Université de Liège

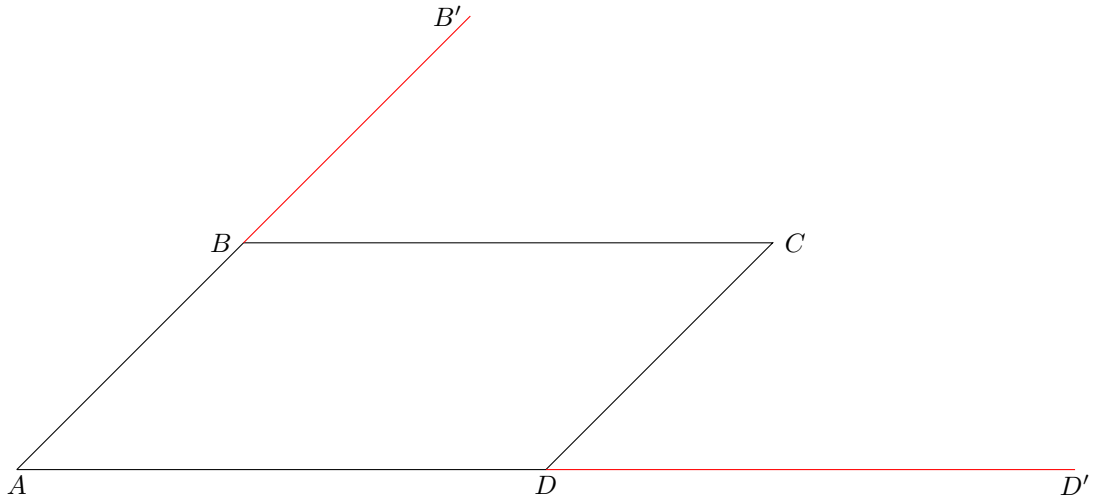
Examen d'admission aux études d'ingénieur civil

Géométrie et géométrie analytique
Corrigé de l'examen de juillet 2025

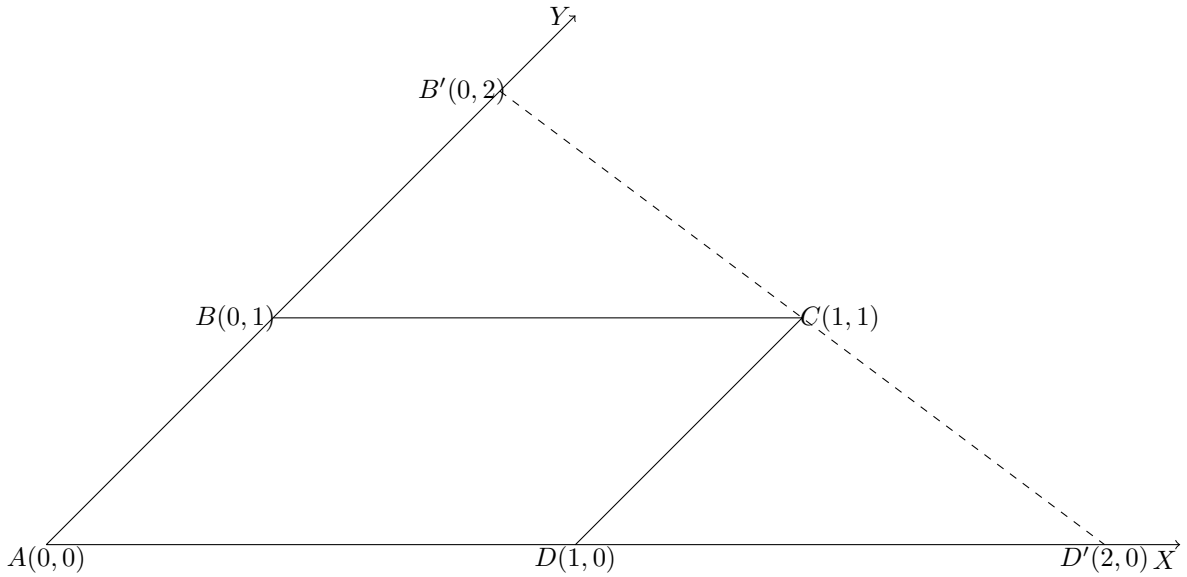
Question 1

On donne le parallélogramme $ABCD$. On prolonge les deux côtés adjacents AB, AD de segments BB', DD' de longueurs respectivement égales à ces côtés. Démontrer que les points B', C, D' sont sur une même droite.

