

où x et y désignent les notes des deux questions, exprimées par un réel (comportant un nombre quelconque de décimales) appartenant à l'intervalle $[0,20]$.

Un étudiant ayant reçu une note de $\mu = 10$ (sur 20), mais ignorant ses notes individuelles x et y, conteste le mode de calcul de la note finale et prétend qu'il aurait obtenu une bien meilleure note si la moyenne avait été calculée par une moyenne arithmétique classique pondérée pour donner un poids plus grand à la première question, soit

$$m = \frac{2x+y}{3}$$

i. Afin de l'aider à argumenter, déterminez la valeur minimale de la moyenne arithmétique pondérée m correspondant à une moyenne géométrique $\mu = 10$.

ii. Déterminez la valeur maximale de la moyenne arithmétique pondérée m à laquelle l'étudiant pourrait prétendre. Justifiez votre réponse.

SOLUTION TYPE

Avertissement : Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Le choix de la méthode est libre pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.

Question I

Soit

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2}$$

i. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

ii. La fonction f n'est ni paire ni impaire car

$$f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+x^2} \begin{cases} \neq \quad f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}$$

iii.
- On calcule

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

L'indétermination peut être levée par deux applications successives de la règle de l'Hospital. On calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(\mathrm{e}^{-x})'}{(1+x^2)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{2x} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

puis

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-\mathrm{e}^{-x})'}{(2x)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} = +\infty$$

de sorte que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2} = +\infty$$

De façon alternative, ce résultat peut être justifié en se basant sur le fait que l'exponentielle e^{-x} croit plus vite que x^2 au voisinage de $-\infty$.

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

- Il n'y a pas non plus d'asymptote oblique en $-\infty$ puisque

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+x^3} = -\infty$$

Ce résultat est évident puisque l'exponentielle e^{-x} domine les puissances de x au voisinage de $-\infty$. Il peut aussi être obtenu comme ci-dessus par trois applications successives de la règle de l'Hospital.

- On calcule ensuite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2} = 0^+$$

de sorte que le graphique admet une asymptote horizontale $y = 0$ approchée par le dessus.

- Vu la présence de l'asymptote horizontale, il n'y a pas d'asymptote oblique en $+\infty$
- Il n'y a pas d'asymptote verticale puisque $\operatorname{dom} \mathrm{f} = \mathbb{R}$.

iv. On calcule

$$f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x}(1+x^2) - \mathrm{e}^{-x}2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-\mathrm{e}^{-x}(1+x^2+2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-\mathrm{e}^{-x}(1+x)^2}{(1+x^2)^2}$$

La dérivée s'annule uniquement en $x = -1$ qui constitue dès lors le seul point stationnaire de f.

On établit le tableau des variations suivant

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	0^+

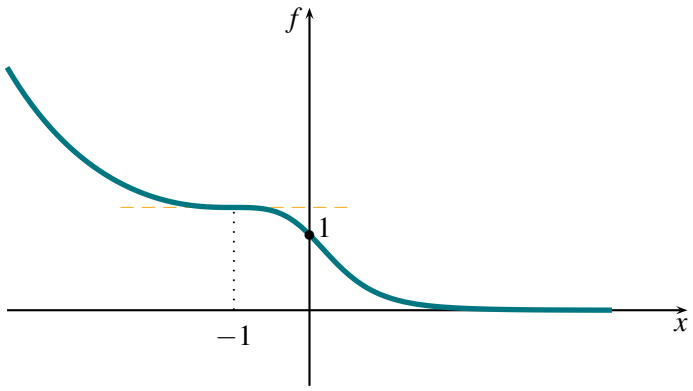
Ce tableau indique que la fonction ne présente pas d'extremum en $x = -1$ puisque f est décroissante à gauche et à droite de ce point.

Au point $x = -1$, le graphique de la fonction présente une tangente horizontale. La fonction f étant décroissante sur tout son domaine, son graphique traverse sa tangente en $x = -1$. Il existe donc un point d'inflexion à tangente horizontale en ce point.

v. Le graphique peut être esquissé en exploitant les éléments déterminés ci-dessus.

- Domaine : $\mathbb{R}$
- Asymptote horizontale en $+\infty$ approchée par le dessus.
- Fonction décroissante sur tout le domaine.
- Point d'inflexion à tangente horizontale en $x = -1$.

