Examen d'admission ingénieur - ULiège - Trigonométrie - Juillet 2025

Question I

Trouver toutes les solutions réelles de l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin^6 x - \cos^6 x = 3\cos^2 x \sin^2 x$$

Solution :

Solution 1. Posons $y = \sin^2 x$, alors en substituant aussi $\cos^2 x = 1 - y$, on obtient l'équation

$$y^3 - (1-y)^3 = 3(1-y)y \iff 2y^3 - 1 = 0 \iff \sin x = \pm\sqrt[6]{\frac{1}{2}}.$$

On trouve donc l'ensemble de solutions :

$$x \in \left\{\arcsin\left(2^{-1/6}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\arcsin\left(2^{-1/6}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Solution 2. On remarque que les x tels que $\cos x = 0$ ne sont pas solutions car, par l'absurde, si c'était le cas, alors l'équation deviendrait $\sin^6 x = 0$, or il est impossible que $\cos x$ et $\sin x$ soient simultanément nuls. On peut donc diviser l'équation par $\cos^6 x$. En posant $y = \operatorname{tg}^2 x$, on trouve alors l'équation $y^3 - 1 = 3y(1+y)$ qui se réduit à :

$$y^3 - 3y^2 - 3y - 1 = 0.$$

En complétant le cube, on obtient $2y^3 = (y+1)^3$, ce qui donne $y + 1 = 2^{1/3}y$ et enfin :

$$y = \frac{1}{2^{1/3} - 1}.$$

On trouve donc :

$$x = \pm \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{2^{1/3} - 1}} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On peut également terminer en remarquant que comme $y = \operatorname{tg}^2 x$, on a

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{2^{1/3}}{2^{1/3} - 1},$$

et on trouve alors $\sin^2 x = 2^{-1/3}$. On conclut alors comme dans la première solution.

Solution 3. Rappelons les identités :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \sin(2x) = 2\sin x \cos x.$$

En utilisant ces équations dans le membre de gauche et en posant $y = \cos 2x$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-y}{2}\right)^3 - \left(\frac{1+y}{2}\right)^3 &= \frac{3}{4}(1-y^2) \\
\iff 1 - 3y + 3y^2 - y^3 - \left(1 + 3y + 3y^2 + y^3\right) &= 6(1-y^2) \\
\iff -3y - y^3 &= 3(1-y^2) \\
\iff y^3 - 3y^2 + 3y + 3 &= 0 \\
\iff (y-1)^3 &= -4.
\end{aligned}$$

Donc :

$$y = 1 - \sqrt[3]{4}.$$

On vérifie que $y \approx -0.6 \in [-1,1]$. Dès lors :

$$2x = \pm \operatorname{arcos}(1-\sqrt[3]{4}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

soit :

$$x \in \left\{ \frac{1}{2}\operatorname{arcos}(1-\sqrt[3]{4}) + k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{2}\operatorname{arcos}(1-\sqrt[3]{4}) + k\pi \right\}.$$

Solution 4. En repérant que l'équation est symétrique en cos et sin, on pose $x = y + \pi/4$, de sorte que :

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}(c+s), \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}(c-s),$$

où $c = \cos y$ et $s = \sin y$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\sin^6 x - \cos^6 x &= (\sin^3 x - \cos^3 x)(\sin^3 x + \cos^3 x) \\
&= \frac{1}{8}\big((c+s)^3 - (c-s)^3\big)\big((c+s)^3 + (c-s)^3\big) \\
&= \frac{1}{8} \cdot 2(3c^2 s + s^3) \cdot 2(c^3 + 3cs^2) \\
&= cs(2c^2+1)(1+2s^2) \\
&= cs(4c^2s^2+3).
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
3\sin^2 x \cos^2 x &= \frac{3}{4}(c-s)^2(c+s)^2 \\
&= \frac{3}{4}(1-2sc)(1+2sc) \\
&= \frac{3}{4}(1-4s^2c^2).
\end{aligned}$$

En posant $z = 2sc = \sin 2y = \sin(2x - \pi/2) = -\cos 2x$, on trouve l'équation cubique :

$$\frac{z}{4}(z^2+3) = \frac{3}{4}(1-z^2),$$

que l'on réarrange :

$$z^3 + 3z^2 + 3z - 3 = 0 \iff (z+1)^3 = 4 \iff z = -1 + \sqrt[3]{4}.$$

La fin procède comme dans la solution précédente.