Exemple de résolution. On a la représentation suivante



Méthode par la géométrie analytique



Définissons un repère en prenant l'origine au point A, l'axe X comme étant la droite déterminée par le côté AD, l'axe Y comme étant la droite déterminée par le côté AB et en fixant l'orientation et l'échelle en définissant respectivement les coordonnées de B et D par $(0,1)$ et $(1,0)$.

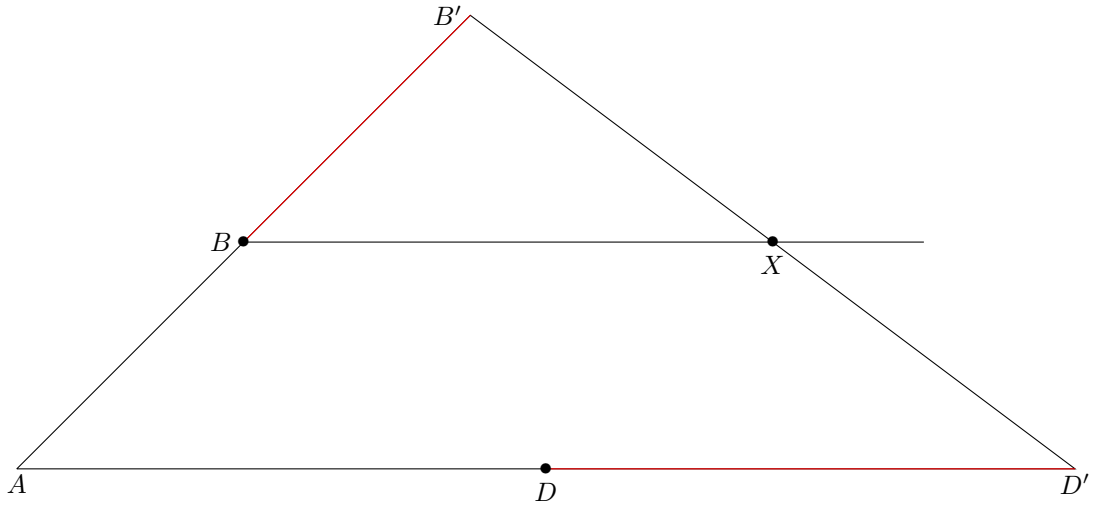
Dans ces conditions, la droite passant par $B'(0,2)$ et $D'(2,0)$ a pour équation cartésienne

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2}. \quad (*)$$

Cela étant, comme $ABCD$ est un parallélogramme, le point C a pour coordonnées $(1,1)$, lesquelles vérifient l'équation (*). Par conséquent les points B', C, D' sont bien alignés.

Méthode directe (1)

Considérons le triangle $AB'D'$ et, par B, traçons la droite parallèle au coté AD' ; cette droite coupe le côté $B'D'$ en un point, noté X.