Notons aussi que la fonction est partout positive, que le graphique coupe l'axe OY en $(0,1)$ et qu'il existe nécessairement au moins un deuxième point d'inflexion en $x^* > -1$.



Question II

i.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} = 2$$

ii.

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

iii. On transforme d'abord l'intégrale selon

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x \sin x \, dx = \int_0^{\pi} (1-\cos^2 x) \sin x \, dx$$

Ensuite, introduisant le changement de variable

$$\cos x = u, \quad -\sin x \, dx = du, \quad x = 0 \to u = 1, \quad x = \pi \to u = -1$$

il vient

$$\int_0^{\pi} (1-\cos^2 x) \sin x \, dx = -\int_1^{-1} (1-u^2) du = \int_{-1}^{1} (1-u^2) du = \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

iv. On a directement

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} \, dx = 0$$

puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine.

v. Soit

$$\int x \sin x \, dx$$

Par application de la formule de primitivation par parties

$$\int f g' dx = fg - \int f' g \, dx$$

avec

$$\begin{cases} f = x \\ g' = \sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = 1 \\ g = -\cos x \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Question III

Le problème revient à déterminer les valeurs minimale et maximale de la fonction

$$m = \frac{2x+y}{3} \tag{†}$$

sous la contrainte

$$\sqrt[3]{x^2 y} = 10 \tag{‡}$$

sachant que x et y appartiennent à $[0,20]$.

i. En exploitant la contrainte (‡), on a

$$y = \frac{10^3}{x^2} \tag{♡}$$

(où $x \neq 0$ puisque la contrainte (‡) ne peut être vérifiée pour $x = 0$). En injectant (♡) dans l'expression de la moyenne arithmétique pondérée (†), on peut exprimer celle-ci en fonction de la seule variable x sous la forme

$$m(x) = \frac{2x}{3} + \frac{10^3}{3x^2}$$

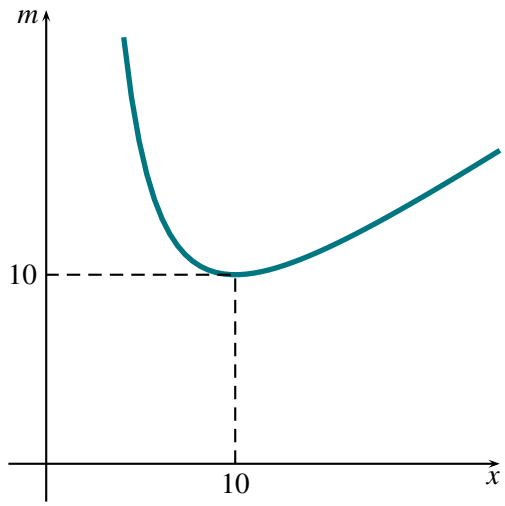
Afin d'étudier les variations et les valeurs extrémales de cette expression, on calcule

$$m'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2 \cdot 10^3}{3x^3} = \frac{2}{3x^3}\left(x^3 - 10^3\right)$$

Cette dérivée s'annule uniquement pour $x = 10$. À partir du signe de la dérivée, on établit le tableau des variations suivant :

x		10	
m'	$-$	0	$+$
m	$\searrow$	min	$\nearrow$

Graphiquement, on a



Le tableau des variations et le graphique montrent que m présente un minimum absolu au point stationnaire (puisque m décroit à gauche et croit à droite de $x = 10$). La valeur minimale de la moyenne arithmétique pondérée est donc $m(10) = 10$, cette valeur étant obtenue pour $x = y = 10$. En d'autres termes, la moyenne arithmétique pondérée m est systématiquement plus grande ou égale à la moyenne géométrique μ utilisée.

ii. Le graphique et le tableau des variations laissent penser que m peut prendre des valeurs arbitrairement grandes si x s'écarte de 10 vers le haut ou vers le bas. Il n'en est cependant rien car il faut tenir compte du fait que les notes individuelles x et y sont comprises dans l'intervalle $[0,20]$. En particulier, la contrainte $y \leq 20$ implique que

$$\frac{10^3}{x^2} \leq 20 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 5\sqrt{2}$$

Il convient dès lors d'étudier les variations de $m(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle restreint $[5\sqrt{2},20]$. Tenant compte de la majoration $\sqrt{2} < 1.5$, on calcule aisément

$$m(5\sqrt{2}) = \frac{10\sqrt{2}+20}{3} < \frac{15+20}{3} = \frac{35}{3} < 12 \quad \text{et} \quad m(20) = \frac{85}{6} = 14 + \frac{1}{6}$$

En conclusion, avec une moyenne géométrique pondérée $\mu = 10$, l'étudiant pourrait avoir une note comprise entre 10 et 85/6 si celle-ci était calculée par une moyenne arithmétique pondérée. La moyenne arithmétique pondérée maximale est donc de 85/6.