Question II

Démontrer que dans tout triangle ABC rectangle en C dont les côtés ont une longueur a, b et c et dont la mesure des angles opposés vaut respectivement A, B et C :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$$

Solution :

Méthode 1

On utilise les formules de Carnot :

$$\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1-\cos A}{2}, \qquad \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1+\cos A}{2}.$$

Donc

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}, \qquad \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

car dans un triangle rectangle, tous les angles sont compris en 0 et $\frac{\pi}{2}$ et donc les sinus et cosinus sont positifs. En remplaçant dans la formule de la tangente, on obtient

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}.$$

Comme le triangle est rectangle, on a $\cos A = \frac{b}{c}$ ce qui donne

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{b}{c}}{1+\frac{b}{c}}} = \sqrt{\frac{\frac{c-b}{c}}{\frac{c+b}{c}}} = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}.$$

Mais dans le triangle rectangle, on a $a^2+b^2=c^2$, donc

$$c-b = \frac{a^2}{c+b}.$$

En effet

$$c^2-b^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad (c-b)(c+b)=a^2 \quad \Rightarrow \quad c-b=\frac{a^2}{c+b}.$$

On en conclut donc que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}} = \sqrt{\frac{a^2}{(c+b)^2}} = \frac{a}{b+c},$$

car $A/2$ est compris entre 0 et $\pi/4$ et sa tangente est donc assurément positive. □

Méthode 2 :

On utilise la formule de l'angle moitié

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

En appliquant cela à A et en utilisant les formules du triangle rectangle, on trouve

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}} = \frac{a}{b+c}.$$

Ainsi, on a bien :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{a}{b+c}.$$

Question III

Deux poulies de rayons respectifs $r_1 = 4\ cm$ et $r_2 = 8\ cm$ sont disposées à une distance $d = 20\ cm$ centre à centre. Une courroie croisée relie ces deux poulies pour permettre l'inversion du sens de rotation. Calculer la longueur L de la courroie autour de ces poulies. La courroie est représentée en gras sur la figure ci-dessous et les points A, B, C et D représentent les points de tangence de cette courroie avec les poulies. Les calculs doivent être effectués avec 4 chiffres significatifs.