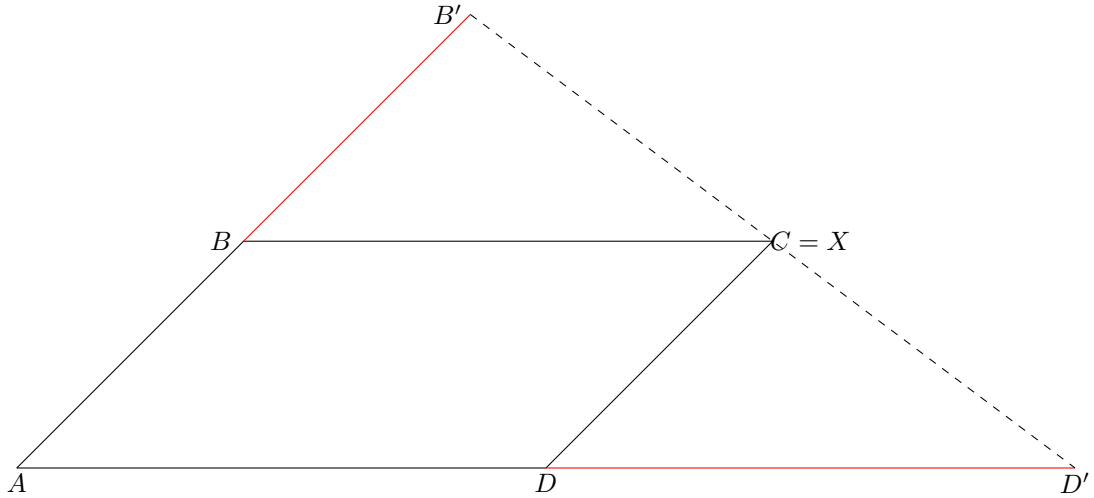
Cela étant, les triangles $AB'D'$ et $BB'X$ étant semblables (parce que trois angles égaux) et compte tenu de la construction de B' et D', on obtient [1]

$$\frac{|AB|}{|AB'|} = \frac{|B'X|}{|B'D'|} = \frac{1}{2}.$$

Comme $|AD'| = 2|AD|$ on obtient

$$2 = \frac{|AD'|}{|AD|} = \frac{|B'D'|}{|B'X|}.$$

Par le théorème de Thalès dans le triangle $AD'B'$, on en déduit que les segments AB et DX sont parallèles. Par conséquent $ABXD$ est un parallélogramme donc $X = C$ et on a bien la thèse.



1. la notation $|UV|$ signifie longueur du segment joignant les points U et V

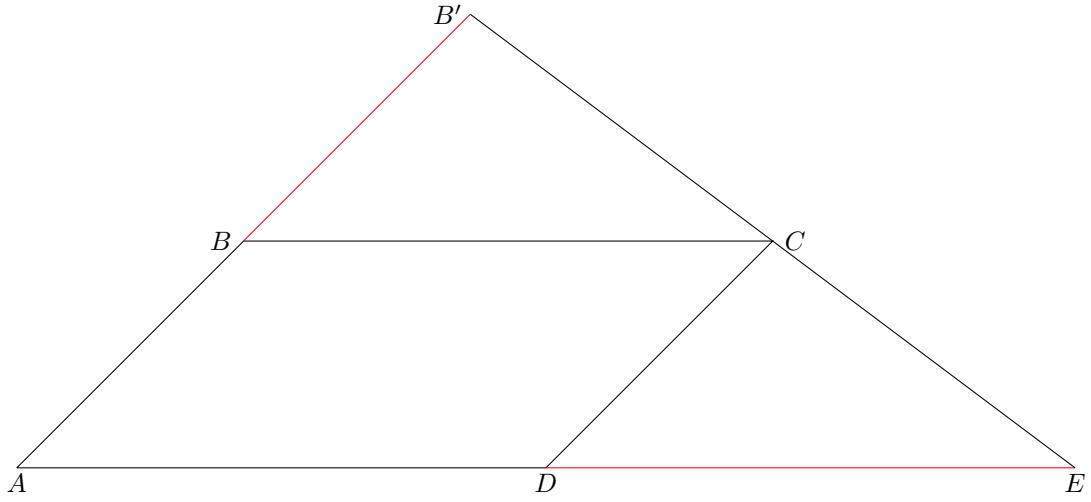
Méthode directe (2)

Traçons la droite passant par les points B' et C ; celle-ci coupe la droite AD en un point noté E. Pour conclure, il suffit de prouver que $E = D'$.