Prof. Éric J.M.DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Septembre 2025

Consignes :

- *Durée de l'épreuve : 2 heures et demie.*
- *Les calculatrices sont interdites pour cette épreuve.*

Question I

La fonction exponentielle généralisée d'argument a, notée généralement a^x, est définie par

$$f(x) = \exp(x \ln a)$$

où a désigne un paramètre réel strictement positif.

En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,

i. déterminez le domaine de définition de f ;
ii. déterminez la parité éventuelle de f ;
iii. déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f ;
iv. étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema ;
v. esquissez le graphique de f en reliant explicitement chacune des caractéristiques du graphique présenté aux résultats obtenus ci-dessus ;
vi. déterminez l'équation de la tangente au graphique de f en $x = 0$;
vii. sans calcul supplémentaire, esquissez le graphique de la fonction réciproque f^{-1} de la fonction f dans le cas où $a \neq 1$. Précisez le domaine de définition de cette fonction réciproque ainsi que son expression mathématique.

Question II

On considère l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = c^2$ où c est une constante strictement positive.

i. Représentez cette ellipse en indiquant les coordonnées de ses points d'intersection avec les axes du repère cartésien.
ii. À l'aide d'une intégrale, calculez l'aire du domaine intérieur à cette ellipse et montrez que celle-ci vaut πab où a et b désignent les longueurs des demis-axes de l'ellipse.

On réalise une cuve sans couvercle de volume V ayant la forme d'un cylindre droit de hauteur h dont la base elliptique a pour contour l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = c^2$.

iii. Sachant que le périmètre P de cette ellipse vaut $4\beta\pi^2 c$ où β est une constante supposée connue, déterminez les dimensions c et h de la cuve de volume V qui présente la surface extérieure (surface latérale + surface du fond de la cuve) d'aire minimale.

SOLUTION TYPE

Avertissement : Les solutions proposées ci-dessous sont des solutions types. Pour la plupart des questions posées, différentes procédures de résolution peuvent être mises en œuvre pour aboutir à la solution. Le choix de la méthode est libre pour autant que celle-ci soit appropriée et correctement justifiée.

Question I

Soit

$$f(x) = \exp(x \ln a)$$

On remarque tout d'abord que $\ln a$ est bien défini pour tout a strictement positif.

Pour $a = 1$, la fonction $f(x) = \exp(x \ln 1) = \exp(0) = 1$ se réduit à une constante pour toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$.

Pour toutes les autres valeurs strictement positives de a, on relève les éléments suivants.

i. La fonction $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

ii. La fonction f n'est ni paire ni impaire car

$$f(-x) = \exp(-x \ln a) \begin{cases} \neq +\exp(x \ln a) = +f(x) \\ \neq -\exp(x \ln a) = -f(x) \end{cases}$$

iii. • On calcule

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \exp(x \ln a) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a < 1 \\ 0^+ & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale en $-\infty$ si $a < 1$. Il y a par contre une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$ si $a > 1$. Celle-ci est approchée par le dessus.

De même,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \exp(x \ln a) = \begin{cases} 0^+ & \text{si } a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale en $+\infty$ si $a > 1$. Il y a par contre une asymptote horizontale $y = 0$ approchée par le dessus en $+\infty$ si $a < 1$.

• Vu la présence des asymptotes horizontales, il n'y a pas d'asymptote oblique en $-\infty$ si $a > 1$ ni en $+\infty$ si $a < 1$.

Si $a < 1$, on calcule

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\exp(x \ln a)}{x} = \frac{+\infty}{-\infty}$$

L'indétermination peut être levée par la règle de l'Hospital. On calcule

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{[\exp(x \ln a)]'}{x'} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln a \, \exp(x \ln a)}{1} = -\infty$$

de sorte que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\exp(x \ln a)}{x} = -\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote oblique en $-\infty$ si $a < 1$.