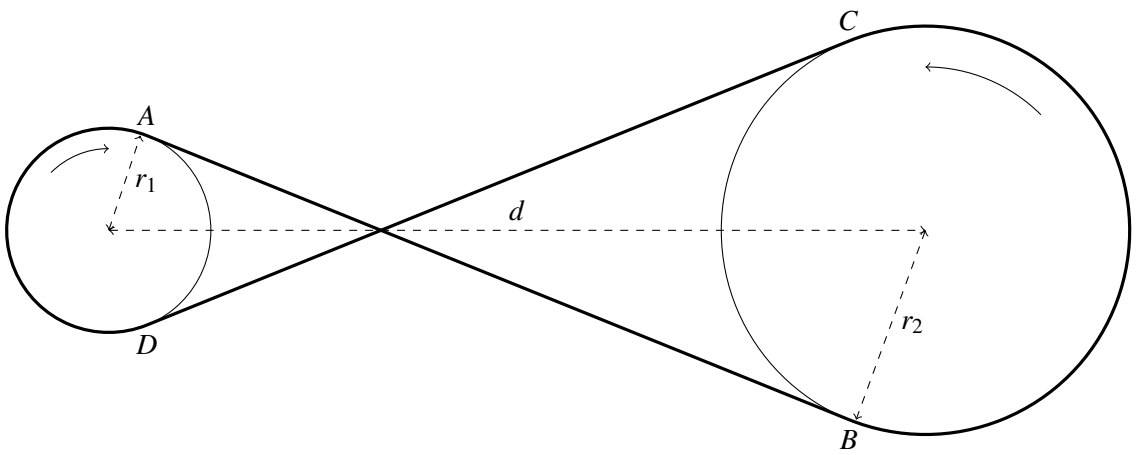
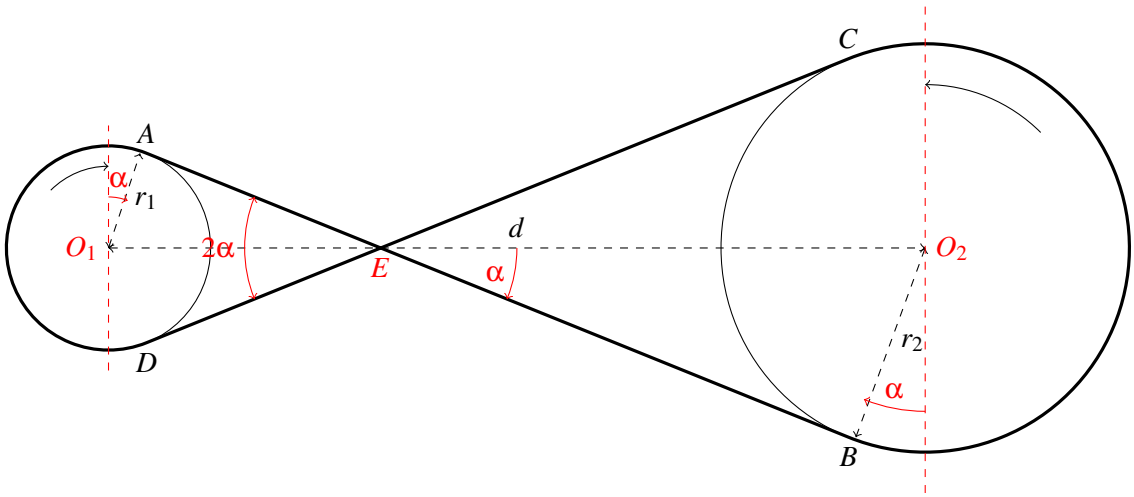


FIGURE 1 – Un système à deux poulies avec courroie croisée

Solution

Méthode 1 :

Définissons les centres des cercles de rayon r_1 et r_2 respectivement par O_1 and O_2 de sorte que $\overline{O_1O_2} = d$ ansi que le point d'intersection des courroies M. L'angle que fait la courroie au croisement est noté 2α. Par symétrie, l'angle que fait la courroie avec l'axe O_1O_2, vaut α et le point M se trouve sur la droite O_1O_2. La figure ci-dessous représente ces notations.



Les deux triangles O_1AE et O_2BE sont rectangles car le rayon d'un cercle au point de tangence est perpendiculaire à la tangente. Ces deux triangles son d'ailleurs semblables. Il est alors possible d'écrire :

$$d = \overline{O_1E} + \overline{O_2E} = \frac{r_1}{\sin\alpha} + \frac{r_2}{\sin\alpha}$$

La distance d étant donnée, nous pouvons résoudre cette équation pour déterminer α :

$$\alpha = \arcsin\frac{r_1 + r_2}{d} = \arcsin\frac{4\ cm + 8\ cm}{20\ cm} = 36{,}87°$$

La longueur des segments droits de la courroie est alors déterminée par :

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \frac{r_1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{r_2}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4\ cm + 8\ cm}{\operatorname{tg} 36{,}87°} = 16\ cm.$$

Les deux portions courbes de la courroie sont des arcs de cercle dont les côtés sont les rayons aux points de tangence. On remarque que la perpendiculaire à l'axe O_1O_2 passant par le centre d'une poulie fait un angle