Les triangles $AB'E$ et $BB'C$ étant semblables (parce que trois angles égaux) et compte tenu de la construction de B', on a

$$\frac{1}{2} = \frac{|AB|}{|AB'|} = \frac{|BC|}{|AE|}.$$

Comme $|BC| = |AD|$ on obtient $|AE| = 2|AD|$ donc $E = D'$ puisque les points A, D, E sont alignés.



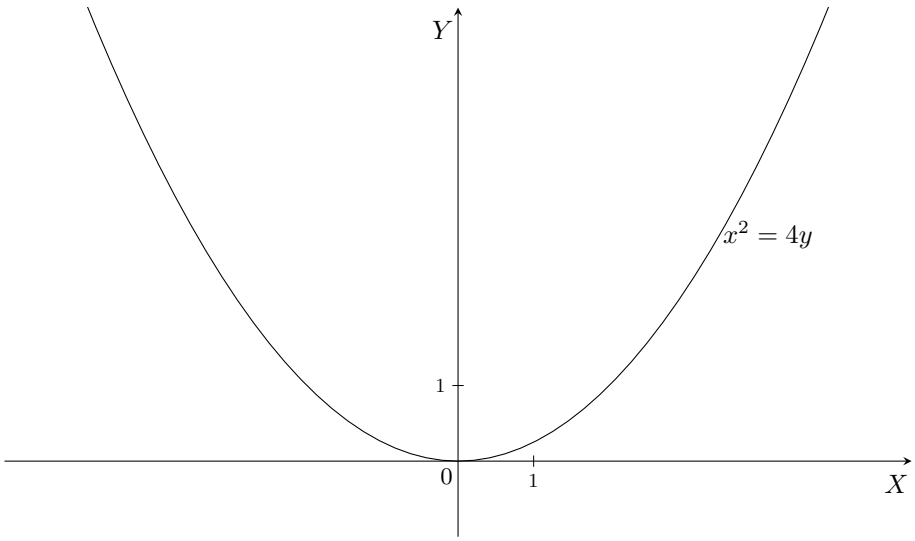
Question 2

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne

$$x^2 = 4y.$$

(2.1) Représenter $\mathcal{P}$.
(2.2) Déterminer l'équation cartésienne d'une tangente quelconque à la courbe $\mathcal{P}$.
(2.3) Déterminer l'équation cartésienne du lieu des points qui sont situés à l'intersection de deux tangentes orthogonales.
(2.4) Représenter le lieu dans le même repère que votre représentation de $\mathcal{P}$.

Exemple de résolution. **(2.1)** Voici la représentation de la parabole $\mathcal{P}$.



(2.2) La courbe $\mathcal{P}$ est la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2/4,\ x \in \mathbb{R}$. La fonction f étant dérivable dans $\mathbb{R}$, la tangente au graphique de f au point de coordonnées $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^2/4)$ a pour coefficient angulaire $Df(x_0) = x_0/2$; l'équation cartésienne de cette tangente est donc

$$y - \frac{x_0^2}{4} = \frac{x_0}{2}(x - x_0)$$

c'est-à-dire

$$y = \frac{x_0}{2}\,x - \frac{x_0^2}{4}.$$

En définissant $m = x_0/2$ pour simplifier les notations, on trouve que les tangentes à $\mathcal{P}$ sont les droites d'équation cartésienne

$$y = mx - m^2$$

où m est un paramètre réel.