Si $a > 1$, on calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x \ln a)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

L'indétermination peut être levée par la règle de l'Hospital. On calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[\exp(x\ln a)]'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln a \, \exp(x\ln a)}{1} = +\infty$$

de sorte que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x\ln a)}{x} = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote oblique en $+\infty$ si $a > 1$.

- Il n'y a pas d'asymptote verticale puisque $\operatorname{dom} \mathrm{f} = \mathbb{R}$.

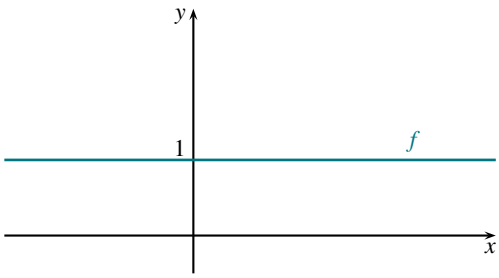
iv. On calcule

$$f'(x) = [\exp(x\ln a)]' = \ln a \, \exp(x\ln a) \begin{cases} < 0 & \text{si } a < 1 \\ > 0 & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Il n'y a pas de point stationnaire. La fonction est strictement décroissante sur tout son domaine si $a < 1$ et strictement croissante sur tout son domaine si $a > 1$.

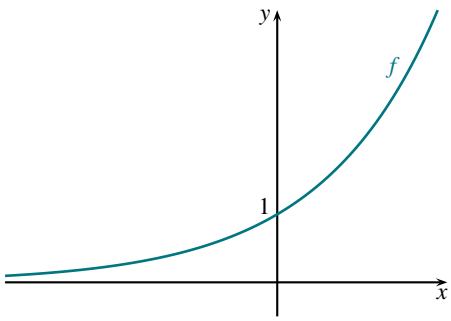
v. Les graphiques peuvent alors être tracés en vertu des éléments déterminés ci-dessus et en prenant en compte $f(0) = 1$ quelle que soit la valeur de a.

(a) Si $a = 1$,



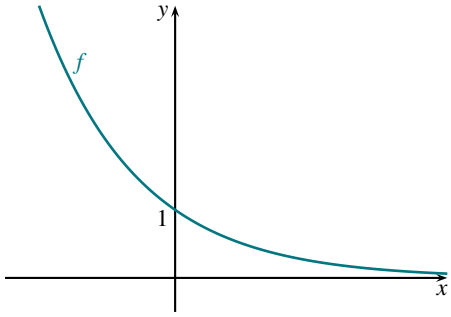
(b) Si $a > 1$,

- Domaine : $\mathbb{R}$
- Asymptote horizontale en $-\infty$ approchée par le dessus.
- Fonction croissante sur tout le domaine.



(c) Si $a < 1$,

- Domaine : $\mathbb{R}$
- Asymptote horizontale en $+\infty$ approchée par le dessus.
- Fonction décroissante sur tout le domaine.



vi. La tangente au graphique de f en $x = 0$ a pour équation

$$y = f(0) + f'(0)x$$

Prenant en compte l'expression de la dérivée calculée au point iv, il vient

$$f(0) = \exp(0) = 1, \qquad f'(0) = \ln a \, \exp(0) = \ln a$$

de sorte que l'équation recherchée est

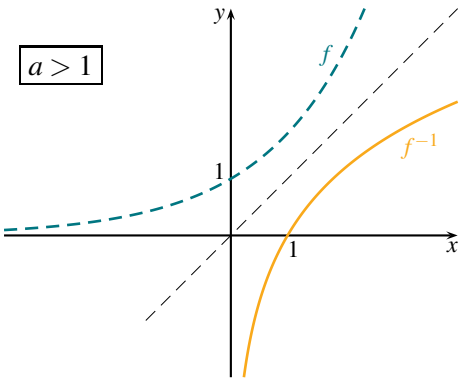
$$y = 1 + \ln a \;\; x$$

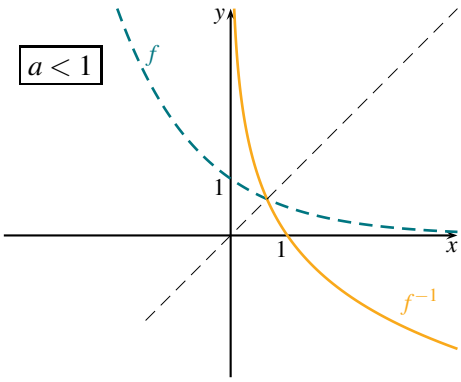
vii. Par définition, le graphe de la fonction réciproque f^{-1} est

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \operatorname{dom} f,\ x = f(y) \right\}$$

pour toutes les valeurs de x pour lesquelles cette définition conduit à associer une valeur y unique aux x considérés. Le graphique de f^{-1} s'obtient donc à partir du graphique de f par une symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice.