α avec le rayon au point de tangence (les côtés de cet angle sont perpendiculaires deux à deux avec ceux de l'angle $\widehat{O_1EA}$. En procédant de manière similaire avec l'angle $\widehat{O_2EB}$, on peut alors écrire :

$$L = 2 \cdot \overline{AB} + r_1(\pi + 2\alpha) + r_2(\pi + 2\alpha) = 2 \cdot 16\ cm + (r_1 + r_2)\left(\pi + 2 \cdot 36{,}87° \frac{\pi}{180}\right) = 85.15\ cm.$$

Méthode 2

On constate tout d'abord que les triangles AO_1EC et CEB sont semblables et $\overline{AO_1}/\overline{CO_2} = 2$. Dès lors,

$$\frac{\overline{O_1E}}{|O_2E|} = 2 \quad \text{et donc} \quad |O_1E| = \frac{40}{3}, \quad |O_2E| = \frac{20}{3}.$$

En utilisant Pythagore dans le triangle rectangle AO_1E, on trouve

$$|AE| = \sqrt{\left(\frac{40}{3}\right)^2 - 8^2} = 10.66\ cm.$$

De même, $|CE| = 5.33\ cm$. Par symeetrie, on a $|AE| = |DE|$ et $|CE| = |BE|$.
Dès lors, la longueur totale des segments rectilignes est de $2(10.66 + 5.33) = 32\ cm$.

Toujours dans le triangle rectangle AO_1E, on peut trouver tous les angles, comme par exemple $\beta = \widehat{AO_1E} = \text{arcos}\left(\frac{8}{40/3}\right) = 0.927\ rad$.

A noter que, comme tous les triangles sont semblables, l'angle $\widehat{CO_2E}$ a la même amplitude. On calcule donc aisément les longueurs des parties courbes (à noter que c'est plus facile quand l'angle est exprimé en radians) :

$$\overset{\frown}{AD} = r_1(2\pi - 2\beta) = 8 \cdot 4.429 = 35.433\ cm$$
$$\overset{\frown}{BC} = r_2(2\pi - 2\beta) = 4 \cdot 4.429 = 17.717\ cm.$$

Si on additionne les parties rectilignes et les parties courbes on obtient finalement $32 + 35.433 + 17.717 = 85.15\ cm$.

NOM :	NUMÉRO D'ORDRE :
PRÉNOM :	

Prof. Pierre DEWALLEF
Prof. Quentin LOUVEAUX

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE DE TRIGONOMÉTRIE ET CALCUL NUMÉRIQUE

Août 2025

Question I

Trouver toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sin(3x) - \sin x + 2\operatorname{tg} x = 0.$$

Solution

Conditions d'existence : On doit s'asurer que $\cos x \neq 0$. Les conditions nous donnent $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Méthode 1 :

On applique la factorisation de Simpson sur les deux premiers termes ce qui donne

$$2\cos(2x)\sin x + 2\operatorname{tg} x = 0.$$

On utilise la définition de la tangente pour transformer l'équation en

$$2\cos(2x)\sin x + 2\frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

En simplifiant les 2 et en mettant tout au même dénominateur, on obtient

$$\frac{\cos x\cos(2x)\sin x + \sin x}{\cos x} = 0$$

Le cosinus du dénominateur peut être simplifié puisque nous avons déjà posé les conditions d'existence. On peut également mettre $\sin x$ en évidence. On obtient

$$\sin x(\cos x\cos 2x + 1) = 0$$

Le premier facteur nous donne les solutions de $\sin x = 0$ c'est-à-dire $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ qui satisfont les conditions d'existence.

Pour le deuxième facteur, on utilise l'expression $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ et on obtient

$$(2\cos^2(x) - 1)\cos x + 1 = 0.$$

En notant $y = \cos x$, on obtient le polynôme $(2y^2 - 1)y + 1 = 2y^3 - y + 1$. On observe que $y = -1$ est solution, nous pouvons donc factoriser le polynôme et obtenir

$$(y+1)(2y^2 - 2y + 1) = 0.$$

Le premier facteur donne $y = -1$ soit $\cos x = -1$ ce qui correspond déjà aux solutions trouvées de $\sin x = 0$. Cela ne génère donc aucune nouvelle solution. Le deuxième facteur est un polynôme d'ordre 2 dont le discriminant est -4 et qui n'admet donc aucune solution réelle.