2.3 En utilisant l'expression précédente pour l'équation d'une tangente, on obtient qu'un point $P(x, y)$ est un point du lieu si et seulement si il existe un réel non nul m tel que

$$\begin{cases} y = mx - m^2 \\ y = -\dfrac{1}{m}x - \dfrac{1}{m^2} \end{cases} \qquad (*)$$

Cela étant, pour trouver l'équation cartésienne du lieu, il reste à éliminer le paramètre m dans (*). On a successivement

$$\begin{cases} y = mx - m^2 \\ y = -\dfrac{1}{m}x - \dfrac{1}{m^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = mx - m^2 \\ mx - m^2 = -\dfrac{1}{m}x - \dfrac{1}{m^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = mx - m^2 \\ \left(m + \dfrac{1}{m}\right) x = m^2 - \dfrac{1}{m^2} = \left(m + \dfrac{1}{m}\right)\left(m - \dfrac{1}{m}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = mx - m^2 \\ x = m - \dfrac{1}{m} \end{cases}$$

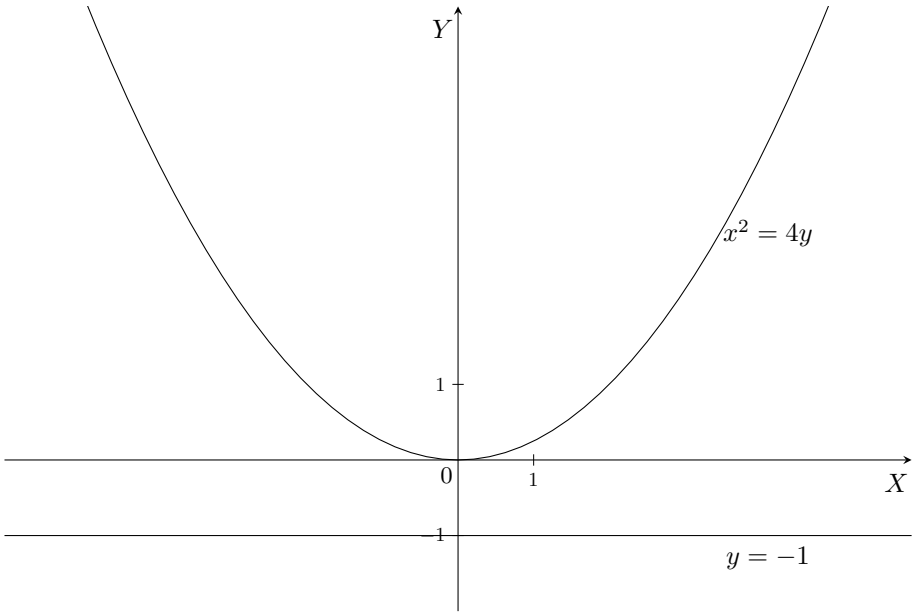
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = m - \dfrac{1}{m} \\ y = m\left(m - \dfrac{1}{m}\right) - m^2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m^2 - mx - 1 = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

Dès lors s'il existe un réel non nul m tel que (*) soit vérifié (c'est-à-dire si le point de coordonnées (x, y) appartient au lieu), alors $y = -1$. Et réciproquement, si $y = -1$ alors pour tout x, le point de coordonées $(x, -1)$ appartient au lieu puisque l'équation (en l'inconnue m) $m^2 - mx - 1 = 0$ a un discriminant strictement positif donc a des solutions.

En conclusion, le lieu est la droite d'équation cartésienne $y = -1$.

2.4 Voici la représentation de la parabole et du lieu.



Université de Liège

Examen d'admission aux études d'ingénieur civil

Géométrie et géométrie analytique
Corrigé de l'examen de septembre 2025

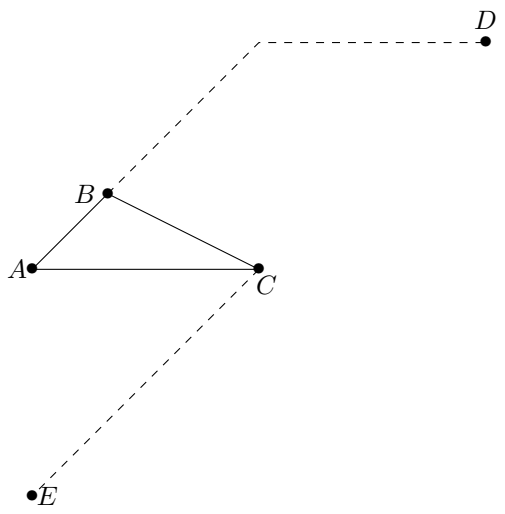
Question 1

Dans le plan, on donne un triangle ABC et on définit les points D et E par les relations

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{BA}.$$

(1.1) Représenter la situation.
(1.2) Démontrer que le point C est le milieu du segment DE.