Il vient donc





La fonction f^{-1} est définie sur $\mathbb{R}_0^+$. Elle est croissante sur son domaine de définition si $a > 1$ et décroissante si $a < 1$.

L'expression analytique de la fonction réciproque est obtenue en résolvant l'équation

$$x = \exp(y \ln a)$$

En prenant le logarithme des deux membres, il vient aisément

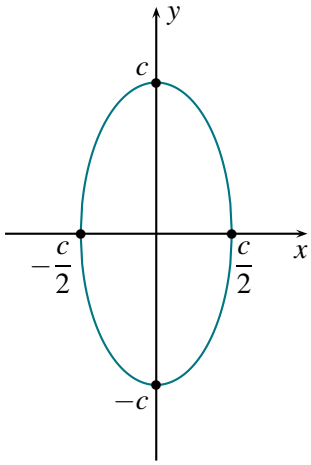
$$y = \frac{\ln x}{\ln a} = \log_a x, \qquad \text{soit} \qquad f^{-1}(x) = \log_a x$$

Question II

i. Sous forme canonique, l'ellipse d'équation $4x^2+y^2=c^2$ s'écrit

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$$

Il s'agit donc de l'ellipse d'axes OX et OY dont la longueur du demi-axe selon la droite OX vaut $a=c/2$ et la longueur du demi-axe selon la droite OY vaut $b=c$.



ii. Par symétrie, l'aire du domaine situé à l'intérieur de cette ellipse vaut 4 fois l'aire de la partie de ce domaine située dans le premier quadrant. On a

$$Aire=4\int_0^{\frac{c}{2}} y(x)\,dx=4\int_0^{\frac{c}{2}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^2}}\,dx$$

Cette intégrale se calcule en effectuant le changement de variable

$$x=\frac{c}{2}\sin t,\quad dx=\frac{c}{2}\cos t\,dt,\quad x=0\to t=0,\quad x=\frac{c}{2}\to t=\frac{\pi}{2}$$

soit

$$Aire=4c\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{c}{2}\cos^2 t\,dt=2c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=c^2\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi c^2}{2}$$

Comme annoncé, on peut donc exprimer l'aire de l'ellipse sous la forme πab où $a=c/2$ et $b=c$ désignent les longueurs des demis-axes de l'ellipse.

iii. L'aire de la surface extérieure de la cuve cylindrique s'obtient en additionnant l'aire de la surface latérale et l'aire de celle du fond, soit $S=S_\ell+S_f$. L'aire de la surface latérale s'obtient en multipliant le périmère de la base par la hauteur du cylindre, soit $S_\ell=h4\beta\pi^2c$. L'aire de la base est celle du domaine intérieur à l'ellipse considérée ci-dessus, soit $S_f=\pi c^2/2$. On a donc

$$S=h4\beta\pi^2c+\frac{\pi c^2}{2}$$

Le volume fixé de la cuve se calcule en multipliant l'aire de la base par la hauteur, soit

$$V=h\frac{\pi c^2}{2}$$

Cette relation permet d'exprimer h en fonction de c, soit

$$h = \frac{2V}{\pi c^2}$$

et, finalement, l'aire extérieure de la cuve en fonction de la seule variable c,

$$S(c) = \frac{\pi c^2}{2} + \frac{8\beta\pi V}{c}$$

Pour identifier le minimum de cette fonction, on calcule

$$S'(c) = \pi c - \frac{8\beta\pi V}{c^2} = \frac{\pi}{c^2}(c^3 - 8\beta V)$$

Cette dérivée s'annule uniquement quand $c = c^* = 2\sqrt[3]{\beta V}$.

Le point stationnaire c^* correspond bien à l'aire minimale puisque, comme le montre l'étude du signe de S', S est décroissante à gauche de c^* et croissante à droite :

c		c^*	
S'	$-$	0	$+$
S	$\searrow$	min	$\nearrow$

Les dimensions optimales c et h de la cuve sont donc

$$c = 2\sqrt[3]{\beta V} \quad \text{et} \quad h = \frac{1}{2\pi}\sqrt[3]{\frac{V}{\beta^2}}$$