L'ensemble des solutions est donc $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Méthode 2 :

On utilise $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3(x)$. On a un sinus qui peut être mis en évidence et si on transforme ensuite $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on obtient un polynôme en $\cos x$ similaire à la méthode 1.

Question II

En vous basant sur les valeurs de sinus et cosinus des angles remarquables 90°, 60°, 45° et 30° évaluer sans calculatrice l'expression :

$$\sin(7{,}5^\circ)$$

Solution

Nous remarquons que 7,5° peut être exprimé en fonction des angles remarquables :

$$7{,}5^\circ = \frac{45^\circ - 30^\circ}{2}.$$

Ensuite, en appliquant successivement les formules du cosinus de la moitié de l'angle $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ et du sinus de la différence $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sin\frac{45^\circ - 30^\circ}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos(45^\circ - 30^\circ)}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{8}}
\end{aligned}$$

Question III

Un bateau quitte le phare de son port de départ A avec un azimut $\alpha = 30^\circ$ et parcourt une distance rectiligne $a = 20\,\text{km}$ jusqu'au point B pour ensuite prendre un tournant en arc de cercle d'un rayon $R = 5\,\text{km}$ jusqu'à atteindre un azimut $\beta = 240^\circ$ au point C pour parcourir ensuite une distance rectiligne $d = 10\,\text{km}$ jusqu'au point D. En supposant une Terre plate, calculer la distance rectiligne $\overline{DA}$ qui sépare le bateau du phare de départ ainsi que l'azimut δ sous lequel il le voit. Pour rappel, les azimuts sont comptés à partir du Nord positivement vers l'Est (sens horaire). Les segments de droite AB et DC sont tangents à l'arc de cercle respectivement aux points B et C.