Exemple de résolution. **(1.1)** On a la représentation suivante



(1.2) On a successivement

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} \\
&= \overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{BA} \\
&= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BA} \\
&= -3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BA} \\
&= 6\overrightarrow{BA} \\
&= 2\overrightarrow{CE};
\end{aligned}$$

dès lors C est bien le milieu du segment DE.

Question 2

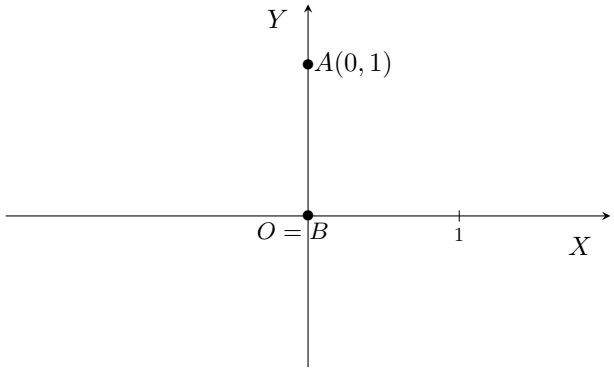
On donne deux points fixes distincts A et B du plan et on considère les droites d passant par B.

On demande

(2.1) de déterminer le lieu des points communs à d et à la perpendiculaire à d passant par A

(2.2) d'illustrer graphiquement.

Exemple de résolution. **(2.1)** Définissons un repère orthonormé en choisissant B comme origine, la droite AB comme axe Y avec $(0,1)$ comme coordonnées de A, et la droite orthogonale à AB passant pas B comme axe X.



Cela étant, une droite d passant par B et qui diffère de l'axe Y a pour équation $y = \lambda x$, où λ est un paramètre réel.

• Lorsque d est l'axe X (c'est-à-dire $\lambda = 0$), sa perpendiculaire qui passe par $A(0,1)$ est l'axe Y. L'intersection de ces droites est donc le point B, c'est-à-dire l'origine des axes vu le choix du repère.

• Lorsque d est l'axe Y, sa perpendiculaire passant par $A(0,1)$ est la droite d'équation $y = 1$. L'intersection de ces droites est donc le point $A(0,1)$.

• Lorsque d n'est ni l'axe X (donc $\lambda \neq 0$) ni l'axe Y, sa perpendiculaire qui passe par $A(0,1)$ a pour équation cartésienne $y - 1 = -x/\lambda$. L'intersection de ces droites est donc le point M dont les coordonnées x, y vérifient

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ y - 1 = -x/\lambda. \end{cases}$$

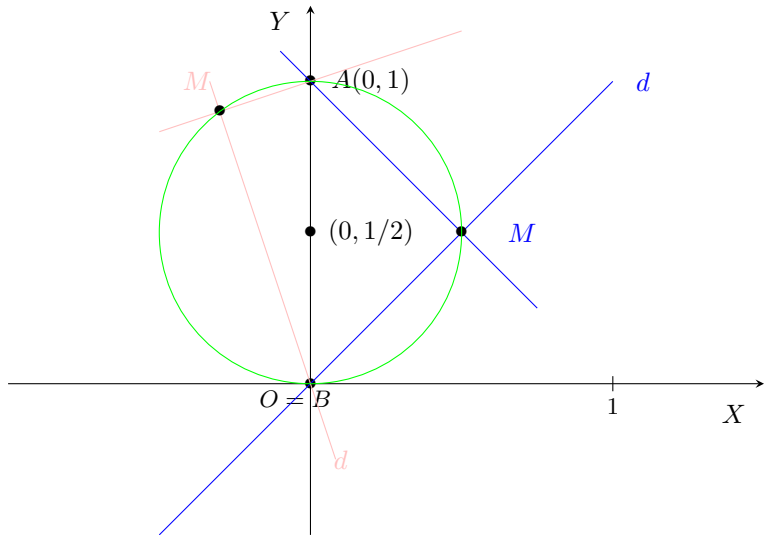
On obtient ainsi les équivalences suivantes, lesquelles nous permettent d'éliminer λ :