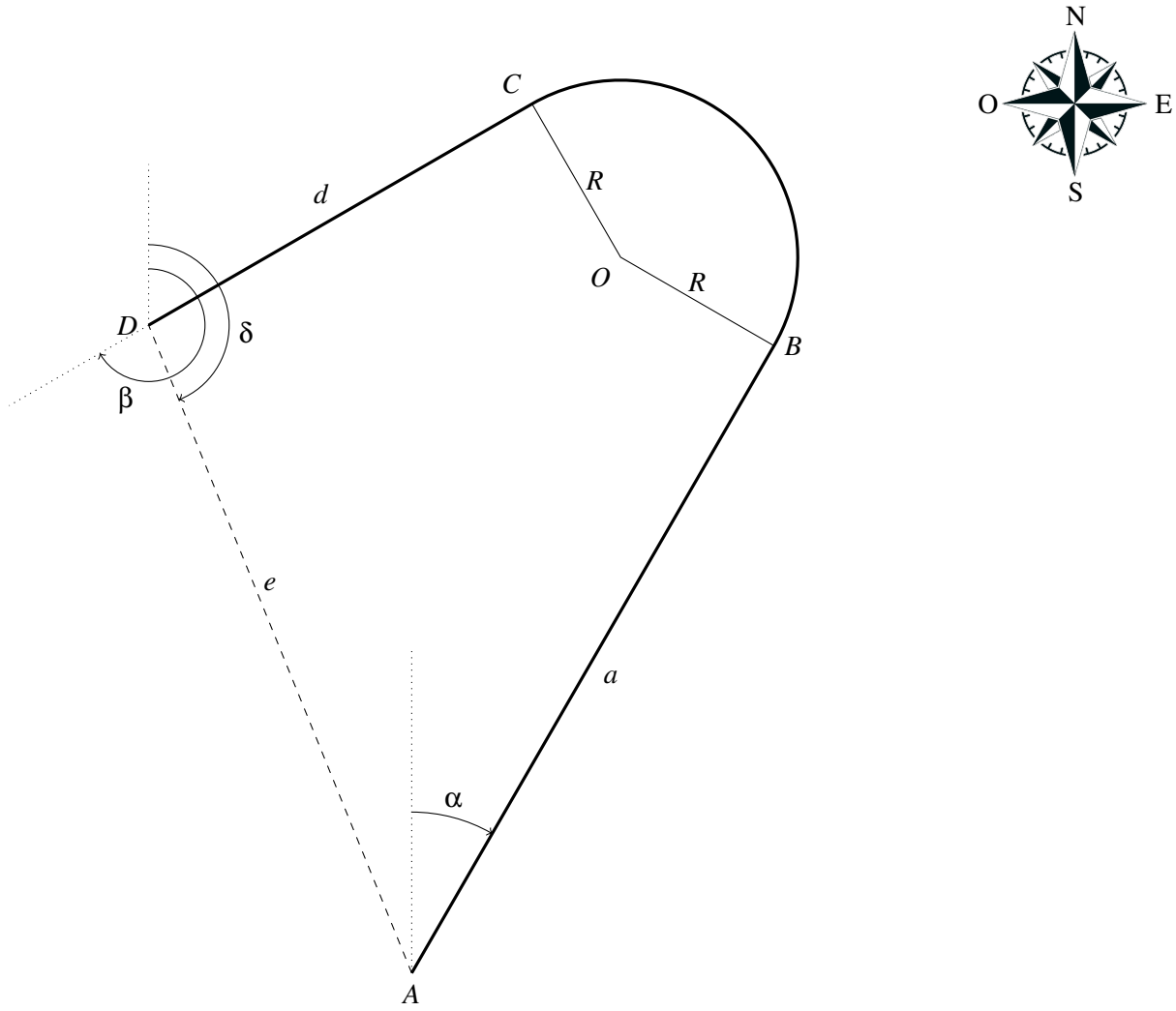


FIGURE 1 – Le trajet du bateau à partir du phare de départ.

Solution

En notant $\beta_1 = 360° - \beta$ l'angle conjugué de β et γ_1 l'angle de rotation effectué par le bateau, nous pouvons écrire :

$$\gamma_1 = \alpha + \beta_1 = 360° + \alpha - \beta = 150°.$$

Ensuite, nous pouvons tracer les triangles rectangles *ABO* et *DCO* respectivement rectangles en *B* et *C*.
En suivant les notations de la Figure 2, nous pouvons écrire :

$$\omega_1 = \operatorname{arctg}\frac{R}{a} = 14{,}04°, \quad \gamma_3 = 90° - \omega_1 = 75{,}96° \quad \text{et} \quad b = \sqrt{a^2 + R^2} = 20{,}62\,\text{km}$$

et

$$\omega_2 = \operatorname{arctg}\frac{R}{d} = 26{,}57°, \quad \gamma_4 = 90° - \omega_2 = 63{,}43° \quad \text{et} \quad c = \sqrt{d^2 + R^2} = 11{,}18\,\text{km}$$

Le triangle quelconque *AOD* peut alors être déterminé en notant que $\gamma_2 = 360° - \gamma_1 - \gamma_3 - \gamma_4 = 70{,}61°$ et il vient :

$$e = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\gamma_2} = 19{,}93\,\text{km}$$

Pour déterminer l'azimut δ, il est utile d'évaluer :

$$\frac{e}{\sin\gamma_2} = \frac{c}{\sin\alpha_2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \arcsin\frac{c \cdot \sin\gamma_2}{e} = 31{,}95°,$$

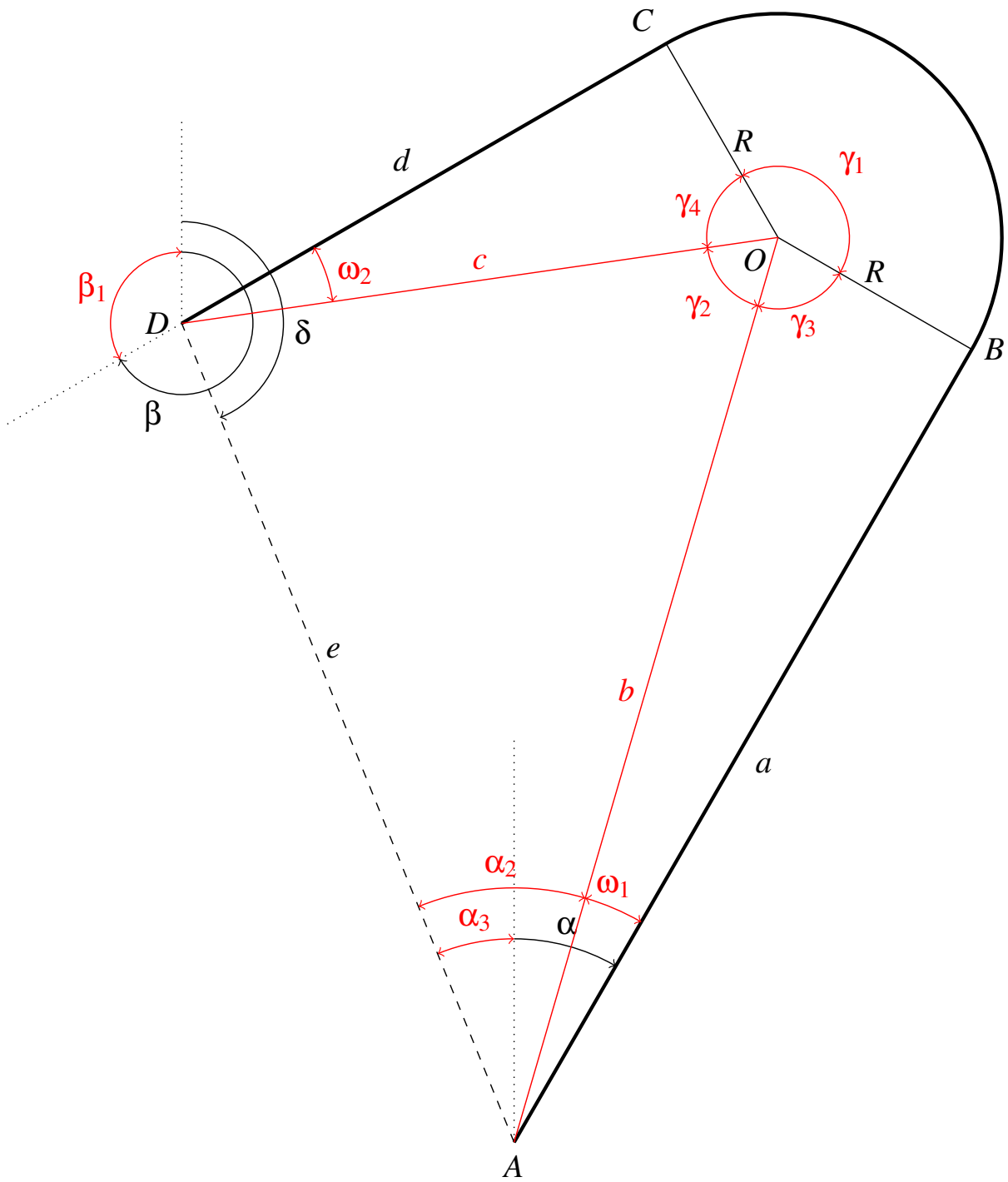


FIGURE 2 – Constructions relatives à la résolution.

qui permet d'évaluer l'angle α_3 en notant que $\alpha_2 + \omega_1 = \alpha_3 + \alpha$. L'azimut recherché est le supplément de l'angle $\alpha_3 = 15{,}99°$ (angles alterne-interne) :

$$\delta = 180° - \alpha_3 = 164{,}0°$$