$$\begin{aligned}
&\text{un point } M \neq A(0,1),\ M \neq B(0,0) \text{ appartient au lieu} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists \lambda \neq 0 : \begin{cases} y = \lambda x \\ y - 1 = -x/\lambda \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & \exists \lambda \neq 0 : \begin{cases} y = \lambda x \\ y - 1 = -x/\lambda \end{cases} \text{ et } x \neq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \exists \lambda \neq 0 : \begin{cases} \lambda = y/x \\ y - 1 = -x^2/y \end{cases} \text{ et } x \neq 0,\ y \neq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \exists \lambda \neq 0 : \begin{cases} \lambda = y/x \\ y^2 - y = -x^2 \end{cases} \text{ et } x \neq 0,\ y \neq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 + y^2 - y = 0 \text{ et } x \neq 0,\ y \neq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 + \big(y - 1/2\big)^2 = 1/4 \text{ et } x \neq 0,\ y \neq 0.
\end{aligned}$$

L'équation cartésienne $x^2 + \big(y - 1/2\big)^2 = 1/4$ est celle du cercle de centre $(0, 1/2)$ et de rayon $1/2$; les points du cercle tels que $x = 0$ ou $y = 0$ correspondent aux points $A(0,1)$ et $B(0,0)$.

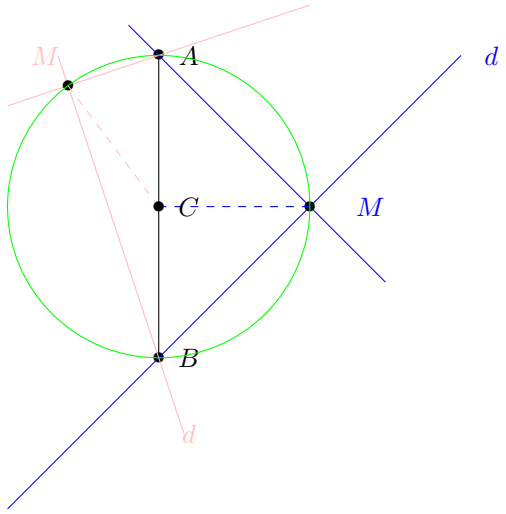
En conclusion, le lieu demandé est le cercle (tout entier) d'équation $x^2 + \big(y - 1/2\big)^2 = 1/4$.

(2.2) On a l'illustration suivante.



Autre exemple de résolution.

(2.1) et (2.2)



Si un point M appartient au lieu $\mathcal{L}$ et n'est ni A, ni B, alors le triangle AMB est rectangle en M. La médiane de ce triangle issue de M a une longueur égale à la moitié de l'hypoténuse (propriété des triangles rectangles), qui est le segment AB. Le point M est donc sur le cercle centré au point C, milieu du segment AB et de rayon égal à la moitié de la longueur du segment AB.

Réciproquement, si on prend un point M du cercle de centre C (milieu de AB) et de rayon égal à la moitié de la longueur du segment AB qui n'est ni A ni B, et que l'on trace la droite passant par M et par A, ainsi que la droite passant par M et par B, on construit un angle inscrit dans le cercle qui intercepte un diamètre. La mesure de cet angle est donc $\pi/2$ et les droites AM et BM sont bien perpendiculaires. Il s'ensuit que M appartient au lieu.

Comme les points A et B appartiennent au lieu et sont aussi sur le cercle en question, on en conclut que le lieu est le cercle complet (incluant A et B) centré en C (milieu de AB) et de rayon égal à la moitié de la longueur du segment AB.